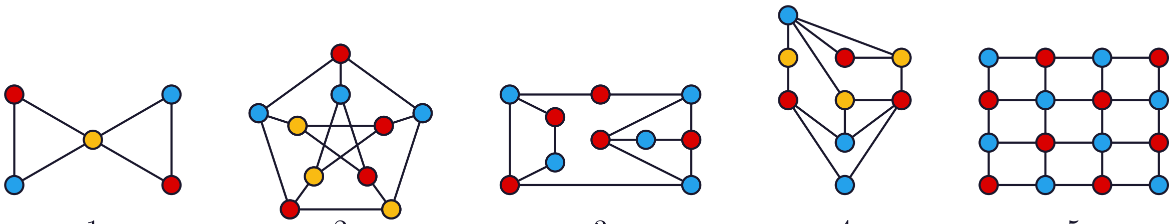
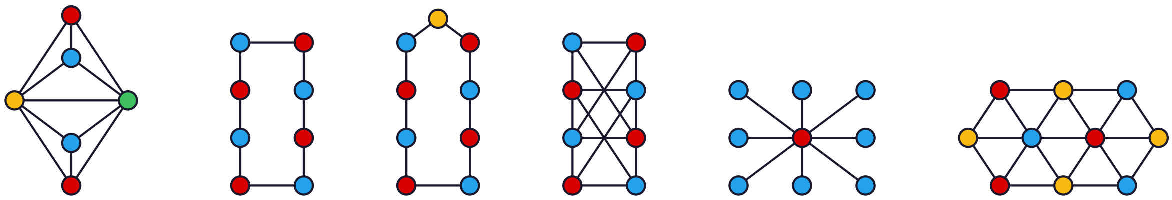
Solutions pour l'activité Coloration

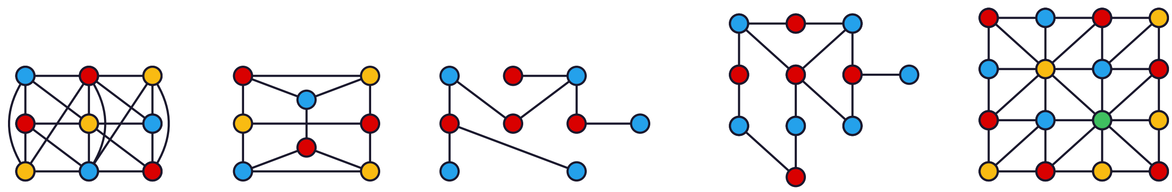
Nous donnons ici une solution pour les problèmes de coloration. Pour la plupart d'entre eux, plusieurs solutions sont possibles. Il est donc plus que probable que ceux qui pratiquent l'activité trouvent des solutions différentes de celles présentées ici. Sept problèmes, à savoir les 12, 13, 16, 22, 25, 37 et 39 , n'admettent pas de solution. Pour chacun d'entre eux, nous donnons une preuve de la non existence de solutions. Là aussi, d'autres preuves sont possibles.



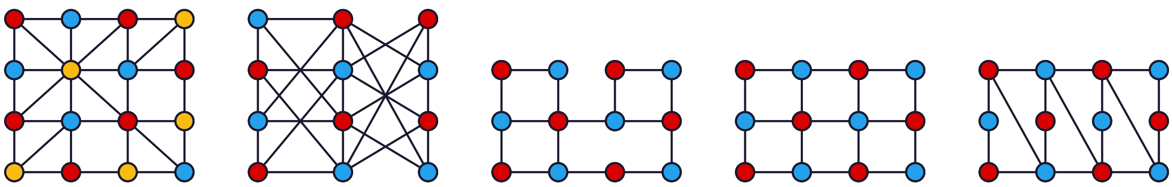
– 1 – – 2 – – 3 – – 4 – – 5 –



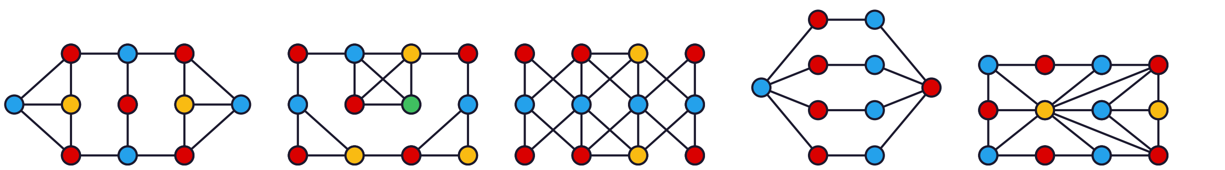
– 6 – – 7 – – 8 – – 9 – – 10 – – 11 –



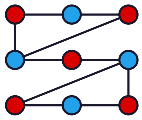
– 14 – – 15 – – 17 – – 18 – – 19 –



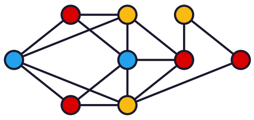
– 20 – – 21 – – 23 – – 24 – – 26 –



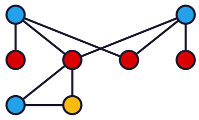
– 28 – – 29 – – 30 – – 31 – – 32 –



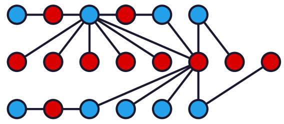
– 33 –



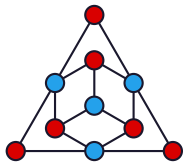
– 34 –



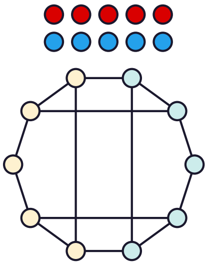
– 35 –



– 36 –

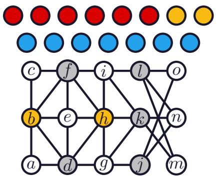


– 37 –



– 12 –

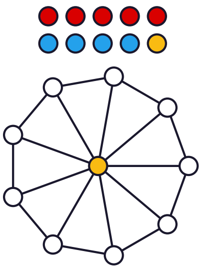
Pour ce graphe, nous avons deux couleurs à disposition (rouge et bleu). Mais, on ne peut pas colorer ce graphe avec deux couleurs. En effet, ce graphe possède deux cycles impairs (i.e. avec un nombre impair de sommets) : celui formé par les sommets en vert clair, et celui formé par les sommets en jaune dans la figure ci-contre. En effet, sur un cycle impair, il est impossible de faire alterner deux couleurs.



– 13 –

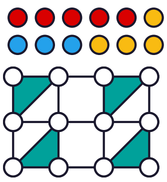
Observons que les trois sommets d'un triangle doivent être de couleurs différentes. Ainsi chacune des trois couleurs apparait sur chaque triangle. Supposons que ce soit possible de colorer avec les jetons fournis. abc, efh et ihk sont des triangles. Comme on ne dispose que de deux jetons jaunes, l'un d'entre eux doit forcément être sur h, le seul sommet qui soit dans deux de ces triangles. De même, abc et bcf sont des triangles, donc le deuxième jeton jaune doit être sur b, le sommet commun à ces deux triangles.

Une fois placé les deux jetons jaunes, il ne reste que deux couleurs. On peut bien colorer le graphe restant avec deux couleurs. Cependant une telle coloration est fixée à permutation des couleurs près. En effet, une fois que la couleur d'un sommet est fixée, celle de ses voisins doit être différente, celles des voisins de ses voisins la même et ainsi de suite. Ainsi une coloration en deux couleurs de ce graphe a forcément 5 sommets d'une couleur (ceux en gris dans la figure ci-dessus) et 8 de l'autre (ceux en blanc). Or ici nous disposons de 6 jetons rouges et 7 jetons bleus.



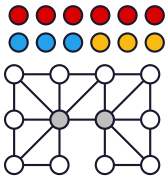
– 16 –

Pour ce graphe, nous avons un seul jeton de couleur jaune. Celui-ci doit forcément être au sommet central qui est relié à tous les autres. Il reste ensuite les deux couleurs, rouge et bleu, pour colorer le cycle externe. Mais, cela est impossible car ce cycle est impair (il a 9 sommets), et qu'on ne peut donc pas faire alterner deux couleurs sur ce cycle.



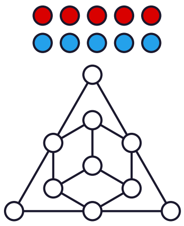
– 22 –

Ce graphe possède 4 triangles disjoints représentés en vert sur la figure ci-contre. Comme on ne dispose que de trois couleurs de jetons, chacun de ces triangles doit avoir un sommet de chaque couleur. Il faudrait donc au moins quatre jetons de chaque couleur pour avoir une solution, mais nous ne disposons que de trois jetons bleus.



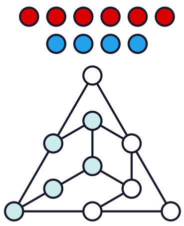
– 25 –

Dans ce problème, nous disposons de 6 jetons rouges. Il faut pouvoir placer ces jetons sur un ensemble indépendant du graphe, c'est-à-dire un ensemble dont aucune paire n'est reliée par une arête. Montrons que ceci est impossible. On peut tout d'abord facilement voir qu'aucun des deux sommets en gris sur la figure ci-contre ne peut être dans un tel ensemble indépendant car ils ont trop de voisins. Les sommets non-gris forment un chemin de dix sommets sur lesquels il est impossible de mettre 6 jetons rouges. En effet, deux sommets consécutifs ne peuvent pas être rouge, donc on peut placer les jetons rouge au mieux un sommet sur deux, soit 5 fois.



– 38 –

Pour ce graphe, nous avons deux couleurs à disposition (rouge et bleu). On peut bien colorer ce graphe avec deux couleurs (voir la solution au problème 37). Cependant une telle coloration est fixée à permutation des couleurs près. En effet, une fois que la couleur d'un sommet est fixée, celle de ses voisins doit être différente, celles des voisins de ses voisins la même et ainsi de suite. Ainsi une coloration en deux couleurs de ce graphe a forcément 6 sommets d'une couleur et 4 de l'autre. Or ici nous disposons de 5 jetons de chaque couleur.



– 39 –

Pour ce graphe, nous avons deux couleurs à disposition (rouge et bleu). Mais, on ne peut pas colorer ce graphe avec deux couleurs. En effet, ce graphe possède des cycles impairs (i.e. avec un nombre impair de sommets). Par exemple, celui formé par les sommets en vert clair dans la figure ci-contre. En effet, sur un cycle impair, il est impossible de faire alterner deux couleurs.