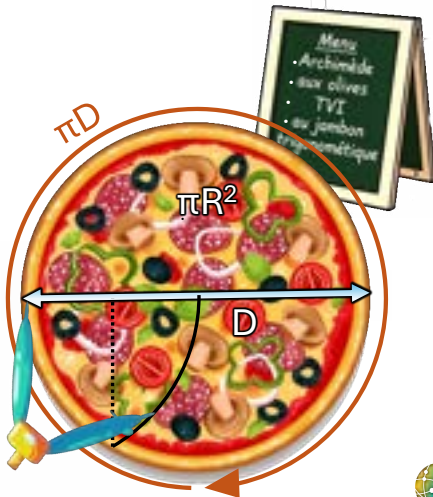
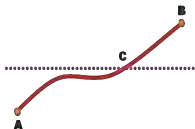
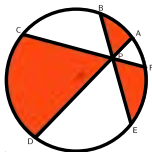


Les Mathématiques de la Pizza

$\pi R^2 a$



Frédéric
HAVET



Institut
Esope 21



TERRA
NUMERICA

Une grande pizza ou deux moyennes ?

On vous propose une grande pizza de 44 cm de diamètre ou deux moyennes de 30 cm de diamètre.



Laquelle choisissez-vous ?

Une grande pizza ou deux moyennes ?

On vous propose une grande pizza de 44 cm de diamètre ou deux moyennes de 30 cm de diamètre.



Laquelle choisissez-vous ?

Aire : Grande pizza
 $\pi \times 22^2 = \pi \times \mathbf{484}$

Deux pizzas moyennes
 $2 \times \pi \times 15^2 = \pi \times \mathbf{450}$

Une grande pizza ou deux moyennes ?

On vous propose une grande pizza de 44 cm de diamètre ou deux moyennes de 30 cm de diamètre.



Laquelle choisissez-vous ?

Aire : Grande pizza
 $\pi \times 22^2 = \pi \times \mathbf{484}$

Deux pizzas moyennes
 $2 \times \pi \times 15^2 = \pi \times \mathbf{450}$

Et pour la croûte ?

Une grande pizza ou deux moyennes ?

On vous propose une grande pizza de 44 cm de diamètre ou deux moyennes de 30 cm de diamètre.



Laquelle choisissez-vous ?

Aire : Grande pizza
 $\pi \times 22^2 = \pi \times \mathbf{484}$

Deux pizzas moyennes
 $2 \times \pi \times 15^2 = \pi \times \mathbf{450}$

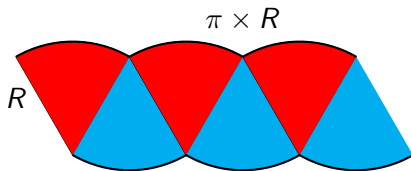
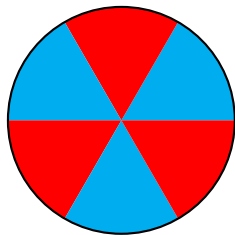
Et pour la croûte ?

Périmètre : $\pi \times \mathbf{44}$

$2 \times \pi \times 30 = \pi \times \mathbf{60}$

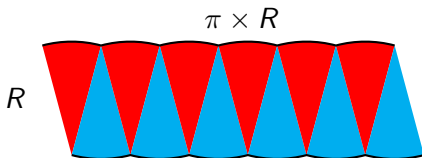
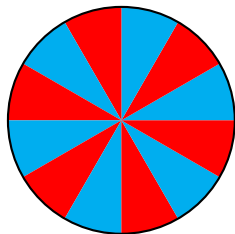
Aire d'une pizza

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$



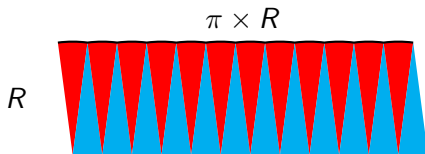
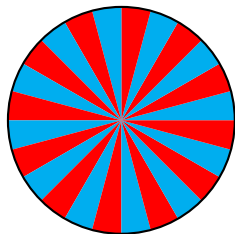
Aire d'une pizza

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$



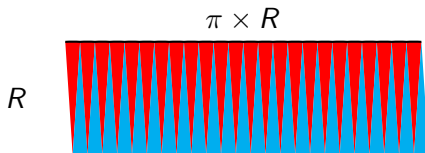
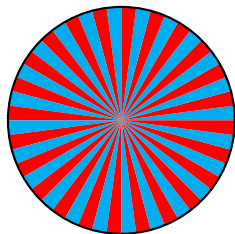
Aire d'une pizza

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$



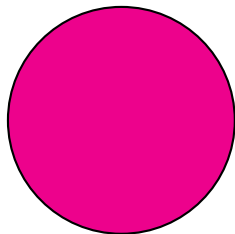
Aire d'une pizza

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$



Aire d'une pizza

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$



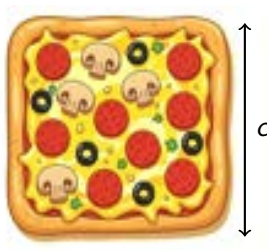
R

$\pi \times R$



Minimiser la croûte

Une pizza circulaire et une carrée de même aire. Quelle est celle qui a le moins de croûte ?

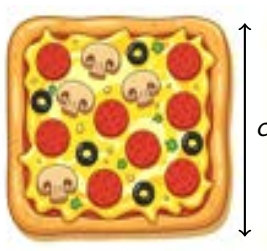


$$\pi r^2 = \text{Aire} = c^2$$

$$\sqrt{\pi} r = c$$

Minimiser la croûte

Une pizza circulaire et une carrée de même aire. Quelle est celle qui a le moins de croûte ?



$$\pi r^2 = \text{Aire} = c^2$$

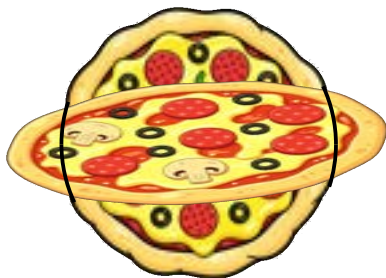
$$\sqrt{\pi} r = c$$

$$2\pi r \simeq \mathbf{6,28r} \quad \text{Périmètre} \quad 4c = 4\sqrt{\pi} r \simeq \mathbf{7,09r}$$

Inégalité isopérimétrique

De toutes les pizzas qui ont la même aire, celle qui a le moins de croûte est la circulaire.

De toutes les pizzas ayant autant de croûte, celle de plus grande aire est la circulaire.



Couper une pizza en parts de même aire

en 2



Couper une pizza en parts de même aire

en 4



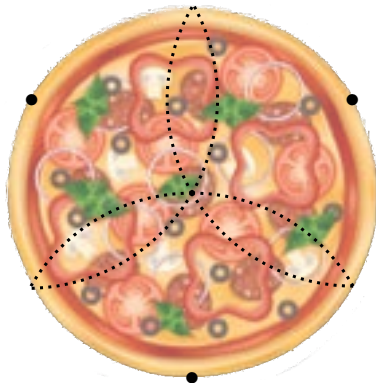
Couper une pizza en parts de même aire

en 8



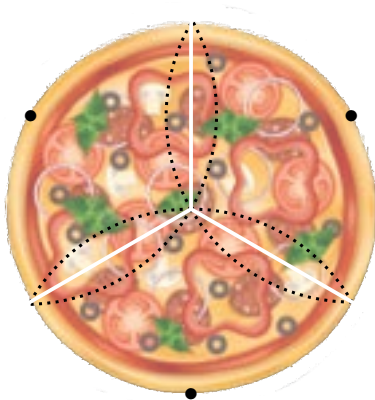
Couper une pizza en parts de même aire

en 3



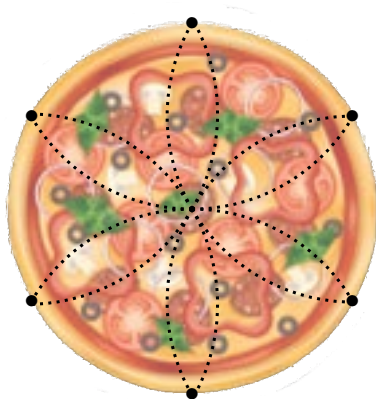
Couper une pizza en parts de même aire

en 3



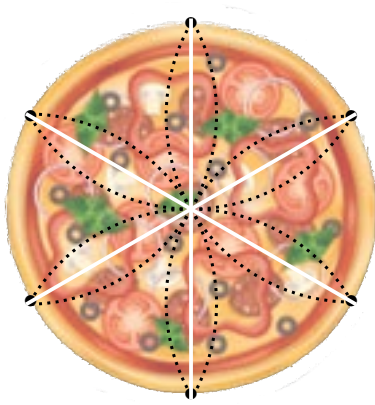
Couper une pizza en parts de même aire

en 6



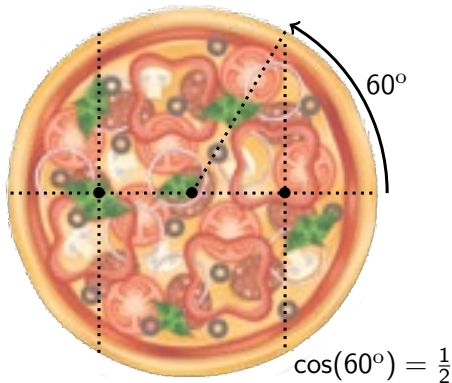
Couper une pizza en parts de même aire

en 6



Couper une pizza en parts de même aire

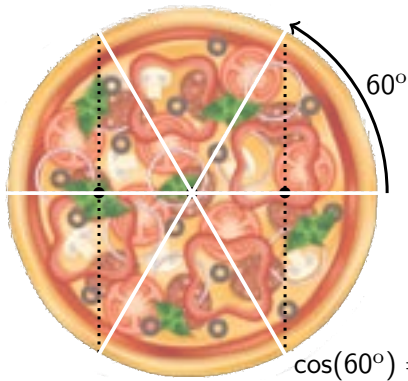
en 3 ou en 6



sans compas

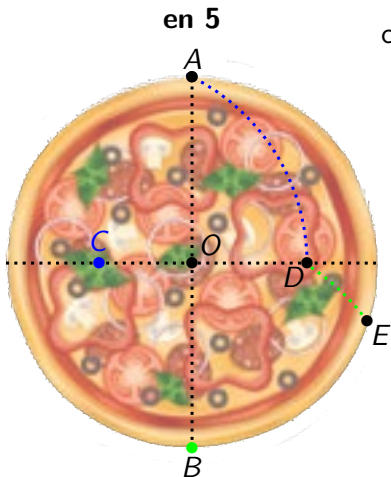
Couper une pizza en parts de même aire

en 3 ou en 6



sans compas

Couper une pizza en parts de même aire



côté d'un pentagone régulier

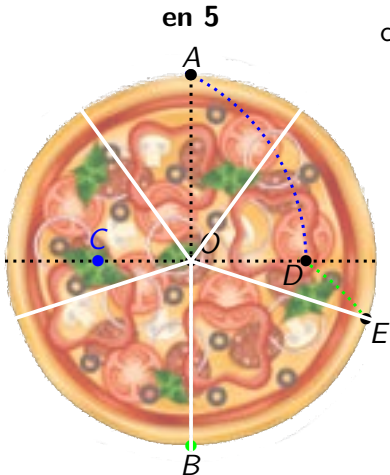
$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} R$$

$$OC = \frac{1}{2} R$$

$$CA = CD = \frac{\sqrt{5}}{2} R$$

$$BD = BE = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} R$$

Couper une pizza en parts de même aire



côté d'un pentagone régulier

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}R$$

$$OC = \frac{1}{2}R$$

$$CA = CD = \frac{\sqrt{5}}{2} R$$

$$BD = BE = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} R$$

Couper une pizza en 7 parts de même aire



C. F. Gauss (1777–1855)

IMPOSSIBLE



P. L. Wantzel (1814–1848)

Théorème de Gauss–Wantzel

On peut partager une pizza en n **parts égales** si et seulement si n est le **produit d'une puissance de 2** et de **nombre premiers de Fermat distincts**.

Nombre de Fermat : $F_k = 2^{2^k} + 1$.

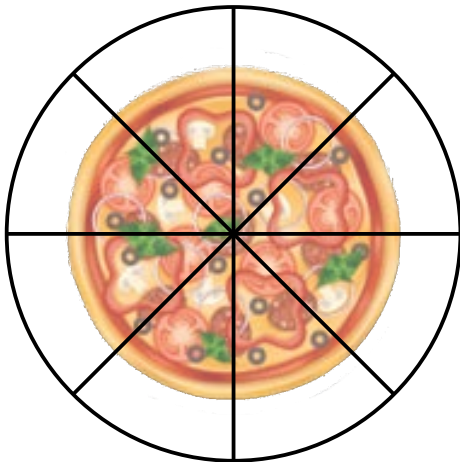
$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ sont premiers.

7, 11, 13 pas de Fermat $\Rightarrow$ impossible. $9 = 3 \times 3 \Rightarrow$ impossible.

F_5 à F_{32} sont non premiers.

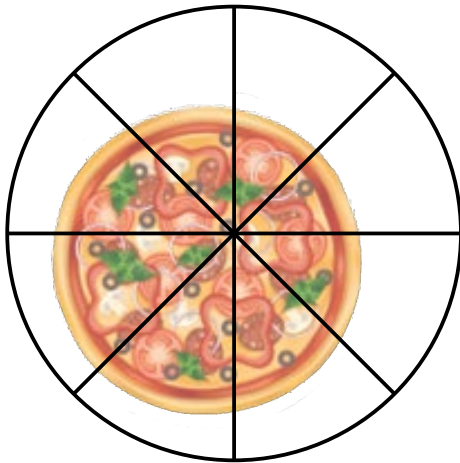
$F_{33} ??$

Partage après découpe avec un coupe-pizza



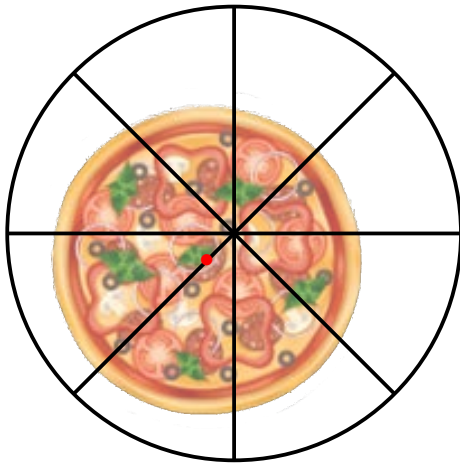
Partage après découpe avec un coupe-pizza

Le coupe-pizza n'est pas forcément bien centré.



Partage après découpe avec un coupe-pizza

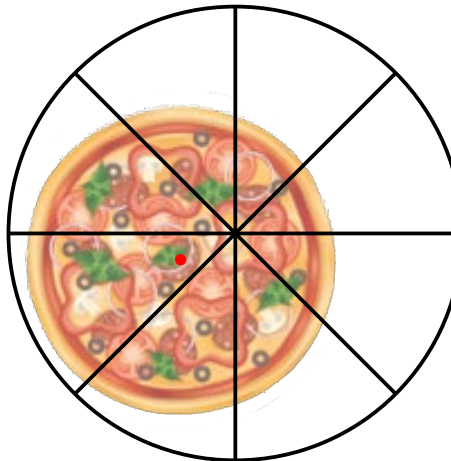
Le coupe-pizza n'est pas forcément bien centré.
Si une coupe passe par le centre, on a deux moitiés.



Partage après découpe avec un coupe-pizza

Le coupe-pizza n'est pas forcément bien centré.

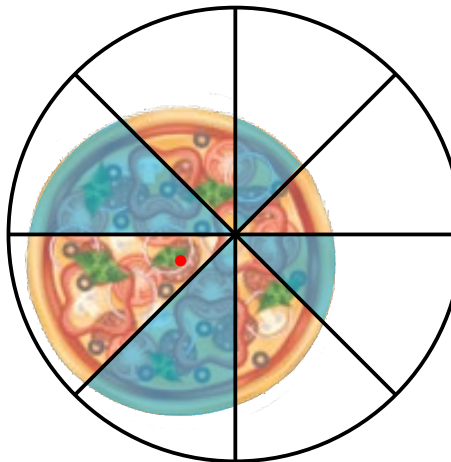
Si aucune coupe ne passe par le centre,



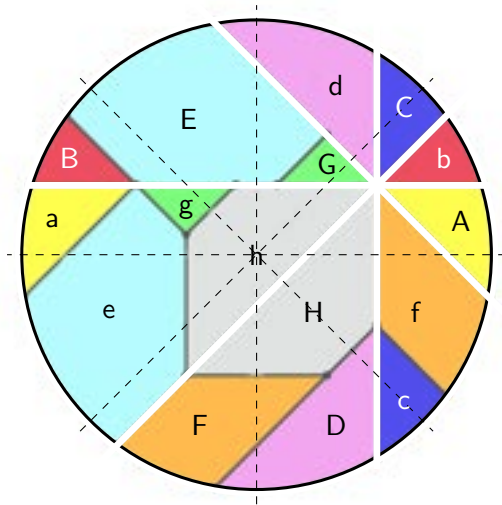
Partage après découpe avec un coupe-pizza

Le coupe-pizza n'est pas forcément bien centré.

Si aucune coupe ne passe par le centre, les aires des parts paires est égales à celle des parts impaires.



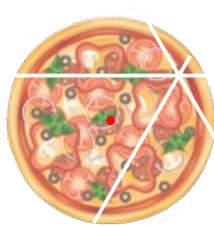
Partage après découpe avec un coupe-pizza



Théorème de la pizza

On coupe une pizza en $2n$ parts avec un coupe-pizza centré en un point P . Parts numérotées 1 à $2n$ avec 1 la part contenant le centre de la pizza.

- ▶ Si $n \geq 4$ est pair, alors
 $\text{Aire}(\text{parts impaires}) = \text{Aire}(\text{parts paires})$.
- ▶ Si $n = 1$, $n = 2$, ou si $n \equiv 3[4]$, alors
 $\text{Aire}(\text{parts impaires}) \geq \text{Aire}(\text{parts paires})$.
- ▶ Si $n \equiv 1[4]$, $n \geq 5$ alors
 $\text{Aire}(\text{parts impaires}) \leq \text{Aire}(\text{parts paires})$.



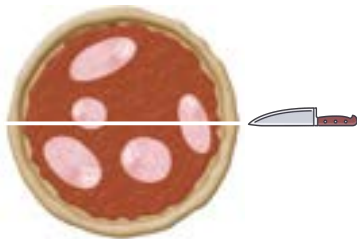
Couper en deux moitiés ayant autant de jambon

Peut-on couper la pizza en deux moitiés ayant autant de jambon l'une que l'autre ?



Couper en deux moitiés ayant autant de jambon

Peut-on couper la pizza en deux moitiés ayant autant de jambon l'une que l'autre ?



Plus de jambon en bas

Couper en deux moitiés ayant autant de jambon

Peut-on couper la pizza en deux moitiés ayant autant de jambon l'une que l'autre ?



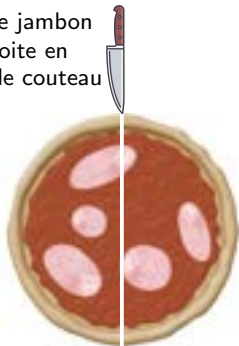
Plus de
jambon
à gauche



Couper en deux moitiés ayant autant de jambon

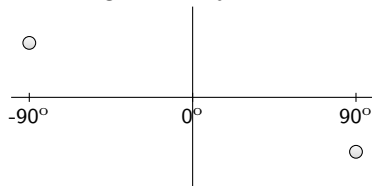
Peut-on couper la pizza en deux moitiés ayant autant de jambon l'une que l'autre ?

Plus de jambon
à droite en
tenant le couteau



Plus de jambon
à gauche en
tenant le couteau

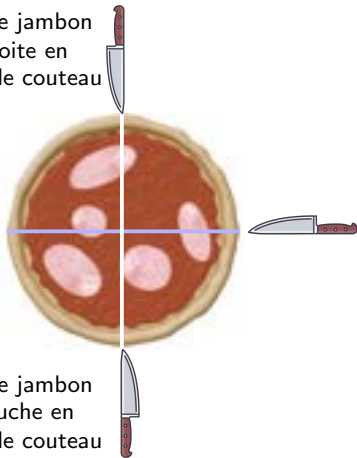
jambon à gauche — jambon à droite



Couper en deux moitiés ayant autant de jambon

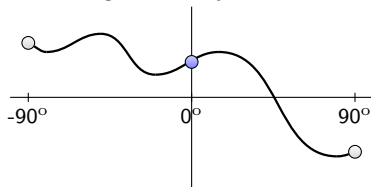
Peut-on couper la pizza en deux moitiés ayant autant de jambon l'une que l'autre ?

Plus de jambon
à droite en
tenant le couteau



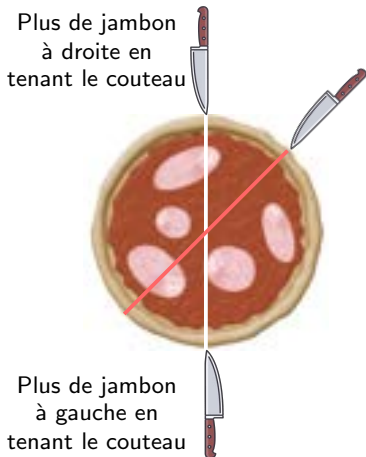
Plus de jambon
à gauche en
tenant le couteau

jambon à gauche — jambon à droite

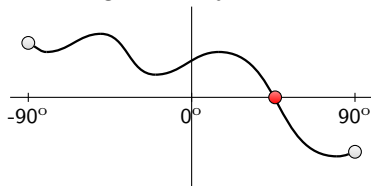


Couper en deux moitiés ayant autant de jambon

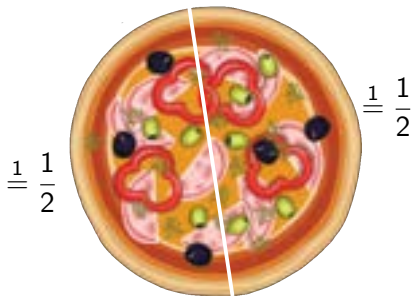
Peut-on couper la pizza en deux moitiés ayant autant de jambon l'une que l'autre ?



jambon à gauche — jambon à droite



Partage équitable à 2



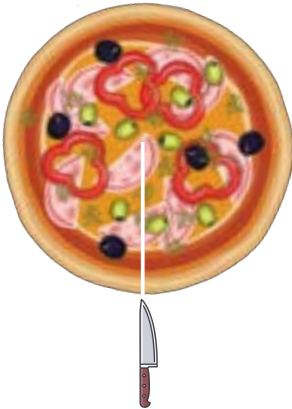
“Je coupe et tu choisis.”

Le premier coupe en deux parties de valeur égale selon lui.

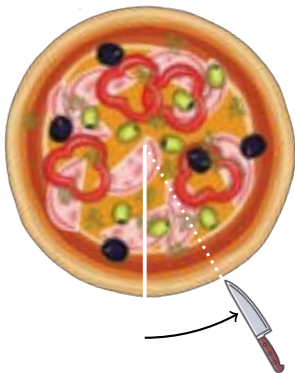
Le second prend la part qu’il préfère.

Partage à 3 : méthode du couteau tournant

1. Faire une première coupe.

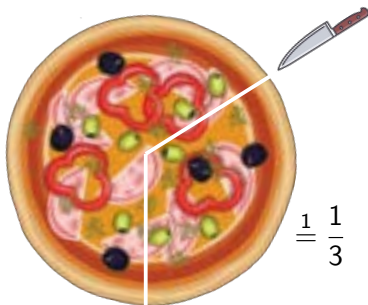


Partage à 3 : méthode du couteau tournant



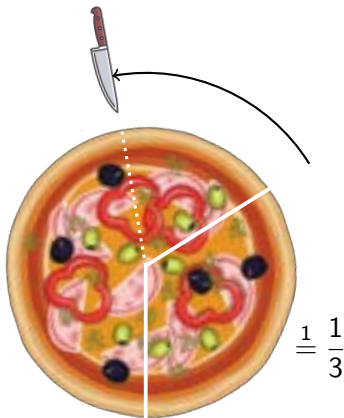
1. Faire une première coupe.
2. Faire tourner le couteau.

Partage à 3 : méthode du couteau tournant



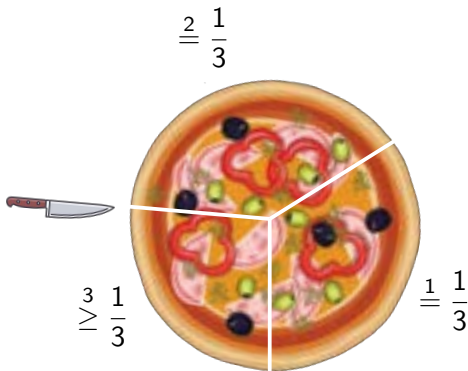
1. Faire une première coupe.
2. Faire tourner le couteau.
3. S'arrêter quand quelqu'un réclame la part.

Partage à 3 : méthode du couteau tournant



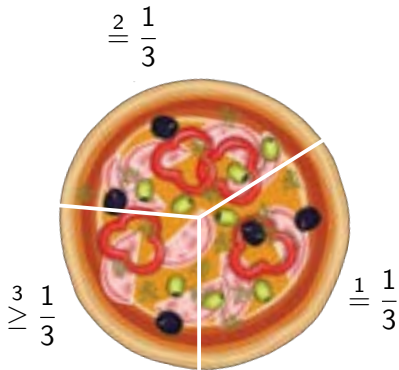
1. Faire une première coupe.
2. Faire tourner le couteau.
3. S'arrêter quand quelqu'un réclame la part.
4. Continuer à faire tourner le couteau.

Partage à 3 : méthode du couteau tournant



1. Faire une première coupe.
2. Faire tourner le couteau.
3. S'arrêter quand quelqu'un réclame la part.
4. Continuer à faire tourner le couteau.
5. S'arrêter quand un deuxième réclame la part.

Partage à 3 : méthode du couteau tournant



Les 3 convives ont au moins $1/3$ selon leur mesure.

Mais **jalousie possible**.

Exemple : Si mesure du convive 1 est le nombre d'olives vertes, il préférerait la part du convive 2.

Partage sans jalousie à 3

Algorithme de Selfridge-Conway

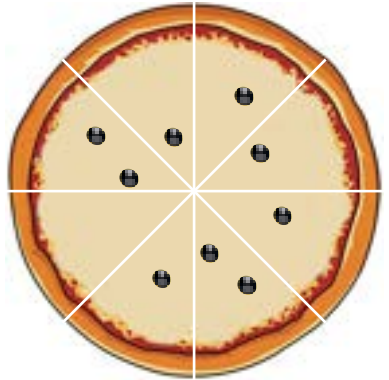
- ▶ Alice coupe en trois : $X \stackrel{A}{=} Y \stackrel{A}{=} Z$. $X \stackrel{B}{\geq} Y \stackrel{B}{\geq} Z$.
- ▶ Bob coupe X en X_1 et X_2 de telle sorte que $X_1 \stackrel{B}{=} Y$.
- ▶ Parmi X_1 , Y et Z ,
 - Carl choisit le plus grand.
 - Bob prend X_1 si Carl ne l'a pas pris, sinon Y .
 - Alice prend le morceau qui reste (Y ou Z).
- ▶ Division de X_2 . parmi Bob et Carl : Preneur a pris X_1 et Coupeur l'autre.
 - Coupeur découpe X_2 en trois morceaux égaux.
 - Choix d'un morceau de X_2 dans l'ordre Preneur, Alice, Coupeur.

A la fin, chacun estime qu'aucun des autres n'a reçu plus que lui.

Manger le plus d'olives sans être impoli

Alice et Bob, une pizza
découpée.

Chacun essaye de récupérer le
plus d'olives.

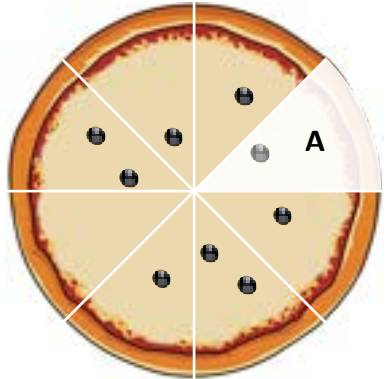


Manger le plus d'olives sans être impoli

Alice et Bob, une pizza découpée.

Alice prend une part.

Chacun essaye de récupérer le plus d'olives.



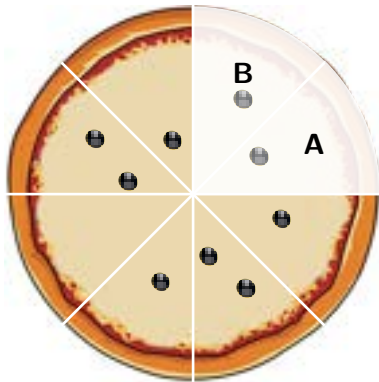
Manger le plus d'olives sans être impoli

Alice et Bob, une pizza découpée.

Alice prend une part.

Ensuite chacun à son tour, prend une des deux parts autour du trou.

Chacun essaye de récupérer le plus d'olives.



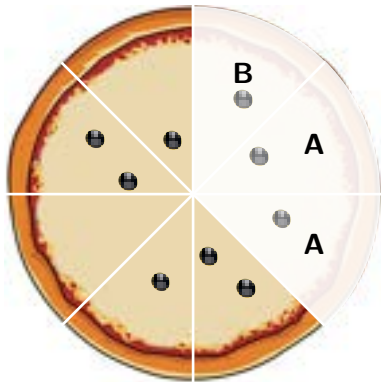
Manger le plus d'olives sans être impoli

Alice et Bob, une pizza découpée.

Alice prend une part.

Ensuite chacun à son tour, prend une des deux parts autour du trou.

Chacun essaye de récupérer le plus d'olives.



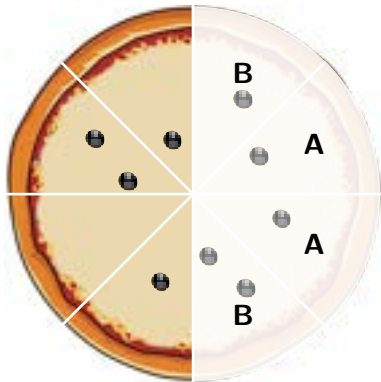
Manger le plus d'olives sans être impoli

Alice et Bob, une pizza découpée.

Alice prend une part.

Ensuite chacun à son tour, prend une des deux parts autour du trou.

Chacun essaye de récupérer le plus d'olives.



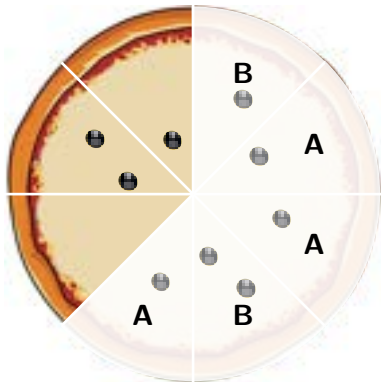
Manger le plus d'olives sans être impoli

Alice et Bob, une pizza découpée.

Alice prend une part.

Ensuite chacun à son tour, prend une des deux parts autour du trou.

Chacun essaye de récupérer le plus d'olives.



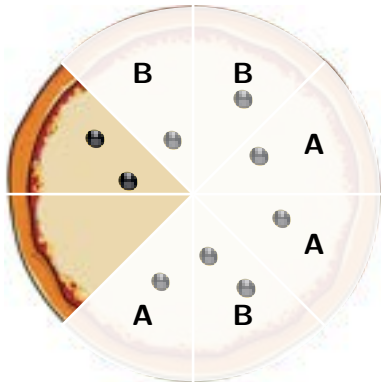
Manger le plus d'olives sans être impoli

Alice et Bob, une pizza découpée.

Alice prend une part.

Ensuite chacun à son tour, prend une des deux parts autour du trou.

Chacun essaye de récupérer le plus d'olives.



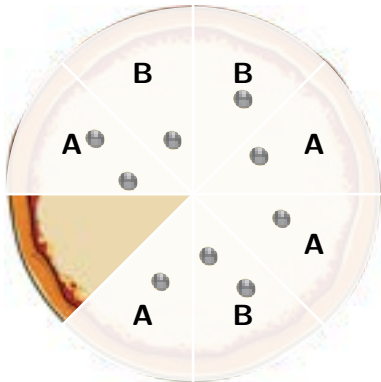
Manger le plus d'olives sans être impoli

Alice et Bob, une pizza découpée.

Alice prend une part.

Ensuite chacun à son tour, prend une des deux parts autour du trou.

Chacun essaye de récupérer le plus d'olives.



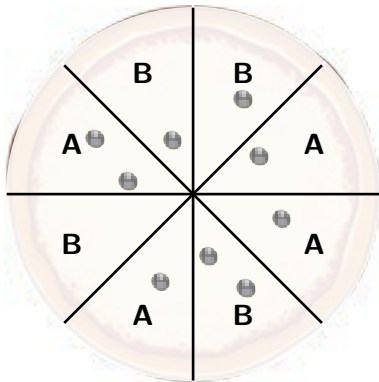
Manger le plus d'olives sans être impoli

Alice et Bob, une pizza découpée.

Alice prend une part.

Ensuite chacun à son tour, prend une des deux parts autour du trou.

Chacun essaye de récupérer le plus d'olives.



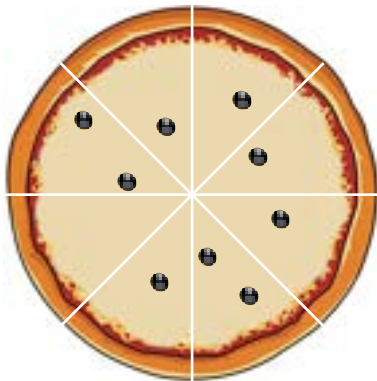
Alice : 5 olives.

Bob : 4 olives.

Manger le plus d'olives sans être impoli

Si le nombre de parts est pair, Alice peut prendre au moins la moitié des olives.

Stratégie d'Alice



Manger le plus d'olives sans être impoli

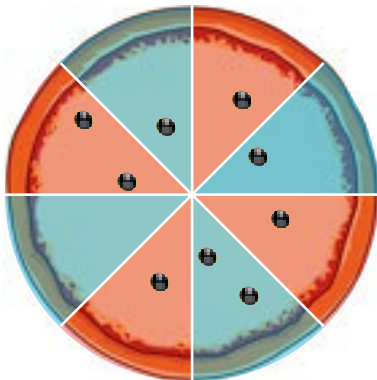
Si le nombre de parts est pair, Alice peut prendre au moins la moitié des olives.

Stratégie d'Alice

Colorer les parts alternativement en bleu et rouge.

Déterminer la couleur qui a le plus d'olives.

Toujours prendre une part de cette couleur.



Manger le plus d'olives sans être impoli

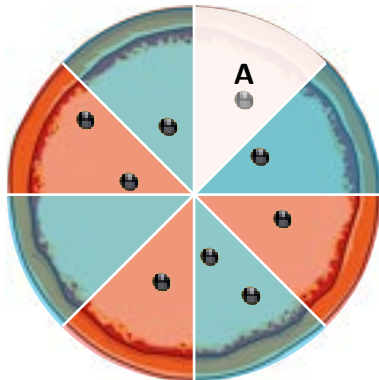
Si le nombre de parts est pair, Alice peut prendre au moins la moitié des olives.

Stratégie d'Alice

Colorer les parts alternativements en bleu et rouge.

Déterminer la couleur qui a le plus d'olives.

Toujours prendre une part de cette couleur.



Manger le plus d'olives sans être impoli

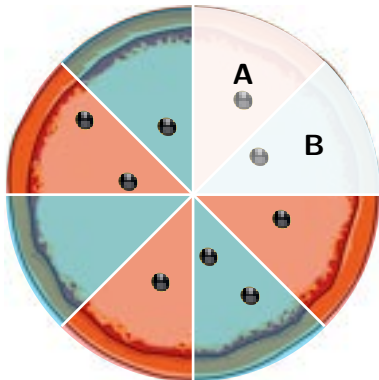
Si le nombre de parts est pair, Alice peut prendre au moins la moitié des olives.

Stratégie d'Alice

Colorer les parts alternativements en bleu et rouge.

Déterminer la couleur qui a le plus d'olives.

Toujours prendre une part de cette couleur.



Manger le plus d'olives sans être impoli

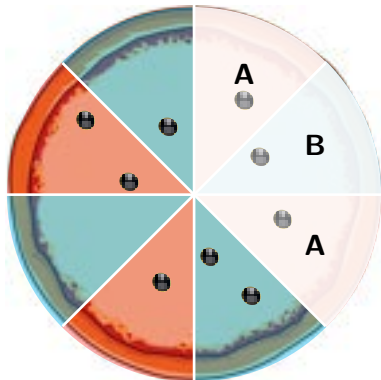
Si le nombre de parts est pair, Alice peut prendre au moins la moitié des olives.

Stratégie d'Alice

Colorer les parts alternativement en bleu et rouge.

Déterminer la couleur qui a le plus d'olives.

Toujours prendre une part de cette couleur.



Manger le plus d'olives sans être impoli

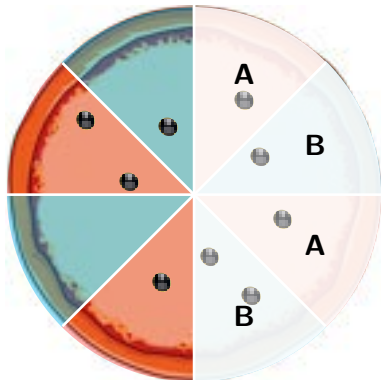
Si le nombre de parts est pair, Alice peut prendre au moins la moitié des olives.

Stratégie d'Alice

Colorer les parts alternativements en bleu et rouge.

Déterminer la couleur qui a le plus d'olives.

Toujours prendre une part de cette couleur.



Manger le plus d'olives sans être impoli

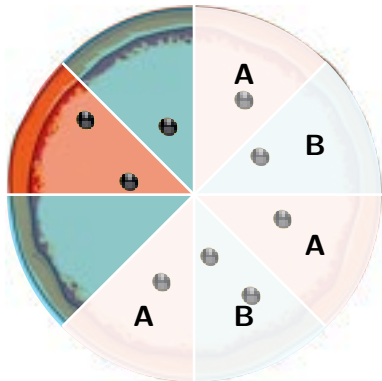
Si le nombre de parts est pair, Alice peut prendre au moins la moitié des olives.

Stratégie d'Alice

Colorer les parts alternativements en bleu et rouge.

Déterminer la couleur qui a le plus d'olives.

Toujours prendre une part de cette couleur.



Manger le plus d'olives sans être impoli

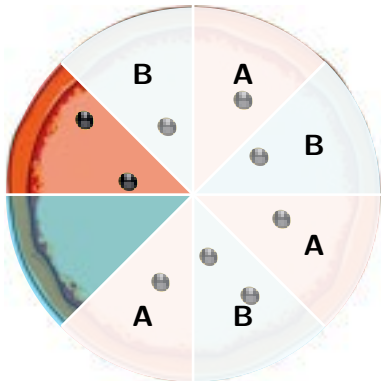
Si le nombre de parts est pair, Alice peut prendre au moins la moitié des olives.

Stratégie d'Alice

Colorer les parts alternativements en bleu et rouge.

Déterminer la couleur qui a le plus d'olives.

Toujours prendre une part de cette couleur.



Manger le plus d'olives sans être impoli

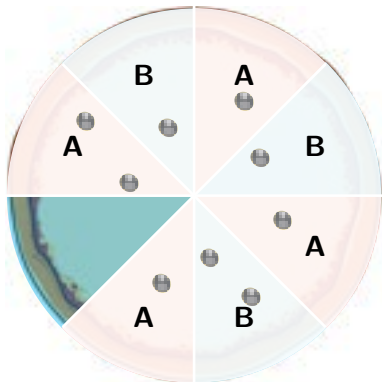
Si le nombre de parts est pair, Alice peut prendre au moins la moitié des olives.

Stratégie d'Alice

Colorer les parts alternativements en bleu et rouge.

Déterminer la couleur qui a le plus d'olives.

Toujours prendre une part de cette couleur.



Manger le plus d'olives sans être impoli

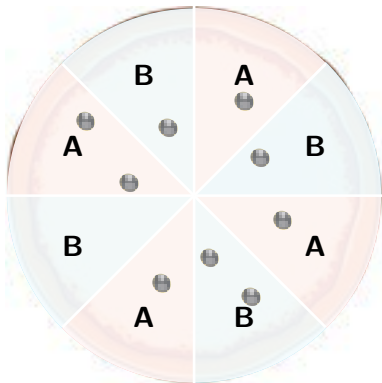
Si le nombre de parts est pair, Alice peut prendre au moins la moitié des olives.

Stratégie d'Alice

Colorer les parts alternativements en bleu et rouge.

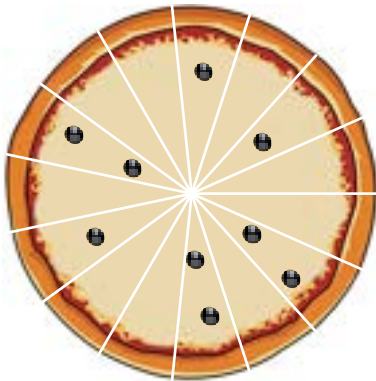
Déterminer la couleur qui a le plus d'olives.

Toujours prendre une part de cette couleur.



Manger le plus d'olives sans être impoli

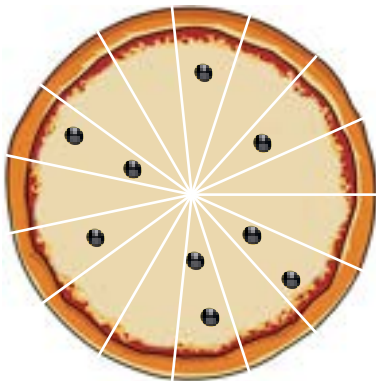
Et si le **nombre de parts** est **impair** ?



Manger le plus d'olives sans être impoli

Et si le **nombre de parts** est **impair** ?

Dans certains cas, Bob peut
gagner 5 olives sur 9.
(D. E. Brown 1996)



Manger le plus d'olives sans être impoli

Et si le **nombre de parts** est **impair** ?

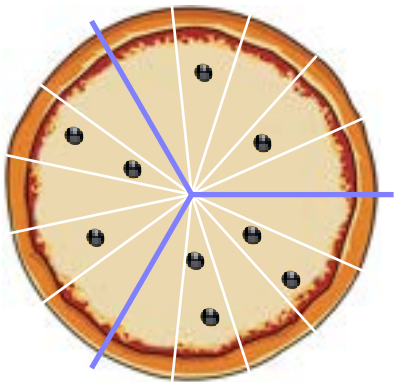
Dans certains cas, Bob peut
gagner 5 olives sur 9.

(D. E. Brown 1996)

Stratégie de Bob

Prendre des olives dès que possible.

Laisser Alice “ouvrir les
quartiers”.



Manger le plus d'olives sans être impoli

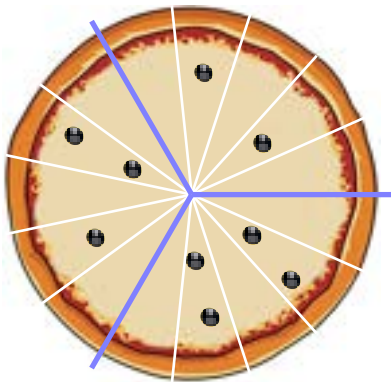
Et si le **nombre de parts** est **impair** ?

Dans certains cas, Bob peut
gagner 5 olives sur 9.
(D. E. Brown 1996)

Stratégie de Bob

Prendre des olives dès que possible.

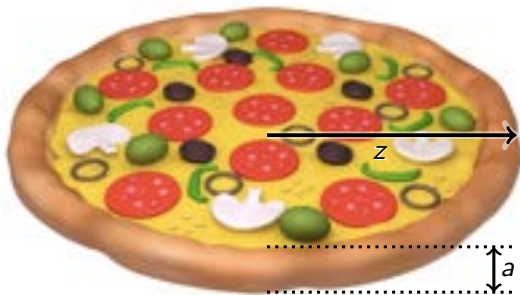
Laisser Alice “ouvrir les
quartiers”.



Knauer et al. ont montré qu'**Alice** peut toujours gagner **au moins 4/9 des olives**.

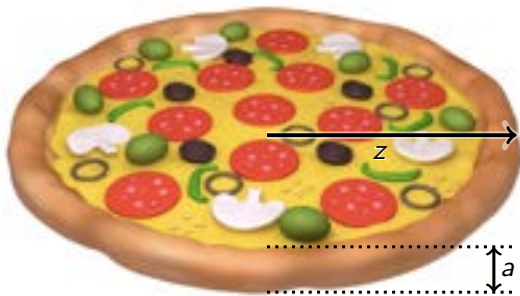
Volume d'une pizza

Volume d'une pizza de rayon z et de hauteur a .



Volume d'une pizza

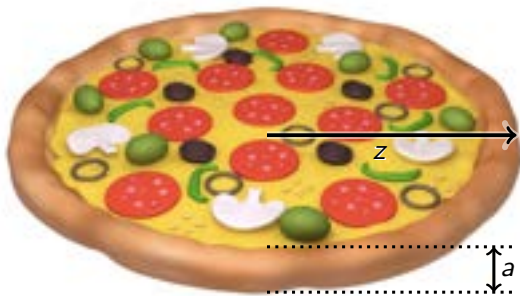
Volume d'une pizza de rayon z et de hauteur a .



$$\text{Volume} = \text{aire}(\text{base}) \times \text{hauteur}$$

Volume d'une pizza

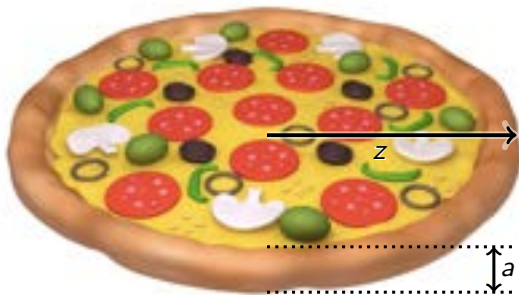
Volume d'une pizza de rayon z et de hauteur a .



$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{aire}(\text{base}) \times \text{hauteur} \\ &= \pi z^2 a\end{aligned}$$

Volume d'une pizza

Volume d'une pizza de rayon z et de hauteur a .



$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{aire}(\text{base}) \times \text{hauteur} \\ &= \pi z^2 a \\ &= \mathbf{Pi\ z\ z\ a}\end{aligned}$$

Supplément : quelle est la pizza du mois ?

4 pizzas

Regina (**Re**), Pepperoni (**Pe**), 4 Saisons (**4S**), Calzone (**Ca**).

On organise un vote pour élire la pizza du mois.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	Ca	Re	Ca	4S	Ca	4S	Ca	Re	Re	Ca	4S	Ca	Re
2	Pe	4S	Pe	Re	Pe	Pe	Pe	4S	Pe	Pe	Re	Pe	4S
3	4S	Pe	4S	Pe	4S	Re	4S	Pe	4S	4S	Pe	4S	Pe
4	Re	Ca	Re	Ca	Re	Ca	Re	Ca	Ca	Re	Ca	Re	Ca

Quelle est la pizza élue ?

Scrutin uninominal majoritaire à un tour

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	Ca	Re	Ca	4S	Ca	4S	Ca	Re	Re	Ca	4S	Ca	Re
2	Pe	4S	Pe	Re	Pe	Pe	Pe	4S	Pe	Pe	Re	Pe	4S
3	4S	Pe	4S	Pe	4S	Re	4S	Pe	4S	4S	Pe	4S	Pe
4	Re	Ca	Re	Ca	Re	Ca	Re	Ca	Ca	Re	Ca	Re	Ca

Pizza	Nb de votes en 1er
Re	4
Pe	0
4S	3
Ca	6

Pizza élue : Calzone (Ca)

Scrutin uninominal majoritaire à deux tours

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	Ca	Re	Ca	4S	Ca	4S	Ca	Re	Re	Ca	4S	Ca	Re
2	Pe	4S	Pe	Re	Pe	Pe	Pe	4S	Pe	Pe	Re	Pe	4S
3	4S	Pe	4S	Pe	4S	Re	4S	Pe	4S	4S	Pe	4S	Pe
4	Re	Ca	Re	Ca	Re	Ca	Re	Ca	Ca	Re	Ca	Re	Ca

Premier tour

Pizza	Nb de votes
Re	4
Pe	0
4S	3
Ca	6

2nd tour : Calzone et Regina

Pizza	Nb de votes
Re	7
Ca	6

Pizza élue : Regina (Re)

Méthode de Condorcet

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	Ca	Re	Ca	4S	Ca	4S	Ca	Re	Re	Ca	4S	Ca	Re
2	Pe	4S	Pe	Re	Pe	Pe	Pe	4S	Pe	Pe	Re	Pe	4S
3	4S	Pe	4S	Pe	4S	Re	4S	Pe	4S	4S	Pe	4S	Pe
4	Re	Ca	Re	Ca	Re	Ca	Re	Ca	Ca	Re	Ca	Re	Ca

Duels entre pizzas.

Si une couleur gagne tous ses duels : vainqueur de Condorcet.

Duel	Voix	Gagnant
Re vs Pe	6 vs 7	Pe
Re vs 4S	4 vs 9	4S
Re vs Ca	7 vs 6	Re
Pe vs 4S	7 vs 6	Pe
Pe vs Ca	7 vs 6	Pe
4S vs Ca	7 vs 6	Pe

Pizza élue : Pepperoni (Pe)

Méthode de Condorcet

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	Ca	Re	Ca	4S	Ca	4S	Ca	Re	Re	Ca	4S	Ca	Re
2	Pe	4S	Pe	Re	Pe	Pe	Pe	4S	Pe	Pe	Re	Pe	4S
3	4S	Pe	4S	Pe	4S	Re	4S	Pe	4S	4S	Pe	4S	Pe
4	Re	Ca	Re	Ca	Re	Ca	Re	Ca	Ca	Re	Ca	Re	Ca

Points selon le rang des pizzas :

3 points pour le 1er choix, 2 pour le 2e, 1 pour le 3e, 0 pour le 4e.

La pizza ayant le plus grand total de points est élue.

Pizza	1er	2e	3e	4e	Points
Re	4	2	1	6	17
Pe	0	8	5	0	21
4S	3	3	7	0	22
Ca	6	0	0	7	18

Pizza élue : 4 Saisons (4S)