TERRA NUMERICA

Fiche pédagogique

Activité : Devin de De Bruijn

Objectifs pédagogiques : Donner un exemple de codage en binaire.

Notions abordées : Codage binaire, graphe de décalage, cycle hamiltonien.

Matériel nécessaire : Jeu de 32 cartes (XXL si possible).

Niveau : A partir du cycle 3.

Déroulement : Le mathémagicien prend un jeu de 32 cartes préparé à l'avance dans l'ordre suivant :
7♡-8♡-V♡-8♢-V♣-9♢-R♣-D♢-V♠-9♠-D♣-10♢ -A♠-7♣-9♡-R♡-R♢-R♠−D♠-10♠-7♠-9♣-D♡-V♢-8♠-10♣-7♢-8♣-10♡-A♢-A♣-A♡.

Le 7 de cœur est ainsi la carte la plus haute quand le paquet est posé face cachée dessus.

Le mathémagicien demande à une ou plusieurs personnes de couper le jeu (mais surtout de pas le mélanger). Il distribue alors les cinq premières cartes du dessus du paquet à cinq personnes sans les voir et se propose de deviner alors les cinq cartes. Pour cela il demande à chaque personne de lui dire la couleur (rouge ou noire) de la carte et alors « Mathémagie ! », il devine succesivement la première carte puis les quatre autres.

Le mathémagicien recommence le tour plusieurs fois de suite. (Bien faire attention à remettre les cartes distribuées dans le bon ordre sur le dessus du paquet.)

Il explique ensuite le truc et fait faire le tour à l'audience : il tire les cartes sans les montrer à l'audience et leur demande de les trouver.

Le truc : Le truc est basé sur un codage en binaire des cartes. En effet, chaque carte, a été associée un nombre en binaire à cinq bits comme suit :

— Le premier bit représente la couleur de la carte : rouge = 0 et noir = 1.

— Le deuxième bit précise la couleur : 00=♡, 01=♢, 10=♣ et 11=♠.

— Les trois derniers bits codent la valeur de la carte : 000=As ; 001=7 ; 010=8 ; 011=9 ; 100=10 ; 101=valet ; 110 = dame ; 111= roi.

Ainsi le code de l'as de cœur est 00 000, 7♡ est codé par 00 001, ... , le roi de pique est codé 11 111.

Pour trouver la première carte, il suffit de connaitre ce code et d'avoir ranger les cartes dans l'ordre ci-dessous. En effet, cet ordre est tel que lorsqu'on retourne une carte et les quatre suivantes, les couleurs (rouge =0 et noir =1) de ces cinq cartes donnent le code de la première.

Par exemple, si après avoir coupé la carte du dessus est la D♣, les quatre suivantes sont 10♢, A♠, 7♣, 9♡. Les cinq couleurs annoncées sont donc "Noir, Rouge, Noir, Noir, Rouge", ce qui se traduit par 10 110, le code de la D♣.

On peut tout à fait s'arrêter là et ne faire que le tour dans sa version la plus simple où le mathémagicien ne devine qu'elle.

Pour trouver les autres cartes, une solution simple, mais fastidieuse consiste à apprendre par coeur l'ordre des cartes. Mais l'ordre donné en exemple possède une règle simple qui permet au mathémagicien de le trouver le codes des cartes suivantes sans avoir à apprendre cet ordre par coeur. En effet, si on a une carte codée $x_1x_2\ x_3x_4x_5$, avec les x_i valant 0 ou 1, alors la carte suivante dans l'ordre est codée $x_2x_3\ x_4x_5x_6$ avec $x_6 = x_1 + x_4$ (l'addition est faite en binaire $0+0=0$; $0+1=1+0=1$; $1+1=0$). Dans notre exemple où la première carte est D♣ codée $x_1x_2\ x_3x_4x_5 = 10\ 110$, la deuxième carte sera $x_2x_3\ x_4x_5x_6 = 01\ 10x_6$ avec $x_6 = x_1 + x_4 = 1 + 1 = 0$ soit 01 100. C'est donc bien le 10♢. La troisième carte sera 11 00x_7 avec $x_7 = x_2 + x_5 = 0 + 0 = 0$ soit 11 000, l'as de pique. Et ainsi de suite, on peut retrouver toutes cartes si on le souhaite.

Attention : Avec 32 cartes, cette règle ne fonctionne ni à l'As de trèfle codé 10 000, ni à l'As de cœur codé 00 000. En effet, l'ordre des cartes a été construit à partir d'un ordre vérifiant la règle sur les 31 cartes autres que l'As de cœur en ajoutant cette carte entre l'As de trèfle et le 7 de cœur. Au choix le mathémagicien pourra supprimer cette carte du jeu (l'audience ne le verra pas) pour pouvoir appliquer la règle sans exception, ou bien utiliser notre ordre avec toutes les cartes et se souvenir s'il découvre l'As de trèfle que la carte suivante est l'As de cœur et s'il découvre l'As de cœur que la carte suivante est le 7 de cœur.

La construction d'un ordre pour faire le tour est une chose qui s'explique à un public de niveau lycée. Pour que le tour marche, l'ordre doit vérifier les égalités suivantes quel que soit l'endroit où on a coupé :
1e bit (couleur) de la 2e carte = 2e bit de la 1e carte.
1e bit (couleur) de la 3e carte = 3e bit de la 1e carte.
1e bit (couleur) de la 4e carte = 4e bit de la 1e carte.
1e bit (couleur) de la 5e carte = 5e bit de la 1e carte.

Le rangement des 32 cartes correspond à un cycle hamiltonien [1], c'est-à-dire un cycle qui passe une fois et une seule par chaque sommet, dans le graphe de de Bruijn dessiné Figure 1. Ce dernier est un graphe à décalage. Ses sommets sont les 32 codes binaires de 00 000 à 11 111, et de chaque sommet $x_1x_2\ x_3x_4x_5$ partent deux arcs vers les sommets $x_2x_3\ x_4x_5 0$ et $x_2x_3\ x_4x_5 1$) : on décale les chiffres vers la gauche (perdant le x_1) et on rajoute un 0 ou un 1 à droite. Il existe de nombreux cycles hamiltoniens dans le graphe de de Bruijn. N'importe lequel d'entre eux donne un ordre et permet de faire le tour de magie, en mémorisant l'ordre des sommets le long de cycle. Celui donné en exemple, qui a une règle simple pour trouver le sommet (la carte) suivant dans l'ordre, est représenté par des arcs bleus sur la Figure 1.

Remarque : il existe plusieurs manières de coder les cartes. On aurait pu par exemple décider que que 00=♢, 01=♡, 10=♣ et 11=♠ et que 000=7 ; 001=8 ; 010=9 ; 011=10 ; 100=valet ; 101=dame ; 110 = roi ; 111= as.

On aurait alors pour cycle hamiltonien 8♢-9♢-D♢-9♡-D♣-10♡-A♣-R♡-D♠-10♠-R♣-V♡ -7♠-8♣-10♢-A♢-A♡-A♠–R♠-V♠-8♠-10♣-R♢-D♡-9♠-V♣-8♡-9♣-V♢-7♡-7♣-(7♢).

Point historique : Les graphes de de Bruijn sont appelés ainsi en référence au mathématicien néerlandais Nicolas Govers de Bruijn (1918–2012) qui a écrit un article sur le sujet en 1946. En fait, il s'intéressait aux suites circulaires de longueur 2^k telles que toute sous-suite de longueur k apparaisse exactement une fois et une seule. Dans le cas $k = 5$, on a 32 sous-suites $x_i, x_{i+1}x_{i+2}x_{i+3}x_{i+4}$ avec i valant $1, \ldots 32$ (les indices étant pris modulo 32 ; ainsi la

1. Le nom de cycle hamiltonien vient d'un puzzle inventé par Sir William Rowan Hamilton (l'inventeur des quaternions) en 1859. Ce jeu consistait en un dodécaèdre dont les 20 sommets étaient étiquetés par le nom d'une ville. Le but du jeu était de trouver un chemin passant une seule fois par chaque ville et revenant à la ville de départ (voir https://www.puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm). Personne encore aujourd'hui ne sait s'il existe un algorithme rapide (en temps polynomial en la taille du graphe) pour déterminer sin un graphe donné en entrée à un cycle hamiltonien. Sa résolution permettrait de remporter le prestigieux prix Clay et, accessoirement, un million de dollars.

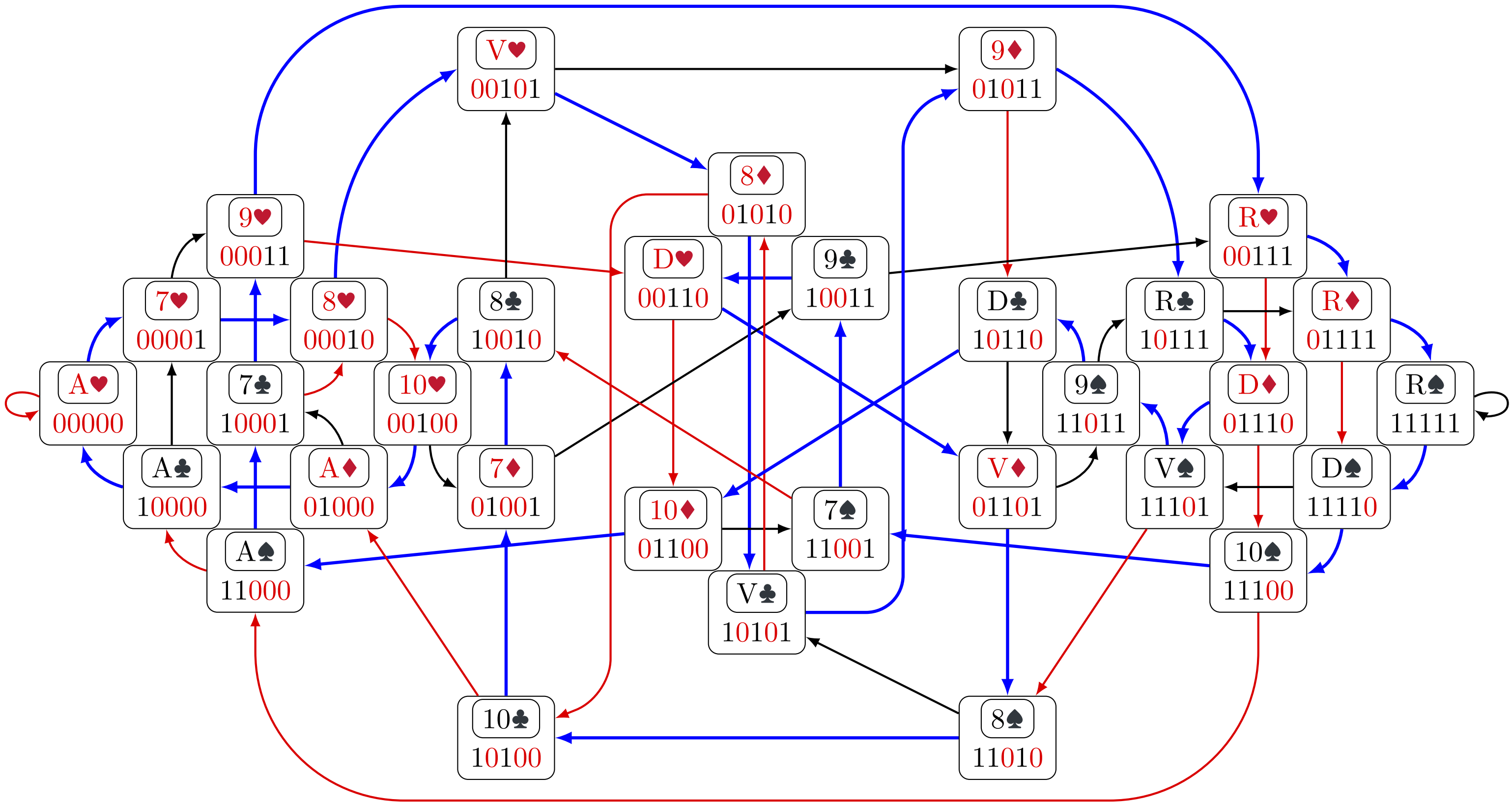

FIGURE 1 – Le graphe de de Bruijn à 32 sommets

sous-suite commençant à l'indice 32 s'écrit $x_{32}, x_1, x_2, x_3, x_4$). Une telle suite est associée à un cycle hamiltonien du graphe de de Bruijn les sous-suites de longueur 5 correspondant aux sommets du graphe. Celle de l'exemple est 00001010111011000111110011010010.

De telles suites et les graphes associés ont été découverts ou redécouverts de nombreuses fois par exemple par le mathématicien Irvin J.Good la même année que Nicolaas Govert de Bruijn et les graphes sont aussi appelés "good graphs". En fait en 1894, A. de Rivière posait la question de l'existence d'une suite de de Bruijn binaire dans le journal L'Intermédiaire des Mathématiciens, un journal de mathématiques pour amateurs éclairés, et Camille Flye Sainte-Marie résolvait le problème la même année en construisant le graphe associé. Il semble que les habitants de l'Inde connaissaient déja ces suites il y a plusieurs millénaires et les utilisait pour trouver des beaux rythmes de tambour le 0 correspondant à un coup bref et le 1 à un coup long.

Poursuivre avec des élèves : Pour chacun de ces codages binaires des 32 cartes, il peut être intéressant de faire construire aux élèves le tour Devin binaire avec des cartes à jouer.

On peut demander aux élèves de construire le tour analogue avec un jeu de 8 cartes utilisant 2 couleurs, par exemple, les valets, dames, rois et as de carreau et de pique. Le mathémagicien demandera alors de retourner uniquement 3 cartes pour les deviner.

Pour cela, ils devront coder les cartes avec 3 bits, le premier représentant la couleur de la carte (rouge = 0 et noir = 1) et les deux derniers bits représentant la valeur de la carte (par exemple 01 = valet ; 10 = dame ; 11 = roi ; 00 = as).

Ils devront ensuite construire de graphe de de Bruijn à 8 sommets (voir Figure 2) puis trouver un cycle hamiltonien.

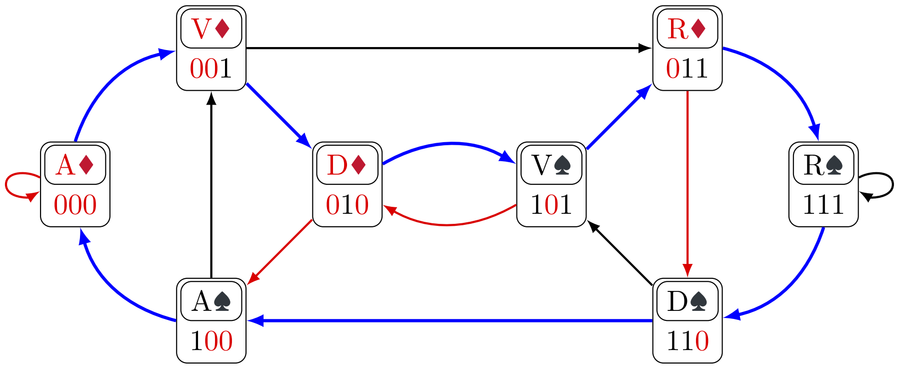

Figure 2 – Le graphe de de Bruijn à 8 sommets

Il y a deux cycles hamiltoniens dans ce graphe (qui sont symétriques). Le premier, représenté en bleu sur la Figure 2, est A♢-V♢-D♢-V♠-R♢-R♠-D♠-A♠. Le second est A♢-V♢-R♢-R♠-D♠-V♠-D♢-A♠.