

Fiche pédagogique

Activité : Le grand Majus

Objectifs pédagogiques : Maîtriser le passage de binaire en décimal et le passage inverse. Comprendre comment les ordinateurs échangent des données entre eux.

Notions abordées : Codage binaire, traduction binaire-décimal, traduction décimal-binaire.

Matériel nécessaire : Une ardoise ou une affiche avec 32 ou 64 images et une photocopie de cette affiche (un kakemono du Devin binaire peut aussi être utilisé) suivant la formule choisie.

Niveau : A partir du cycle 3.

Déroulement : Deux mathémagiciens : un animateur et un mage.

Le mage est dans une autre pièce. L'animateur demande à une personne d'écrire un chiffre entre 0 et 63 sur une ardoise ou de montrer une image parmi une liste de 64 images (sans que le mage puisse voir). Il montre ce nombre ou cette image à tout le public. On fait ensuite entrer le mage qui devine le nombre ou l'image choisie en faisant croire que c'est l'animateur qui lui transmet par la pensée.

Après avoir effectué ce tour deux ou trois fois, les mathémagiciens et le mage expliquent au public comment l'animateur a transmis au mage l'information permettant d'identifier le nombre ou l'image à l'aide d'un code binaire.

Le truc : Evidemment, l'animateur ne transmet pas le nombre par la pensée mais en lui transmettant de manière discrète le code binaire du nombre (ou du nombre correspondant à la position de l'image dans la liste présentée).

Rappelons rapidement comment fonctionnent le système décimal et le système binaire.

- Le système décimal est un système de numération basé sur dix chiffres, 0, 1, 2, 3, ..., 9. Chaque position dans un nombre binaire représente une puissance de 10 de manière croissante en partant de la droite : la position la plus à droite est $10^0 = 1$, les unités ; la suivante est $10^1 = 10$, les dizaines, celle d'après $10^2 = 100$, les centaines ; et ainsi de suite ...
- Le binaire est un système de numération basé sur deux chiffres, 0 et 1. Chaque position (bit) dans un nombre binaire représente une puissance de 2 de manière croissante en partant de la droite : la position la plus à droite est $2^0 = 1$, les unités ; la suivante est $2^1 = 2$, les « deuzaines », celle d'après $2^2 = 4$, les « quatraines » ; et ainsi de suite ...

Le codage binaire des nombres de 0 à 63 est donné Table ??.

L'animateur communique donc au mage le codage binaire du nombre. Pour cela, il y a plusieurs possibilités sur lesquelles l'animateur et le mage s'accorde au préalable.

- L'animateur peut par exemple transmettre le codage avec ses doigts. On peut par exemple utiliser l'annulaire, le majeur et l'index de chaque doigt et chacun des six doigts représentent un des bits de l'écriture en binaire du nombre : l'index gauche vaut 32, le majeur gauche 16,

0	1	2	3	4	5	6	7
000000	000001	000010	000011	000100	000101	000110	000111
8	9	10	11	12	13	14	15
001000	001001	001010	001011	001100	001101	001110	001111
16	17	18	19	20	21	22	23
010000	010001	010010	010011	010100	010101	010110	010111
24	25	26	27	28	29	30	31
011000	011001	011010	011011	011100	011101	011110	011111
32	33	34	35	36	37	38	39
100000	100001	100010	100011	100100	100101	100110	100111
40	41	42	43	44	45	46	47
101000	101001	101010	101011	101100	101101	101110	101111
48	49	50	51	52	53	54	55
110000	110001	110010	110011	110100	110101	110110	110111
56	57	58	59	60	61	62	63
111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110	111111

TABLE 1 – Codage binaire des nombres 0 à 63.

l’annulaire gauche 8, l’annulaire droit 4, le majeur droit 2 et l’index droit 1. L’animateur laisse un doigt visible par le mage si le bit correspondant est 1 et le cache du mage (en le pliant ou en le cachant derrière l’ardoise) si le bit correspondant est 0.

- L’animateur peut aussi dialoguer avec le mage en y insérant le code. Par exemple, chacune des phrases de l’animateur peut commencer ou finir par « Grand Majus ». Si elle commence par « Grand Majus », le bit correspondant dans l’écriture en binaire est un 1 ; si elle finit par « Grand Majus », le bit correspondant dans l’écriture en binaire est un 0.

Si le nombre a deviné est 22 qui s’écrit 010110 en binaire, l’animateur peut dire les six phrases suivantes

- Etes-vous là Grand Majus ?
- Grand Majus, vous m’entendez bien ?
- Etes vous prêt Grand Majus ?
- Grand Majus, connectez vous à mon esprit.
- Grand Majus, je pense au nombre.
- Pouvez-vous nous dire à quel nombre j’ai pensé Grand Majus ?

Afin de coder ou décoder, l’animateur et le mage pourraient apprendre par cœur la table???. Mais cela serait long et fastidieux, et ne pourrait pas se généraliser à des nombres plus grands. Le mieux est d’apprendre à coder et décoder les nombres en binaire. Pour cela les algorithmes sont simples.

Le plus simple est celui du décodage. Pour cela le mage regarde le code binaire qu’il a reçu et en déduit le nombre en multipliant chaque bit par la valeur de la position. Ainsi on multiplie le chiffre des unités par 1, celui des dizaines par 2, celui des centaines par 4, etc (de même qu’en décimal on multiplie le chiffre des unités par 1, celui des dizaines par 10, celui des centaines par 100, etc). Par exemple, si le mage a reçu le code 010110, il trouve le nombre correspondant en faisant le calcul $0 \times 32 + 1 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 22$. Une manière simple de faire ce calcul est de regarder les bits qui sont à 1 et d’ajouter les valeurs des positions correspondantes. Cela peut se faire en écrivant le nombre dans un tableau comme ci-dessous.



nombre en binaire	0	1	0	1	1	0
valeur des bits	32	16	8	4	2	1

On voit qu'il y a des 1 pour les positions de valeurs 16, 4 et 2. On fait donc $16 + 4 + 2 = 22$.

Le décodage est à peine plus compliqué. Pour coder un nombre en binaire, il faut considérer les valeurs des bits les unes après les autres dans l'ordre décroissant et pour chacune des valeurs voir si le reste du nombre (au départ le reste est le nombre lui-même) est au moins aussi grand que la valeur considérée. Si oui, on marque 1 au bit de la valeur, et on ôte la valeur au reste du nombre ; si non, on marque 0 au bit de la valeur. On passe ensuite à la valeur suivante.

Par exemple, regardons comment coder 22.

- On regarde d'abord la valeur 32. 22 étant plus petit que 32, on marque 0 pour le bit de poids 32 et on passe à la valeur suivante. ‘
- On regarde ensuite la valeur 16. 22 étant au moins aussi grand que 16, on marque 1 pour le bit de poids 16, on ôte 16 au reste qui devient $22 - 16 = 6$ et on passe à la valeur suivante.
- On regarde ensuite la valeur 8. 6 étant plus petit que 8, on marque 0 pour le bit de poids 8 et on passe à la valeur suivante. ‘
- On regarde ensuite la valeur 4. 6 étant au moins aussi grand que 4, on marque 1 pour le bit de poids 4, on ôte 4 au reste qui devient $6 - 4 = 2$ et on passe à la valeur suivante.
- On regarde ensuite la valeur 2. 2 étant au moins aussi grand que 2, on marque 1 pour le bit de poids 2, on ôte 2 au reste qui devient $2 - 2 = 0$ et on passe à la valeur suivante.
- On regarde enfin la valeur 1. 0 étant plus petit que 1, on marque 0 pour le bit de poids 1 et on s'arrête car 1 est la plus petite valeur..

Ainsi on obtient le codage 010110 pour 22.