Fiche pédagogique

Activité : Lights Out

Objectifs pédagogiques : Introduction à l'algorithmique. Apprendre à concevoir et expliciter un algorithme. Savoir appliquer un algorithme.

Notions abordées : Coordonnées, Algorithme, Optimisation, Graphes.

Matériel nécessaire : Jeu électronique, jeu on-line, ou jeu de cartes (carrées) avec deux faces de couleurs différentes.

Niveau : A partir du cycle 3.

Durée : Au moins une demi heure.

Description du jeu : Lights Out est un jeu créé par un groupe de personnes comprenant Avi Olti, Gyora Benedek, Zvi Herman, Revital Bloomberg, Avi Weiner et Michael Ganor. Une version électronique a été commercialisée par Tiger Electronics en 1995.

On dispose d'une grille $n \times m$ dont les cases peuvent s'éteindre et s'allumer. Dans la version commerciale, le jeu consistait en une grille de 5×5. Nous utilisons des grilles plus petites : la grille 4×4 et d'autres grilles plus petites.

Au début, certaines cases sont éteintes et d'autres sont allumées. En appuyant sur une case, les états de cette case et de ses voisines changent (Une case a au plus quatre voisines : à gauche, à droite, en haut et en bas. Ainsi, un coin n'a que deux cases voisines et une case du bord qui n'est pas un coin en a trois.) : une case allumée s'éteint et, inversement, une case éteinte s'allume. **Le but du jeu est d'allumer toutes les cases** en appuyant successivement sur différentes cases.

Premier exemple : Considérons une grille 4×4. Au début, seules les cases A4, C4, C3 et B1 sont allumées. On appuie sur la case C4 (entourée en bleu sur la Figure 1 (i)). Cela change son état et ceux de ses voisines (entourées en pointillé bleu sur la Figure 1 (ii)). Ainsi les cases C4 et C3 s'éteignent et les cases B4 et D4 s'allument. On appuie ensuite sur la case B3 (entourée en vert sur la Figure 1 (iii)). Cela change son état et ceux de ses voisines (entourées en pointillé vert sur la Figure 1 (iv)). Ainsi la case B4 s'éteint et les cases A3, B3, C3 et D4 s'allument.

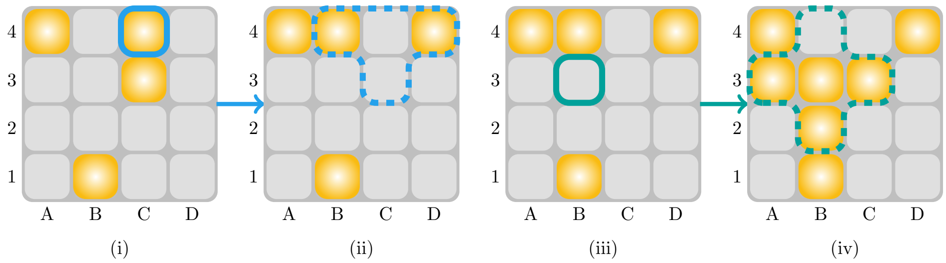


FIGURE 1 – Evolution d'une grille lorsqu'on appuie sur la case C4 puis sur la case B3.

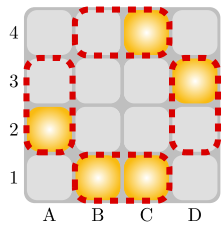
Déroulement Une fois les règles expliquées, on donne à chaque participant (ou petit groupe de participants), une grille 4×4 dans une certaine configuration (c'est-à-dire avec certaines cases allumées et les autres non), et on demande chacun d'allumer toutes les lampes de sa grille. Il est important de donner une configuration initiale *valide*, c'est-à-dire pour laquelle il existe une solution. Ce point est abordé dans le paragraphe suivant.

On explique que le but n'est pas tant d'arriver à résoudre le jeu une fois que d'essayer de trouver une méthode (un algorithme) pour pouvoir résoudre le problème à tous les coups. On laisse donc les participants chercher des solutions en essayant de leur faire énoncer des principes qui pourraient aider à la solution. Pour des configurations complexes, il est fort possible que des participants arrivent à résoudre le jeu en ayant appuyé sur différentes cases plus ou moins au hasard, mais ne sachent pas reproduire leur solution, même à partir de la même configuration. Au fur et à mesure de la recherche, on explique certains principes pour terminer par donner un algorithme simple qui permet de trouver une solution quelle que soit la configuration initiale valide. On vérifie ensuite que tous les participants savent appliquer cet algorithme simple.

Enfin, on leur demande de trouver un algorithme pour éteindre toutes les cases plutôt que de toutes les allumer.

Choix de la configuration initiale. Toutes les configurations initiales n'admettent pas de solution.

En effet, considérons l'ensemble des bords qui ne sont pas des coins, à savoir A3, A2, B4, C4, B1, C1, D3 et D2 (les huit cases entourées en rouge pointillé dans la figure ci-contre). On peut remarquer qu'en appuyant sur n'importe quelle case de la grille, on change l'état de deux cases de cet ensemble. De ce fait, la parité du nombre de cases allumées dans cet ensemble ne change pas. Ainsi, en partant d'une situation initiale où il y a un nombre impair de cases allumées dans l'ensemble (comme dans la figure ci-contre), cela restera le cas, quelles que soient les cases sur lesquelles on appuie. Par conséquent, on ne pourra jamais allumer toutes les huit cases de cet ensemble.



Il faut donc prendre garde à fournir une configuration pour laquelle il existe une solution. Une manière simple pour ce faire est de prendre le jeu avec toutes les lumières allumées et de le "mélanger" en appuyant sur quelques cases au hasard. Pour proposer des configurations de plus en plus compliquées, on peut commencer par appuyer sur deux cases, puis trois, et ainsi de suite. Pour une configuration de complexité moyenne, on peut commencer avec la configuration où toutes les cases sont éteintes.

Quelques principes à faire émerger. Lors de la recherche de solutions, on peut essayer de faire émerger quelques principes simples.

(P1) **L'ordre dans lequel on appuie sur les cases n'importe pas.** En effet, le statut (allumée ou éteinte) d'une case à la fin dépend uniquement de son statut initial et du nombre fois où on a appuyé sur cette case ou une de ses cases voisines.

(P2) **Appuyer deux fois de suite sur une même case revient à ne rien faire.** Comme l'ordre n'importe pas, on peut supprimer toutes les paires d'appui sur des cases identiques. Ainsi, si il existe une solution, alors il existe une solution telle qu'on appuie au plus une fois sur chaque case. Avec le principe précédent cela implique directement le suivant.

(P3) **Une solution peut être décrite simplement par l'ensemble des cases sur lesquelles il faut appuyer une fois** (pour passer de la configuration initiale à celle où toutes les cases sont allumées). Voir Figure 2.

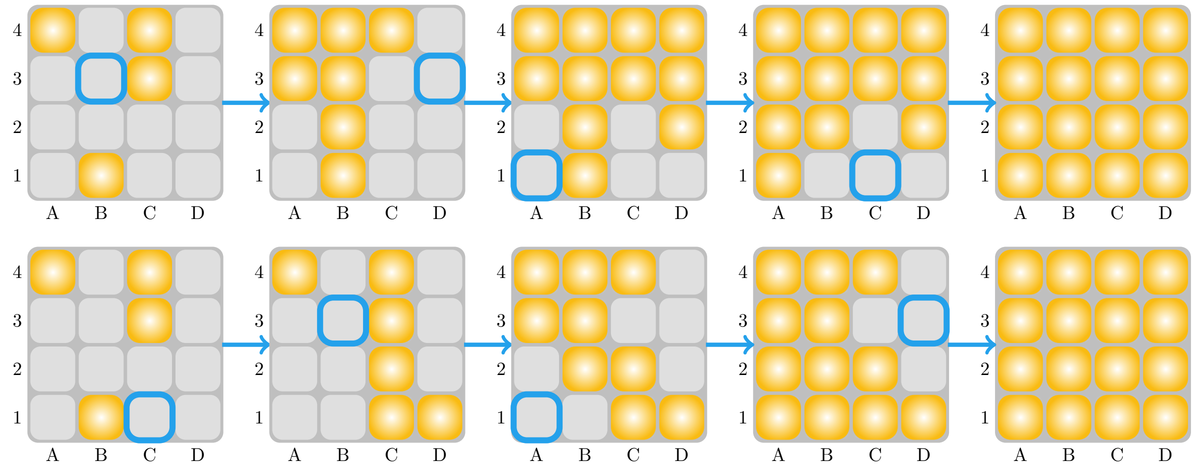


Figure 2 – Exemple d'une grille 4×4 avec les cases A4, B1, C3 et C4 initialement allumées. On peut allumer toutes les cases en appuyant sur les cases B3, D3, A1 et C1, que ce soit dans cet ordre comme sur la ligne du haut ou dans n'importe quel autre comme par exemple C1, B3, A1 et D3, sur la ligne du bas.

Vers la découverte d'une solution. D'après le principe (P3), trouver une solution revient à trouver un ensemble de cases sur lesquelles appuyées (dans l'ordre qu'on veut). Comme il y a seize cases à la grille 4×4, et que chaque ensemble peut contenir ou non chacune de ces cases, il y a $2^{16} = 65\ 536$ ensembles possibles. Cela fait beaucoup trop de possibilités pour les tester toutes.

Mais on peut cependant faire la remarque suivante. Une fois que les cases de la solution de la première ligne ont été choisies, celle de la deuxième ligne sont forcées. En effet, après avoir appuyé sur les cases de la solution sur la première ligne, regardons ce qui se passe pour les cases de la première ligne. Certaines d'entre elles sont éteintes, et la seule manière pour qu'elles finissent allumées est qu'on appuie sur les cases au-dessus d'elles. Ces dernières doivent donc faire partie de la solution. D'autres sont allumées, et la seule manière qu'elles restent allumées est qu'on n'appuie pas sur les cases au-dessus d'elles. Ces dernières ne doivent donc pas faire partie de la solution. On sait donc exactement quelles cases de la deuxième ligne doivent faire partie de la solution. Avec le même raisonnement, après avoir appuyé sur ces cases de la deuxième ligne, on sait quelles cases de la troisième ligne doivent faire partie de la solution. En faisant à nouveau le raisonnement, après avoir appuyé sur ces cases de la troisième ligne, sait quelles cases de la quatrième ligne doivent faire partie de la solution. Ainsi **une solution est entièrement déterminée par ses cases sur la première ligne.**

Prenons l'exemple de la Figure 3. Supposons qu'on parte de la configuration de la Figure 3 (i), et qu'on recherche une solution dont les cases de la première ligne sont B1 et C1. Après avoir appuyé sur les cases B1 et C1, on se retrouve dans la configuration de la Figure 3 (ii). Toutes les cases de la première ligne sont allumées sauf C1. Donc dans une solution contenant B1 et C1, il faut appuyer sur la case C2 et ne pas appuyer sur les autres cases de la deuxième ligne. Après avoir appuyé sur C2, on se trouve dans la configuration de la Figure 3 (iii). Toutes les cases de la deuxième ligne sont allumées sauf D2. Donc dans une solution contenant B1 et C1, il ne faut pas appuyer sur la case D3 et appuyer sur les autres cases de la troisième ligne. Après avoir appuyé surA3, B3 et C3, on se trouve dans la configuration de la Figure 3 (iv). Sur le troisième ligne, les cases 13 et C3 sont éteintes et les cases B3 et D3 sont allumées ; Donc dans une solution contenant B1 et C1, il faut appuyer sur les cases A4 et C4, et ne pas appuyer sur les cases B4 et D4.

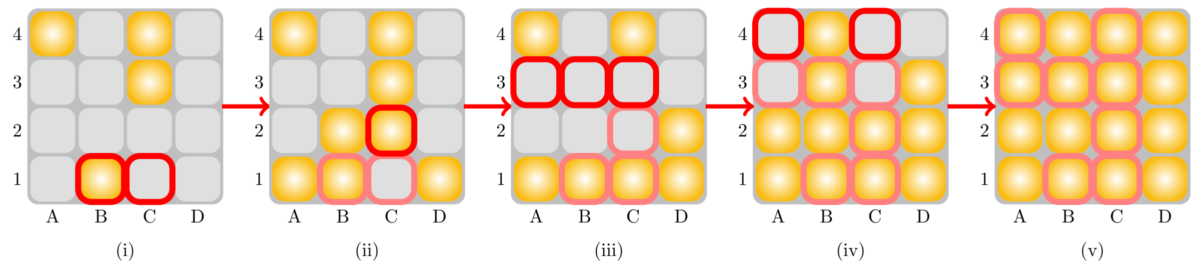


FIGURE 3 – Trouver l'unique solution contenant les cases B1 et C1.

Comme une solution est entièrement déterminée par ses cases sur la première ligne, on pourrait essayer tous les ensembles possibles de cases de la première ligne (comme il y a 4 cases, il y a $2^4 = 16$ tels ensembles) et voir si l'ensemble de cases correspondant est effectivement une solution. Par exemple, c'est le cas pour la solution ayant B1 et C1 comme cases de la première ligne, où toutes les cases sont allumées après avoir appuyé sur les cases comme on peut le voir sur la Figure 3 (v). En fait, un résultat d'algèbre linéaire, montre que dans le cas de la grille 4×4, n'importe quel ensemble de cases de la première ligne s'étend en une (unique) solution. Cela implique qu'il y a 16 ensembles solutions pour chaque configuration, une pour chaque sous-ensemble de cases de la première ligne. Cela implique notamment que pour trouver une solution, il suffit de choisir un ensemble de cases de la première ligne puis de l'étendre à toute la grille. En général, on prend pour ensemble de cases de la première ligne, l'ensemble vide qui ne contient aucune case. On se retrouve alors à effectuer l'algorithme "Chase la Lumière" décrit au paragraphe suivant.

Pour des grilles autres que la grille 4×4, il n'est pas vrai qu'il y a une solution pour tout sous-ensemble de cases de la première ligne. Il faut donc faire plusieurs essais jusqu'à trouver une solution.

Algorithme "Chasse La Lumière". L'algorithme "Chasse La Lumière" (ou Chasing Light en anglais) est l'algorithme qui consiste à chercher la solution pour laquelle on n'appuie sur aucun case de la première ligne. Les cases sur lesquelles appuyer de la deuxième, puis troisième et enfin quatrième ligne sont alors forcées, comme expliqué au paragraphe précédent. Il consiste ligne après ligne à regarder les cases qui ne sont pas allumées et à les allumées en appuyant sur la case au dessus. Formellement on a l'algorithme est suivant :

1. Pour toute abscisse X allant de A à D :
   – Si X1 est éteinte, alors appuyer sur X2 (la case au dessus) pour l'allumer.
2. Pour toute abscisse X allant de A à D :
   – Si X2 est éteinte, alors appuyer sur X3 (la case au dessus) pour l'allumer.
3. Pour toute abscisse X allant de A à D :
   – Si X3 est éteinte, alors appuyer sur X4 (la case au dessus) pour l'allumer.

Appliquons cet algorithme à la configuration de la Figure 4 (qui est la même que celle de la Figure 3-(i)). A l'étape 1, on voit que les cases A1, C1, et D1 sont éteintes et donc on appuie sur les cases A2, C2, et D2 pour les allumer. A l'étape 2, on voit que les cases B2, C2, et D2 sont éteintes et donc on appuie sur les cases B3, C3, et D3 pour les allumer. A l'étape 3, on voit que les cases A3 et B3 sont éteintes et donc on appuie sur les cases A4 et B4 pour les allumer.

Notons que l'algorithme "Chasse la lumière" rend une solution si la configuration de départ admet une solution. Si on l'applique à une configuration qui n'admet pas de solution, à la fin les

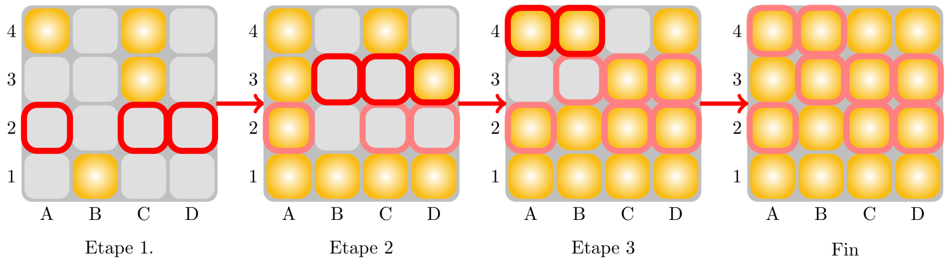


FIGURE 4 – Application de l'Algorithme “Chasse la Lumière”.

lumières ne sont pas toutes allumées. On peut donc utiliser l'algorithme ”Chassons la lumière” pour décider si une configuration admet une solution. On le lance sur la configuration. Si à la fin, toutes les cases sont allumées comme dans la Figure 4, alors la configuration admet une solution. Dans le cas contraire, comme dans la Figure 5, alors la configuration n'admet pas de solution.

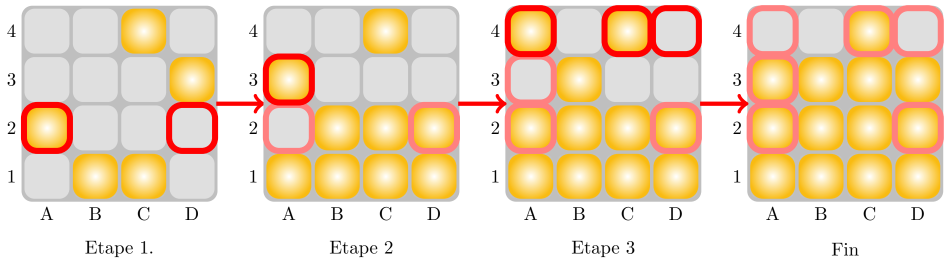


FIGURE 5 – Application de l'Algorithme “Chasse la Lumière” sur une configuration n'ayant pas de solution.

Eteindre toutes les cases. Plutôt que d'allumer toutes les cases, on peut demander d'éteindre toutes les cases. On est alors face au problème inverse, c'est-à-dire où les statuts d'éteint et d'allumé sont interverti. Pour le résoudre, on peut appliquer l'algorithme “Chasse la Lumière” modifié en inversant allumé et éteint. On obtient donc l'algorithme suivant.

1. Pour toute abscisse X allant de A à D :
   – Si X1 est allumée, alors appuyer sur X2 (la case au dessus) pour l'éteindre.
2. Pour toute abscisse X allant de A à D :
   – Si X2 est allumée, alors appuyer sur X3 (la case au dessus) pourl 'éteindre.
3. Pour toute abscisse X allant de A à D :
   – Si X3 est allumée, alors appuyer sur X4 (la case au dessus) pour l'éteindre.

Appliquons cet algorithme à la configuration de la Figure 6 (qui est la même que celle de la Figure 4). A l'étape 1, on voit que la cases B1 est allumée et donc on appuie sur les cases B2 pour l'éteindre. A l'étape 2, on voit que les cases A2, B2, et C2 sont allumées et donc on appuie sur les cases A3, B3, et C3 pour les éteindre. A l'étape 3, on voit que les cases C3 et D3 sont allumées et donc on appuie sur les cases C4 et D4 pour les éteindre.

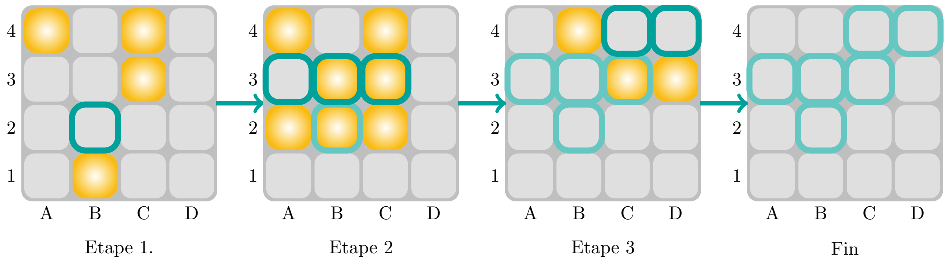


FIGURE 6 – Application de l'algorithme pour éteindre toutes les lumières.