

L'aventure
de

π

Frédéric HAVET

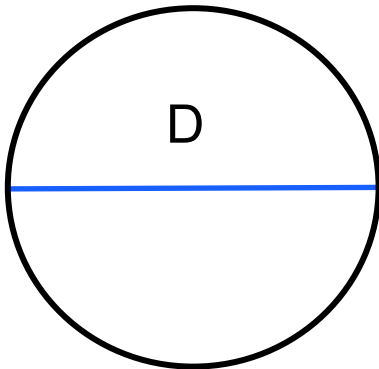
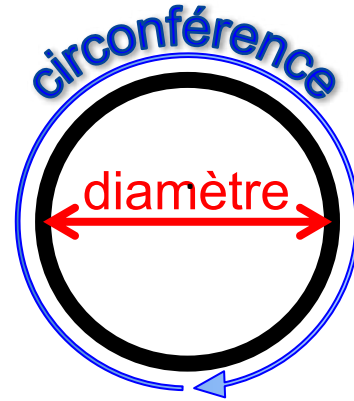


TERRA
NUMERICA

DEFINITION DE π

DEFINITION DE π

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$

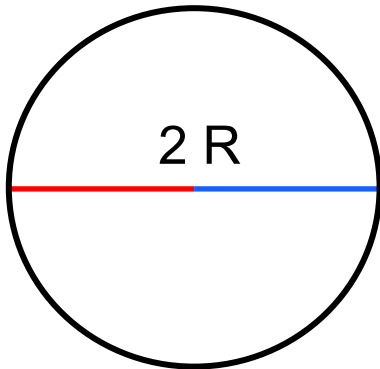
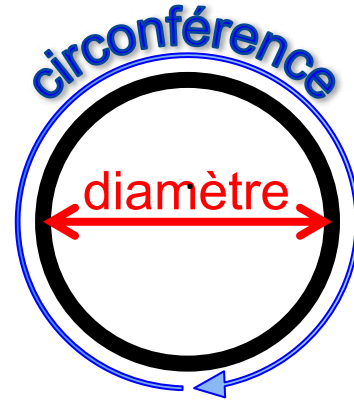


πD



DEFINITION DE π

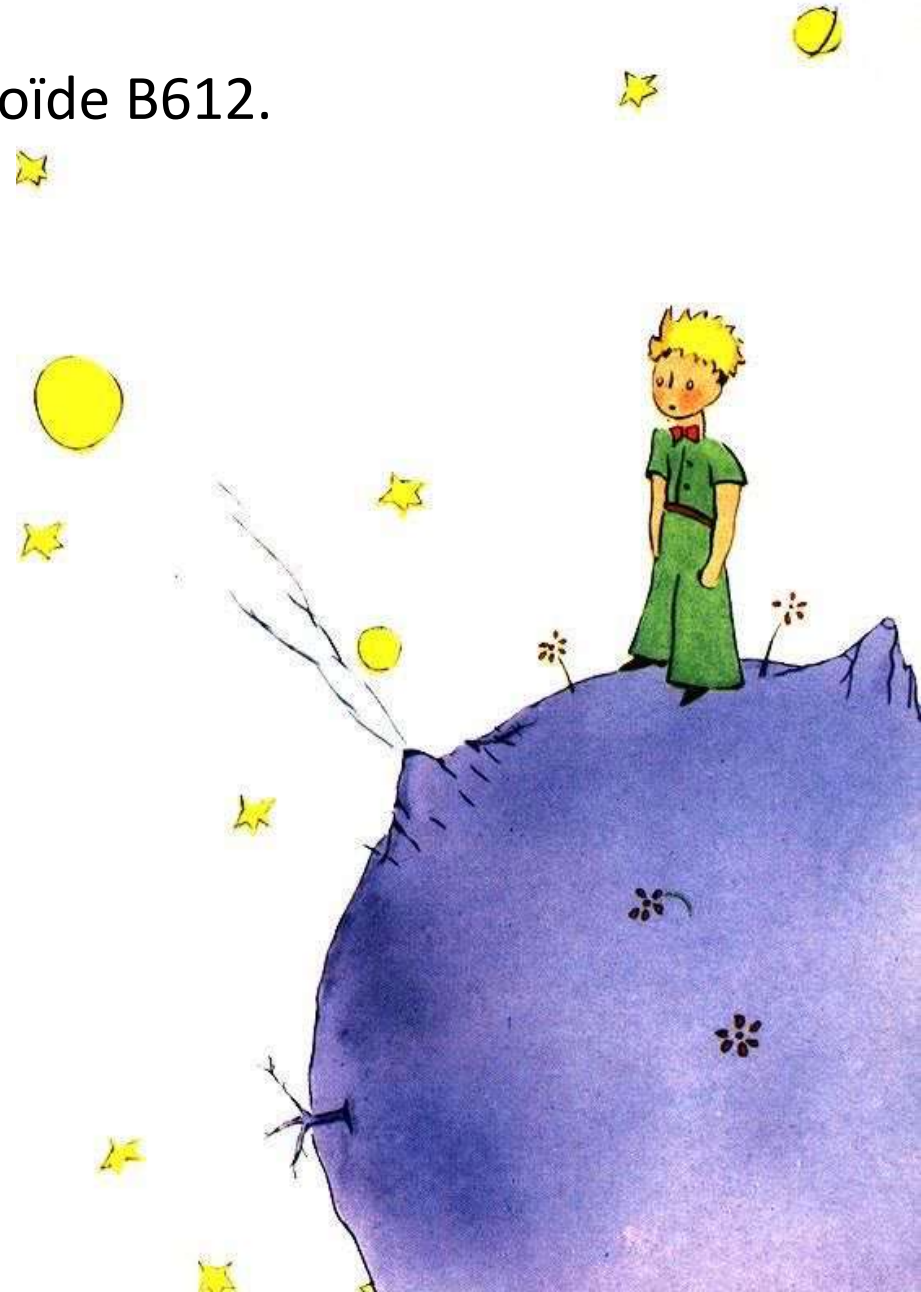
$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$



LE TOUR DU MONDE

Le Petit Prince fait le tour de l'astéroïde B612.
Il mesure 1,2 m.

Quelle distance la tête
du Petit Prince va-t-
elle faire de plus que
ses pieds ?



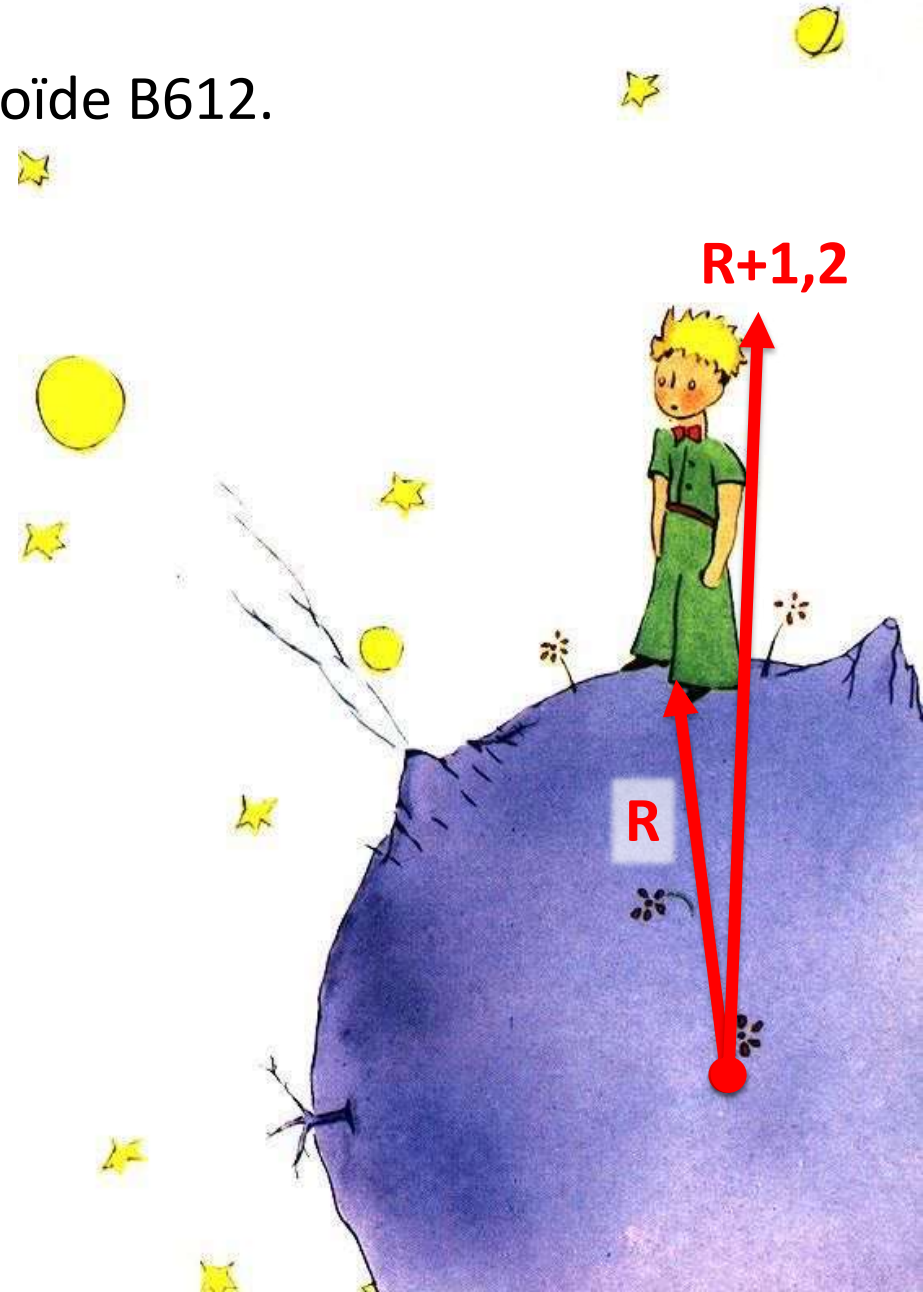
LE TOUR DU MONDE

Le Petit Prince fait le tour de l'astéroïde B612.
Il mesure 1,2 m.

Quelle distance la tête
du Petit Prince va-t-
elle faire de plus que
ses pieds ?

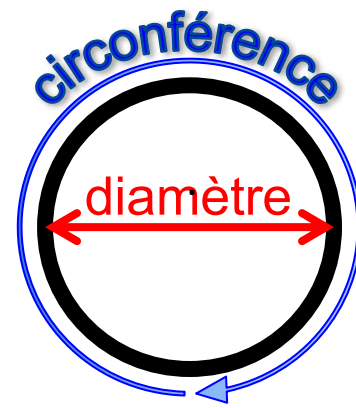
R : rayon de l'astéroïde
trajet des pieds : $2 \pi R$
trajet de la tête : $2 \pi (R+1,2)$
 $= 2 \pi R + 2 \pi \times 1,2$

Différence $2 \pi \times 1,2 \approx 7,54$

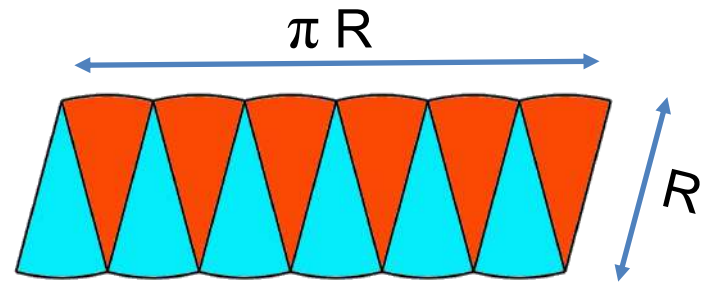
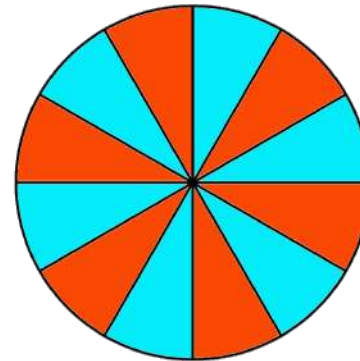


AIRE D'UN CERCLE

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$

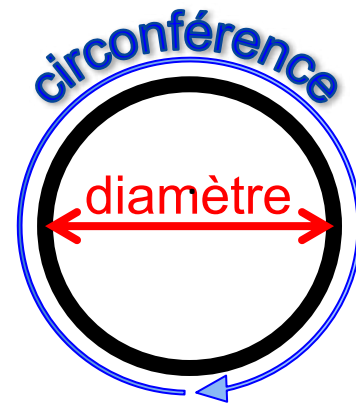


Archimède
287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.

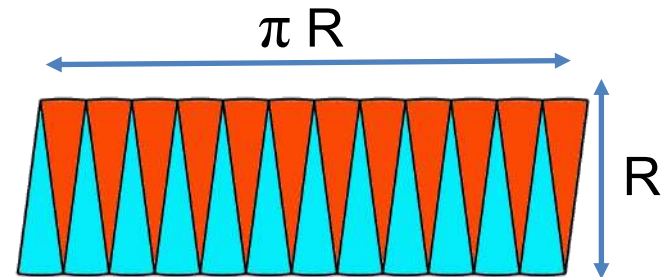
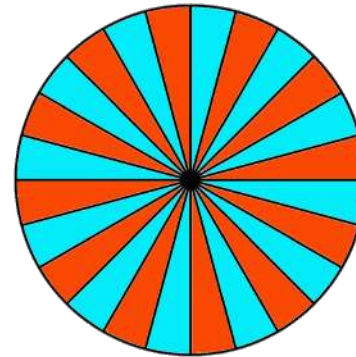


AIRE D'UN CERCLE

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$

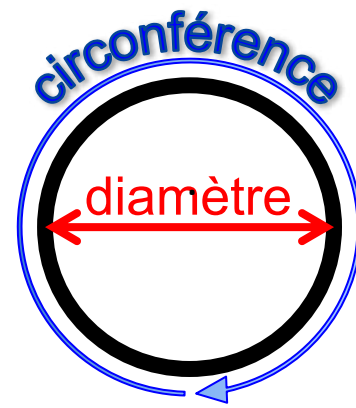


Archimède
287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.

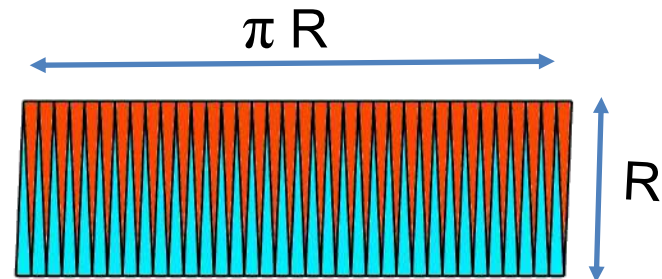
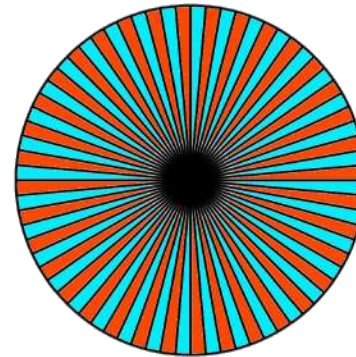


AIRE D'UN CERCLE

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$

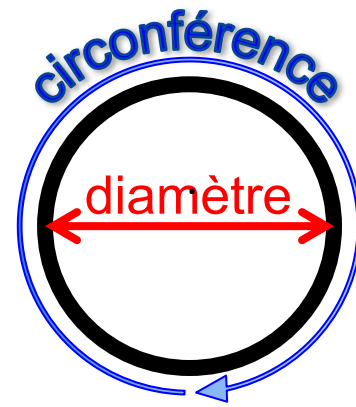


Archimède
287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.



AIRE D'UN CERCLE

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$

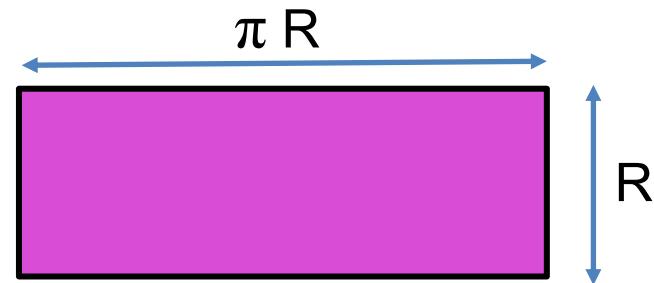
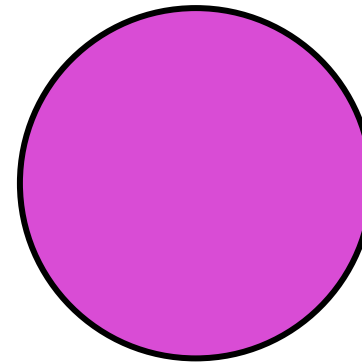


Archimède

287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.

Aire du cercle = aire du rectangle

$$= \pi R^2$$



Une grande pizza ou deux moyennes ?

On vous propose une grande pizza de 44 cm de diamètre ou deux moyennes de 30 cm de diamètre.



Laquelle choisissez-vous ?

Une grande pizza ou deux moyennes ?

On vous propose une grande pizza de 44 cm de diamètre ou deux moyennes de 30 cm de diamètre.



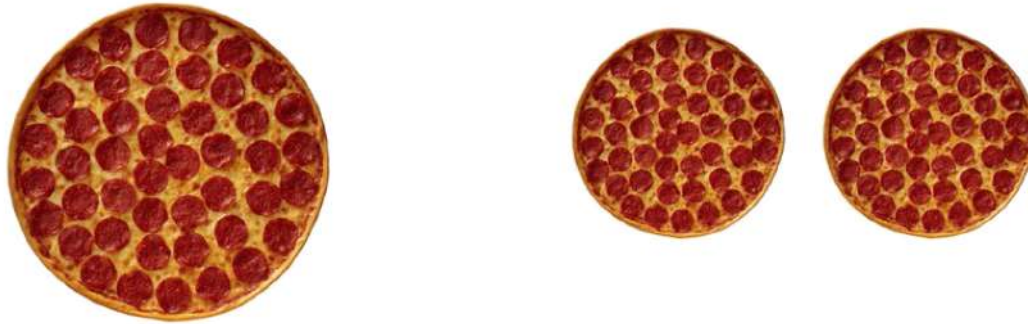
Laquelle choisissez-vous ?

Aire : Grande pizza
 $\pi \times 22^2 = \pi \times 484$

Deux pizzas moyennes
 $2 \times \pi \times 15^2 = \pi \times 450$

Une grande pizza ou deux moyennes ?

On vous propose une grande pizza de 44 cm de diamètre ou deux moyennes de 30 cm de diamètre.



Laquelle choisissez-vous ?

Aire : Grande pizza
 $\pi \times 22^2 = \pi \times 484$

Deux pizzas moyennes
 $2 \times \pi \times 15^2 = \pi \times 450$

Et pour la croûte ?

Une grande pizza ou deux moyennes ?

On vous propose une grande pizza de 44 cm de diamètre ou deux moyennes de 30 cm de diamètre.



Laquelle choisissez-vous ?

Aire : Grande pizza
 $\pi \times 22^2 = \pi \times 484$

Deux pizzas moyennes
 $2 \times \pi \times 15^2 = \pi \times 450$

Et pour la croûte ?

Périmètre : $\pi \times 44$

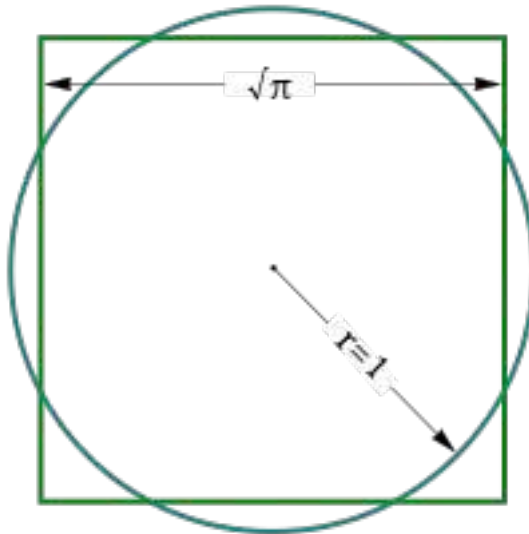
$2 \times \pi \times 30 = \pi \times 60$

Quadrature du cercle

La **quadrature du cercle** consiste à construire un carré de même aire qu'un cercle donné à l'aide d'une règle et d'un compas.

Aire d'un cercle de rayon $r = \pi r^2$.

Cela revient à la **construction** à la règle et au compas de $1/\pi$ donc **de π** .



CALCUL DE π

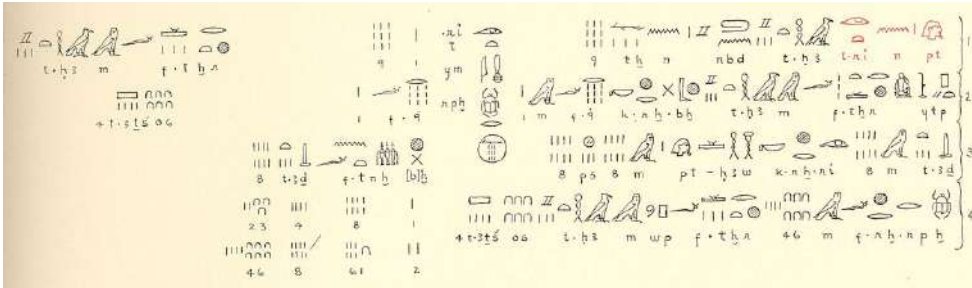
Bible Rois (I, 7, 23) :

Il fit la mer de fonte. Elle avait **dix coudées d'un bord à l'autre**, une **forme entièrement ronde**, cinq coudées de hauteur, et une **circonférence** que mesurait un cordon **de trente coudées**.

$$\pi = 3$$



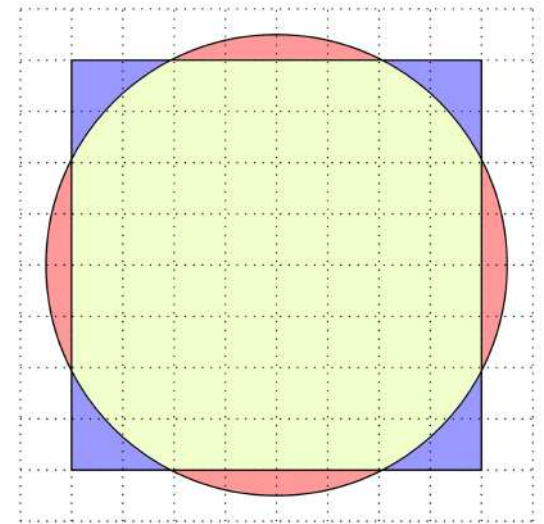
Papyrus de Rhind (1650 av. JC):



Un carré de côté 8 équivaut en surface à un cercle de diamètre 9.

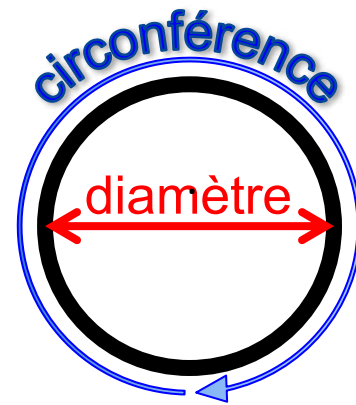
$$8^2 = \pi \times (9/2)^2$$

$$\pi = 256/81 \approx 3,16$$



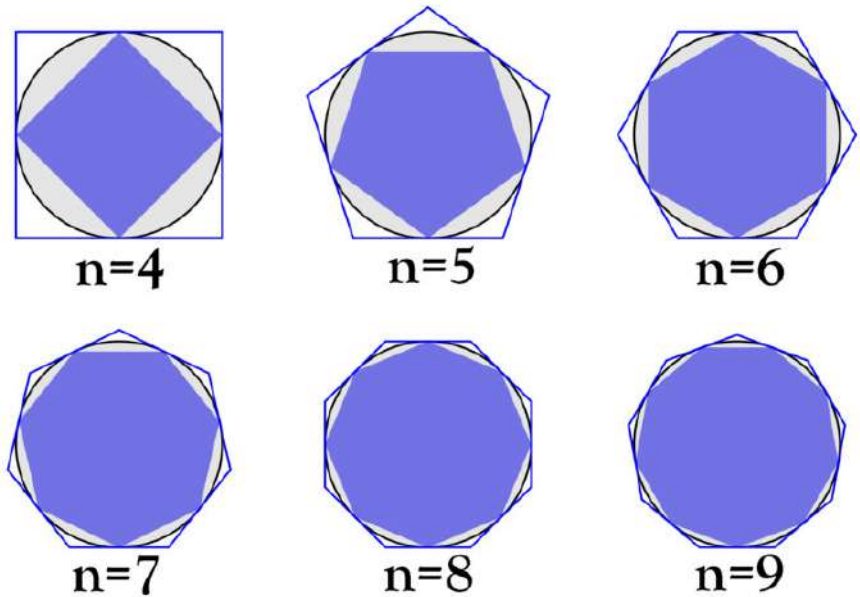
CALCUL DE π

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$



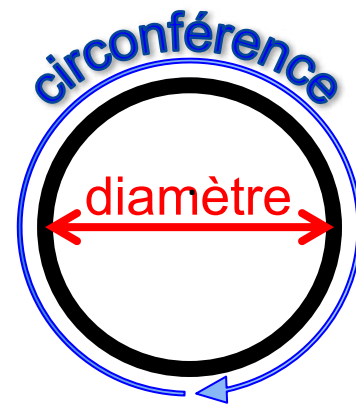
Archimède

287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.



CALCUL DE π

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$



$$n=3 : 2,598... \leq \pi \leq 5,196...$$

$$n=4 : 2,828... \leq \pi \leq 4$$

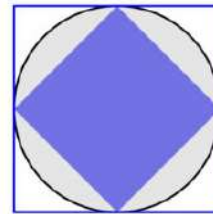
$$n=5 : 2,938... \leq \pi \leq 3,632...$$

$$n=6 : 3 \leq \pi \leq 3,464...$$

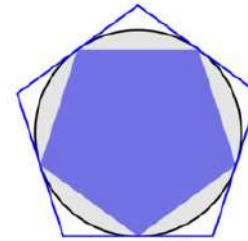
$$n=7 : 3,037... \leq \pi \leq 3,371...$$

$$n=8 : 3,061... \leq \pi \leq 3,313...$$

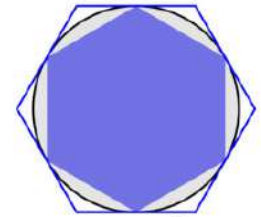
$$n=9 : 3,078... \leq \pi \leq 3,275...$$



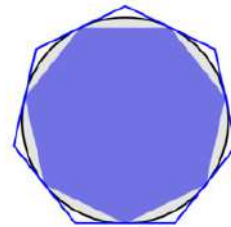
n=4



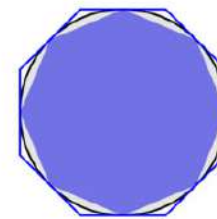
n=5



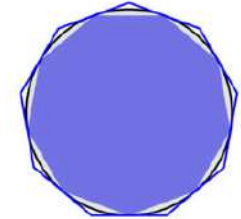
n=6



n=7



n=8



n=9

$$n \sin(\pi/n) \leq \pi \leq n \tan(\pi/n)$$

$$n=96 : 3,1408... \leq \pi \leq 3,1428...$$

CALCUL DE π

Formule de Viète

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \cdots$$

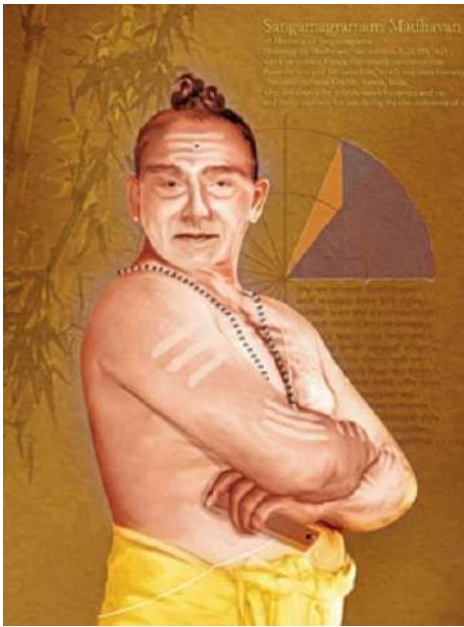


François Viète
1540 – 1603

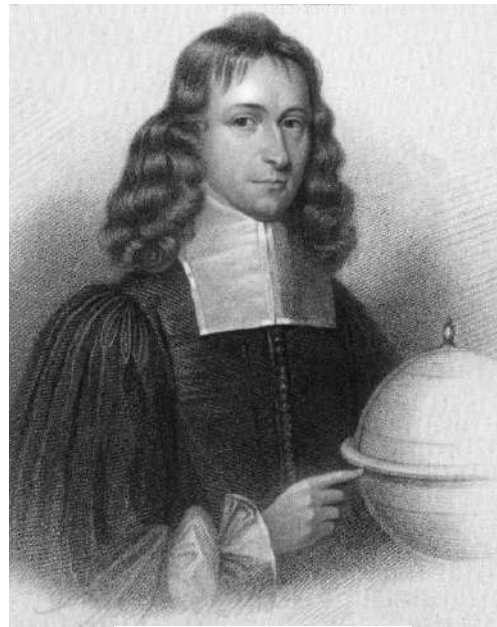
CALCUL DE π

Formule de Madhava-Gregory-Leibniz

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^k}{2k+1} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$



Madhava de Sangamagrama
1350 – 1425



James Gregory
1638 – 1675



Gootfried Wilhelm von Leibniz
1646 – 1716

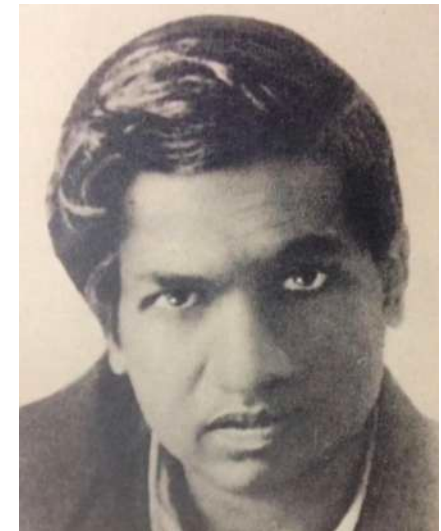
CALCUL DE π

Formule de Ramanujan

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)! (1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

Converge rapidement.

8 nouvelles décimales à chaque terme



Srinivasa Ramanujan
1887 – 1920

CALCUL DES DÉCIMALES de π

Formule BBP (de Bailey-Borwein-Plouffe, 1995)

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

Permet de calculer rapidement une décimale de π (en base 16)
sans calculer les précédentes.



David H. Bailey
1948 –



Peter B. Borwein
1953 – 2020



Simon Plouffe
1956 –

POÈME sur les DÉCIMALES de π

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
Glorieux Archimède, artiste ingénieur,
Toi qui, de Syracuse aime encore la gloire,
Soit ton nom conservé par de savants grimoires !
Jadis, mystérieux, un problème bloquait
Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose
que Pythagore découvrit aux anciens grecs.
O, quadrature ! vieux tourment du philosophe !
Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez
Défié Pythagore et ses imitateurs.
Comment intégrer l'espace bien circulaire ?
Former un triangle auquel il équivaudra ?
Nouvelle invention : Archimède inscrira
Dedans un hexagone, appréciera son aire
Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra
Dédoublera chaque élément antérieur ;
Toujours de l'orbe calculée approchera ;
Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur
De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle !
Professeur, enseignez son problème avec zèle !...

DÉCIMALES de π

3,

1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510
5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679
8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128
4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196
4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091
4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273
7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094
3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548
0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912
9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798
6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132
0005681271 4526356082 7785771342 7577896091 7363717872
1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235
4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960
5187072113 4999999837 2978049951 0597317328 1609631859
5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881
7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303
5982534904 2875546873 1159562863 8823537875 9375195778
1857780532 1712268066 1300192787 6611195909 2164201989

POÈME sur les DÉCIMALES de π

Yes, I have a great statement to relate.
May I have a large container of coffee
How I wish I could recollect of circle round
The exact relation Archimede unwound.
How I want a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures
involving quantum mechanics !
How I wish I could enumerate Pi easily, since all these horrible
mnemonics prevent recalling any of Pi's sequence more simply.
See, I have a rhyme assisting my feeble brain,
its tasks sometimes resisting.
But a time I spent wandering in bloomy night ;
Yon tower, tinkling chimewise, loftily opportune.
Out, up, and together came sudden to Sunday rite,
The one solemnly off to correct plenilune.

TRANSCENDANCE de π

Nombre **algébrique** = solution d'un polynôme à coefficients entiers

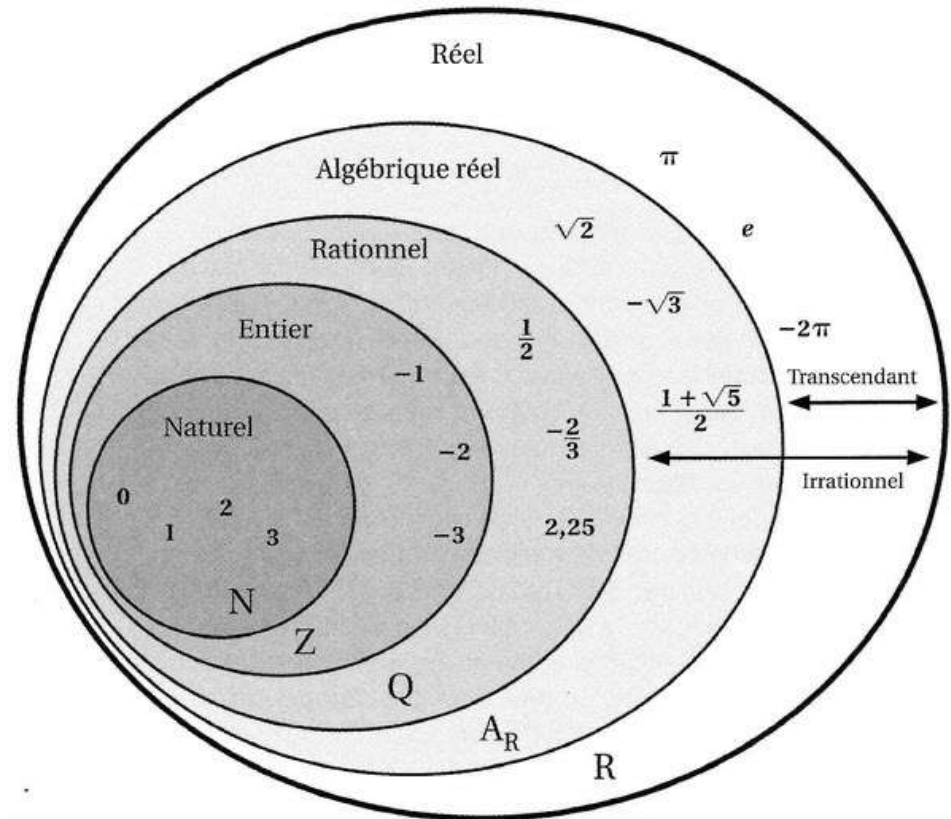
Exemple :

transcendant = non algébrique.

π et e sont transcendants

$\pi + e$ et πe ??

L'un des deux est transcendant.



Identité d'Euler

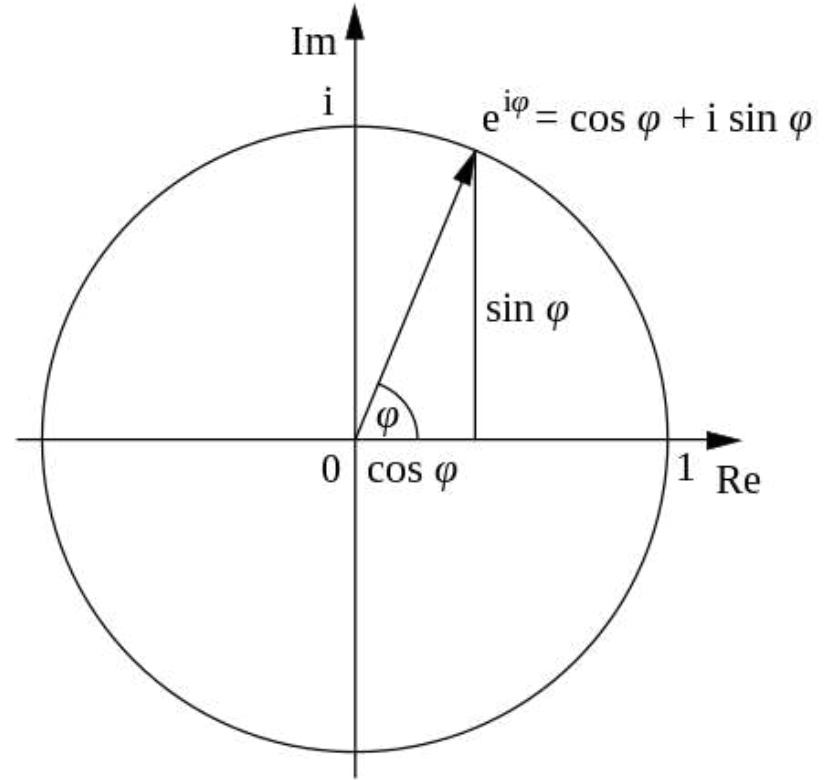
$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Cas particulier pour $\varphi = \pi$ de

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Avec φ angle en radians :

2π radians = 360 degrés



- Formule de base en **trigonométrie** et en **analyse complexe**.
- Très utile en **électricité** et **traitement du signal**.
Combinaison de sinusoides se manipule plus facilement comme somme d'exponentielles.

Gaussienne

Théorème central-limite (Laplace, 1809)

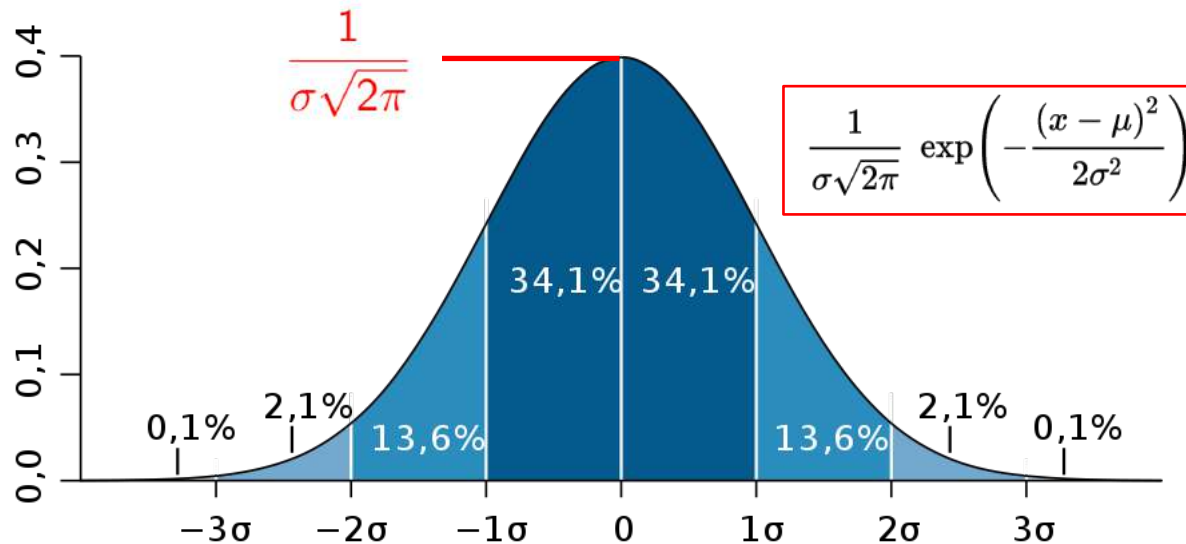
X_1, X_2, \dots, X_n échantillons indépendants suivant une même loi de probabilité d'espérance μ et d'écart-type σ .

$$M_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n) / n$$

tend vers une distribution normale d'espérance μ et d'écart type $\sigma = \sigma / \sqrt{n}$



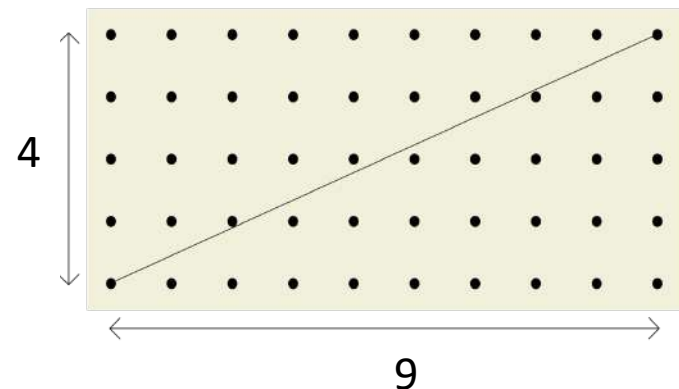
Pierre Simon
de Laplace
(1749-1827)



Entiers premiers entre eux

Deux entiers a et b sont **premiers entre eux** si leur seul diviseur commun est 1 c'est-à-dire si **$\text{PGCD}(a;b) = 1$** .

Exemple : 4 et 9 sont premiers entre eux.
6 et 9 ne sont pas premiers entre eux.



Théorème de Cesàro (1881)

Si on prend deux nombres entiers au hasard, la probabilité qu'ils soient premiers entre eux vaut

$$6/\pi^2 \approx 0,6079 \approx 61\% .$$



Ernest Cesàro
(1859-1906)

L'aiguille de Buffon



Le franc du carreau, 1587
Guillaume le Bé (1525-1598)

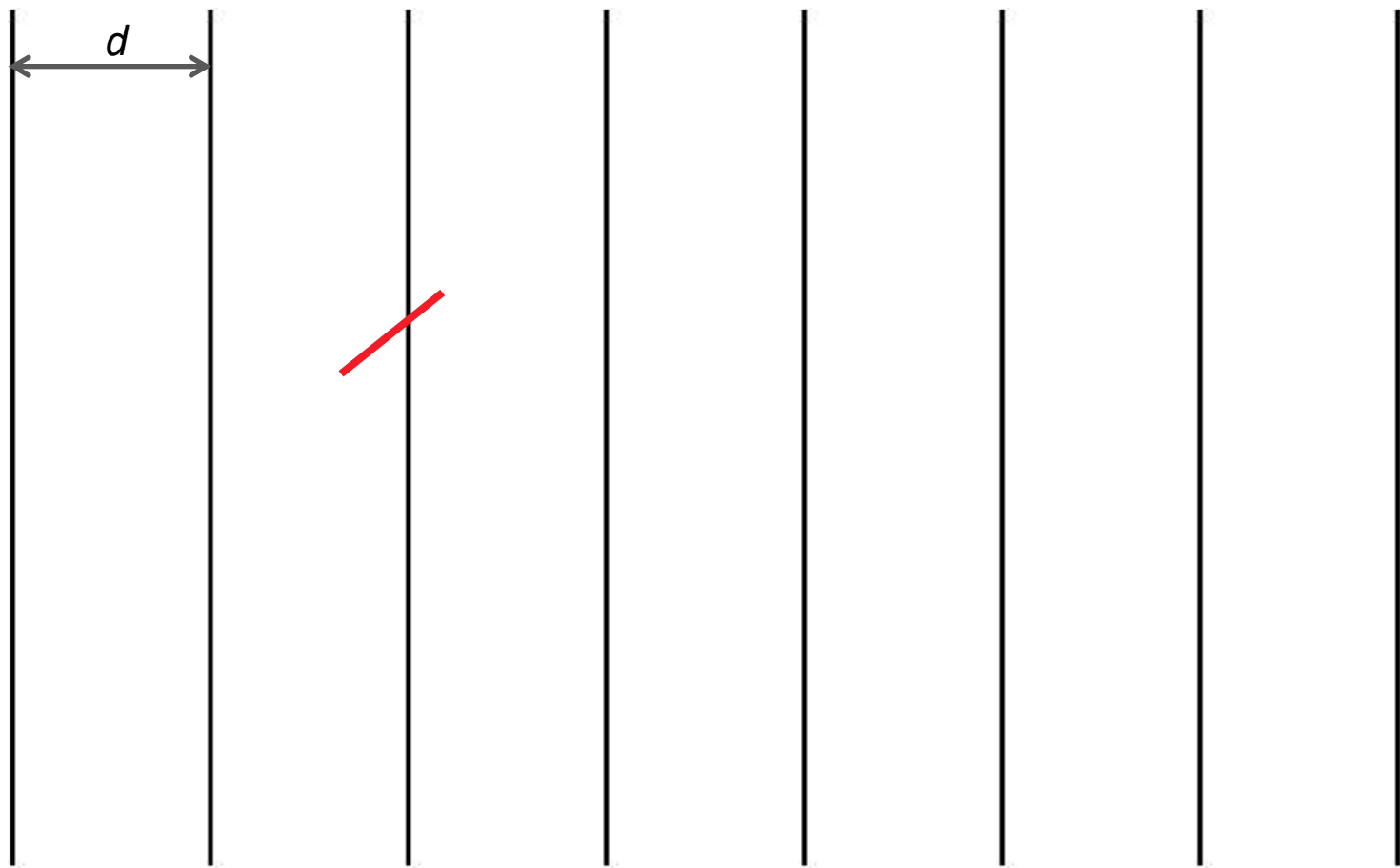


Georges Louis Leclerc
Comte de Buffon
(1707-1788)

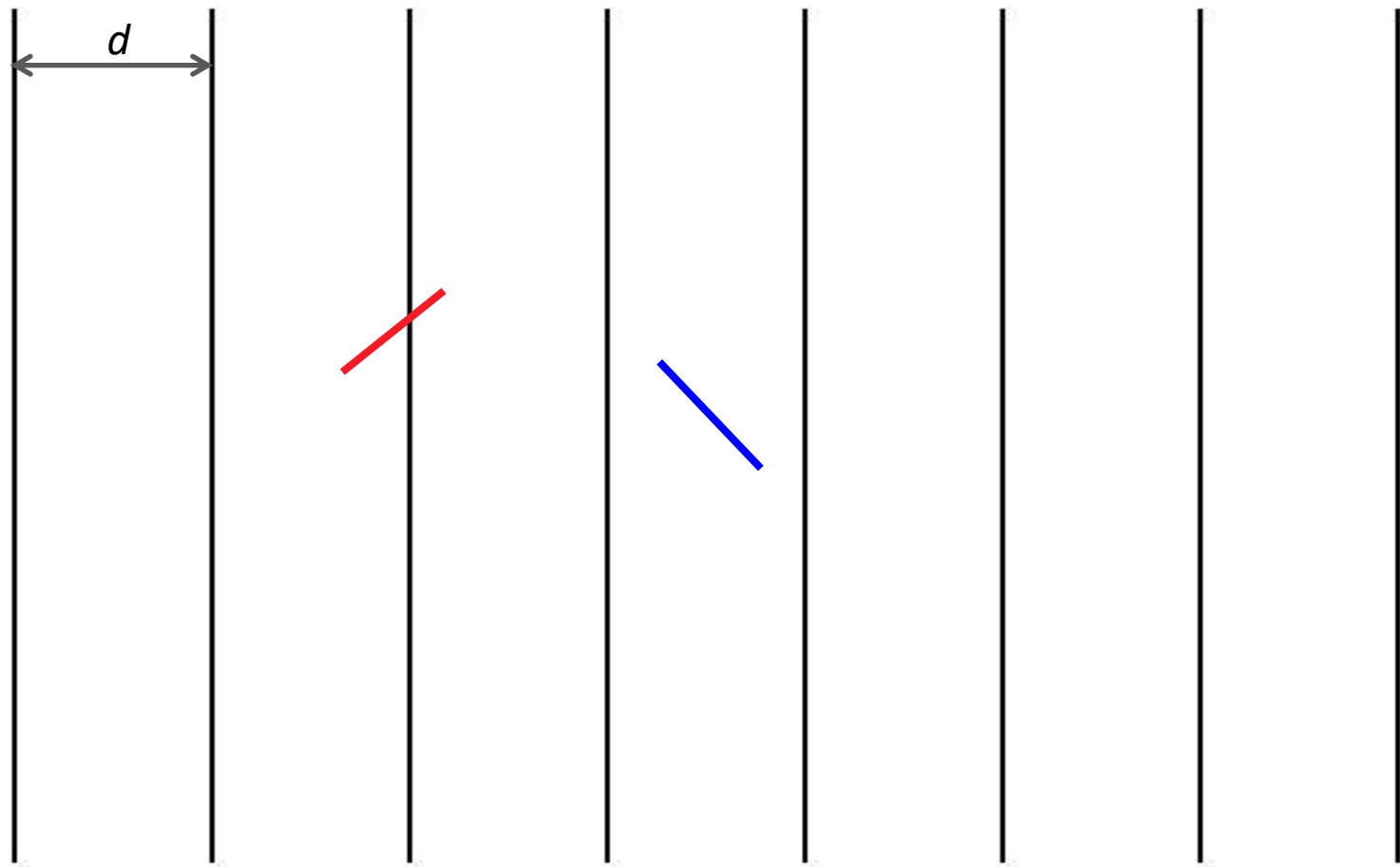


Planche le Cochon d'Inde
Histoire Naturelle
Ed. de Leipzig et Hambourg ,1765

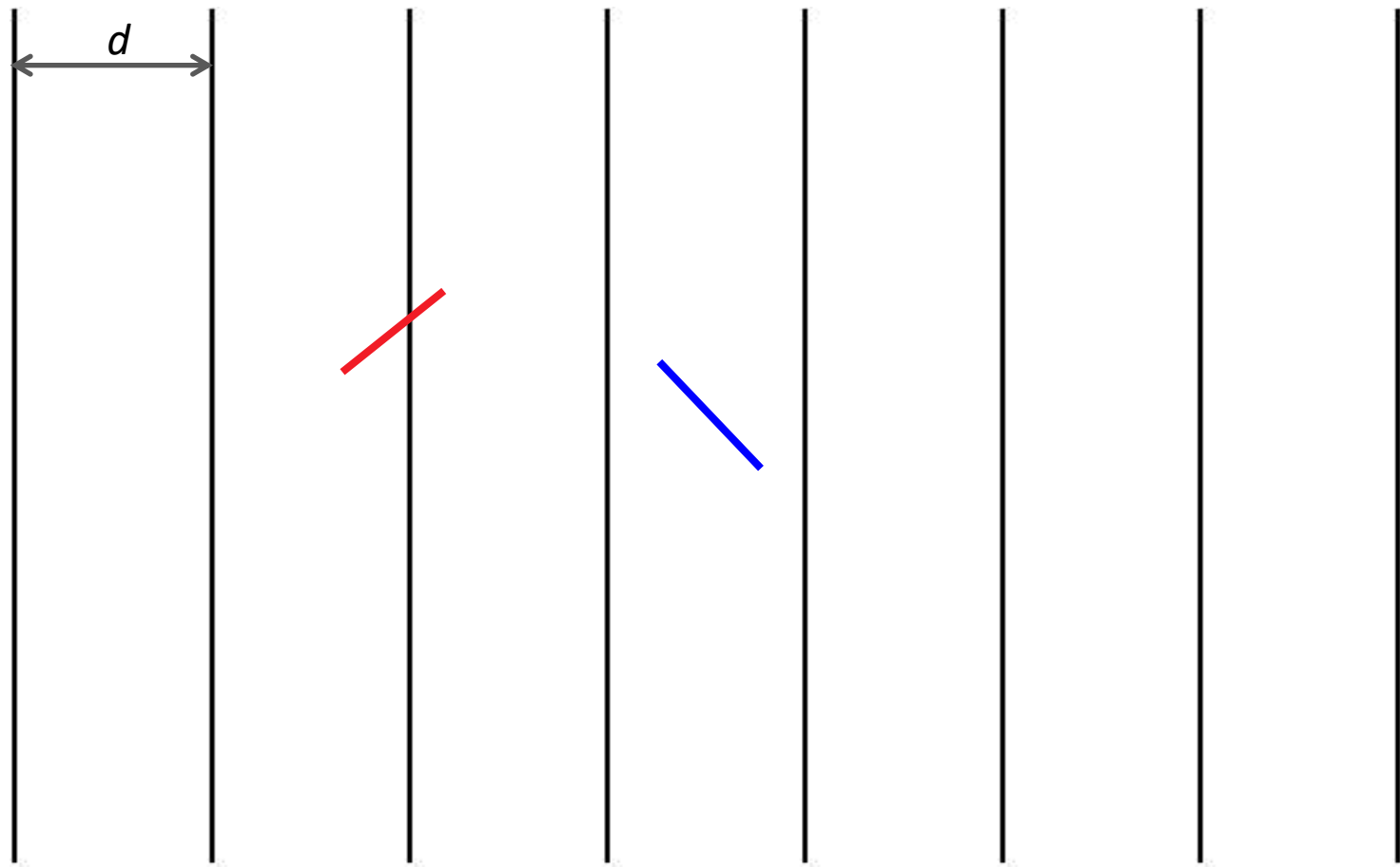
L'aiguille de Buffon



L'aiguille de Buffon ou le problème du joint couvert



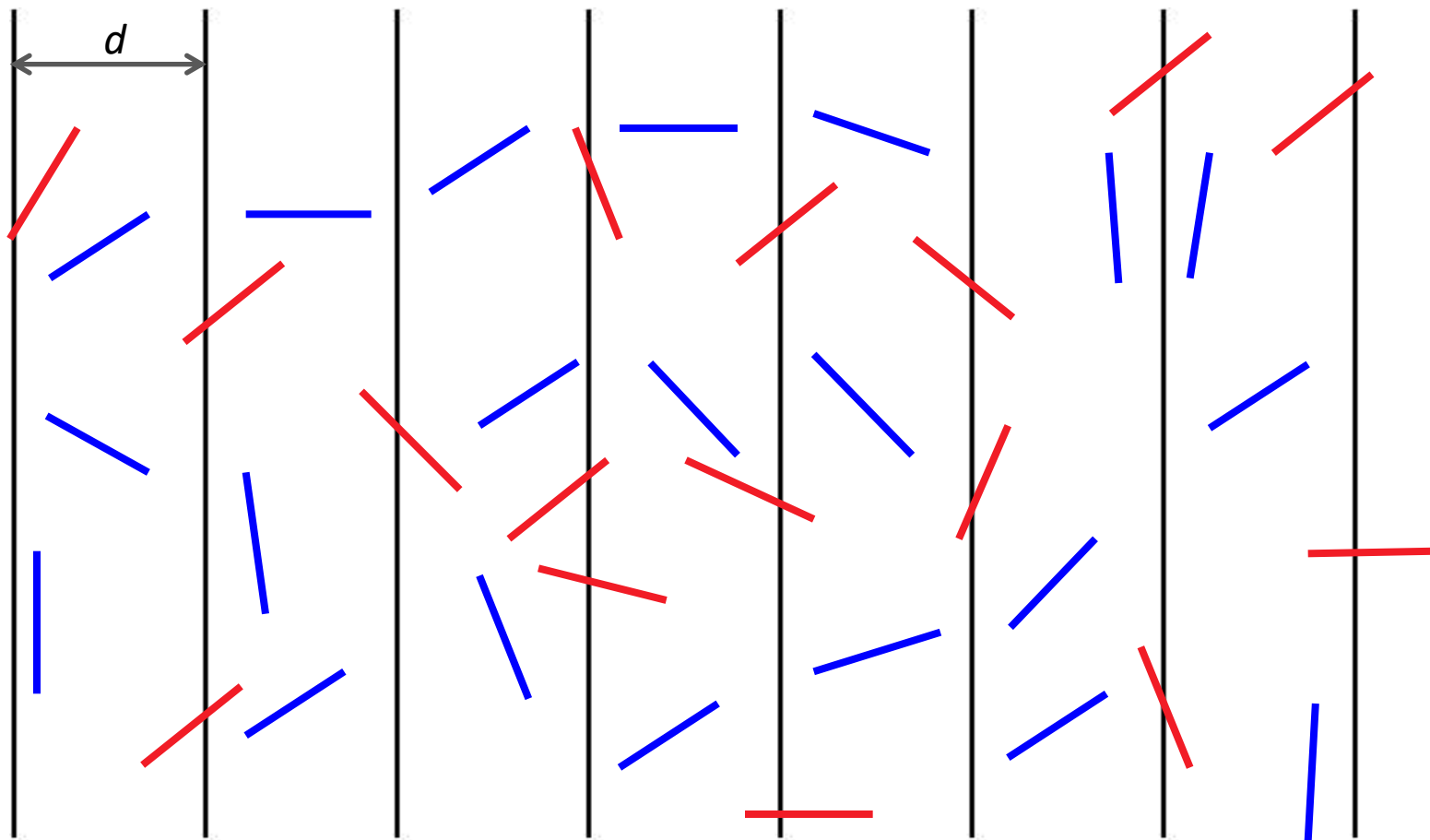
L'aiguille de Buffon ou le problème du joint couvert



$m(\ell)$ = probabilité qu'une aiguille de longueur ℓ couvre un joint.

$$m(\ell) = (1 \times 1 + 1 \times 0) / 2 = 1/2 = 0,5$$

L'aiguille de Buffon ou le problème du joint couvert

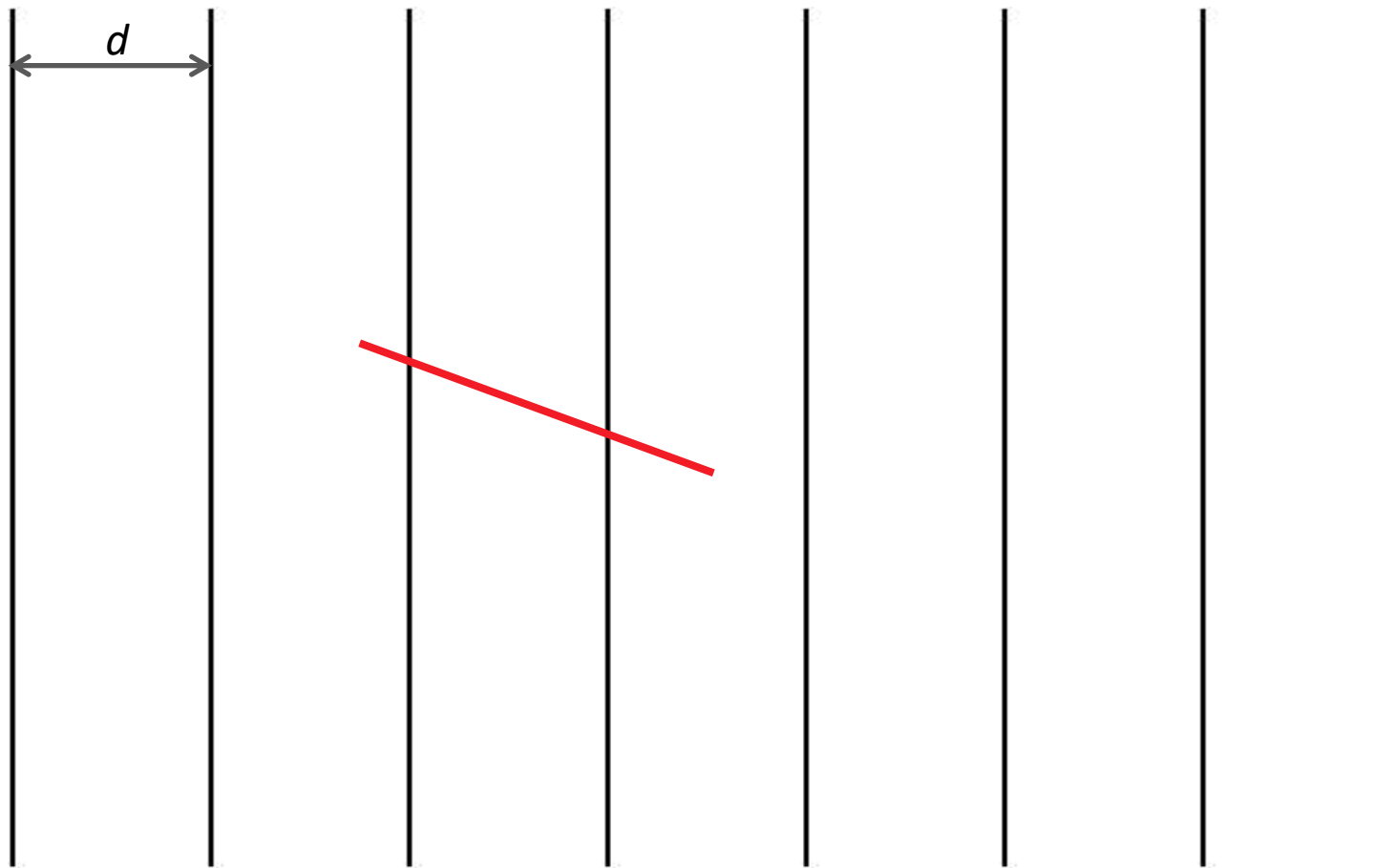


$m(\ell)$ = probabilité qu'une aiguille de longueur ℓ couvre un joint.

$$m(\ell) = (16 \times 1 + 21 \times 0) / 37 = 16/37 = 0,432 \dots$$

Le cas de l'aiguille longue

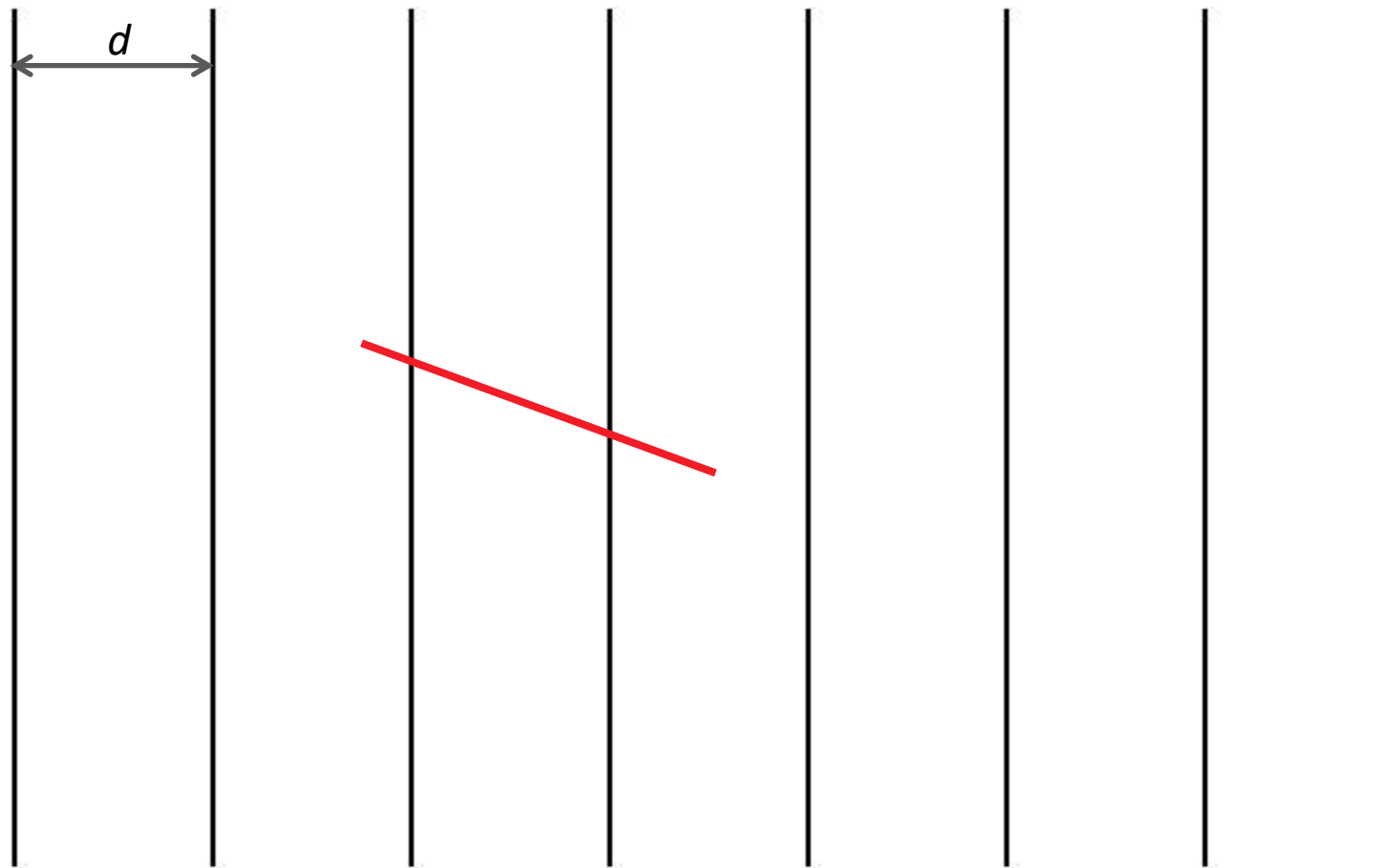
($\ell \geq d$)



L'aiguille longue peut couvrir plusieurs joints.

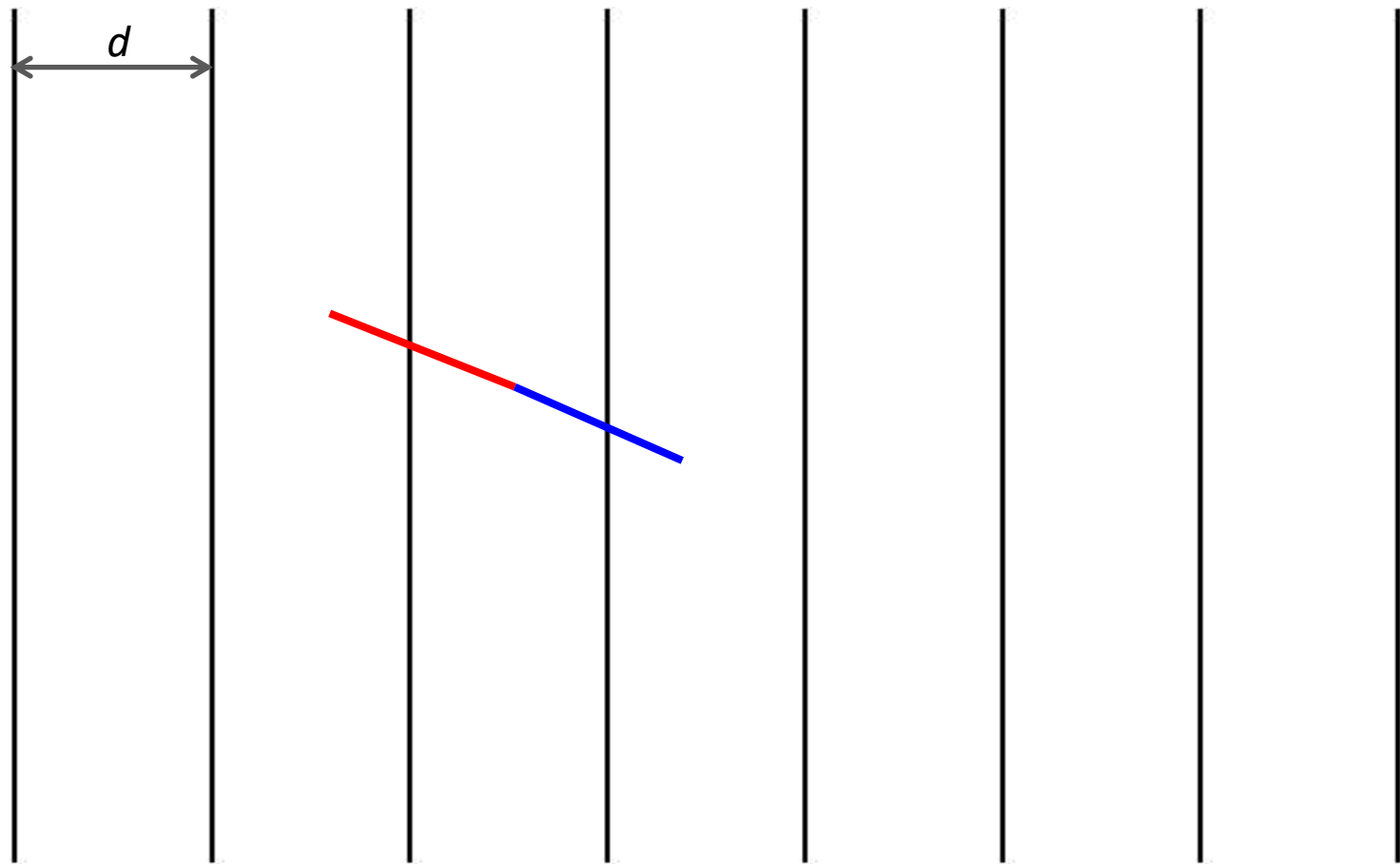
Le cas de l'aiguille longue

($\ell \geq d$)



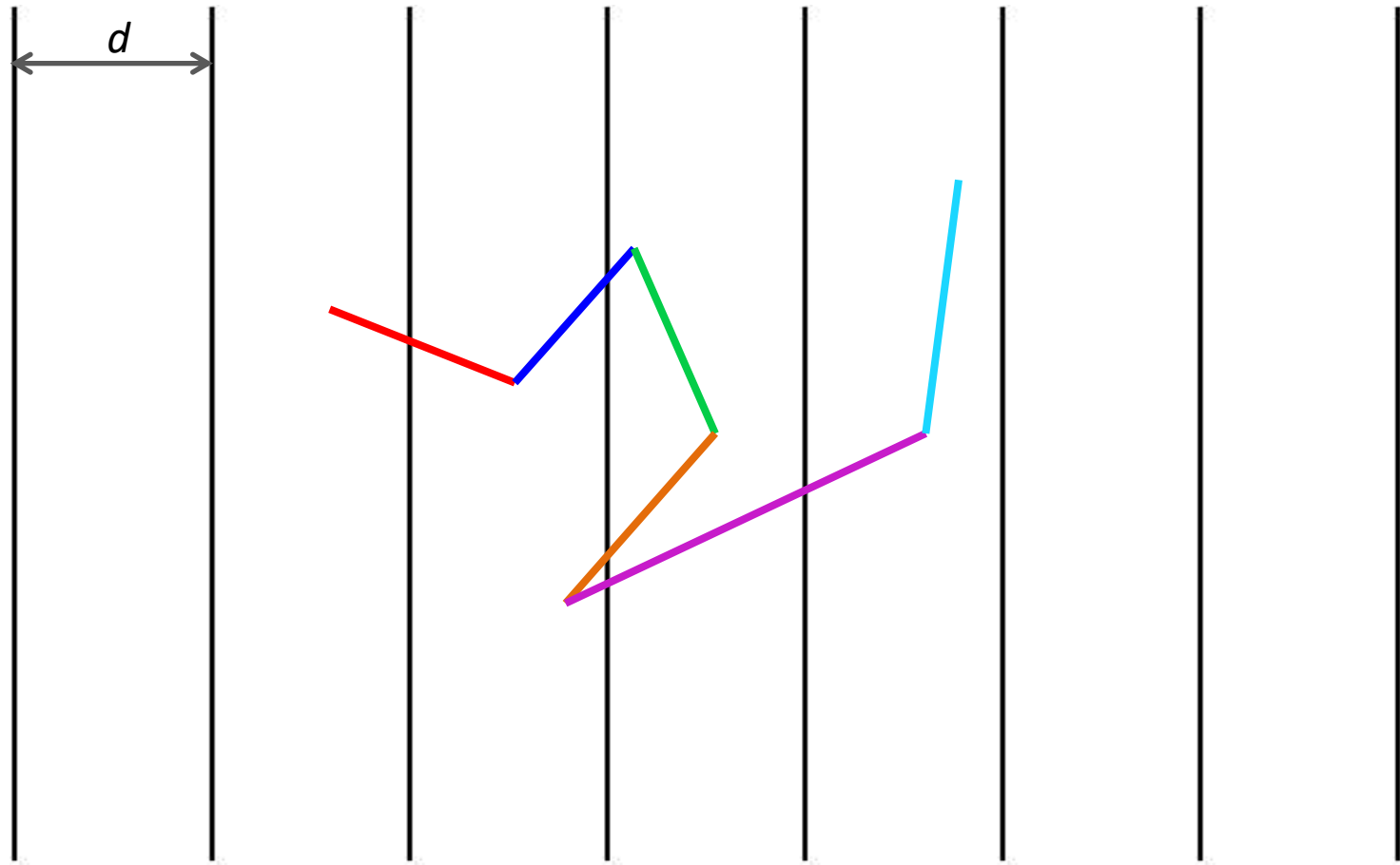
$m(\ell)$ = nombre moyen de joints qu'une aiguille de longueur ℓ couvre.
(espérance du nombre de joints)

L'aiguille de deux couleurs



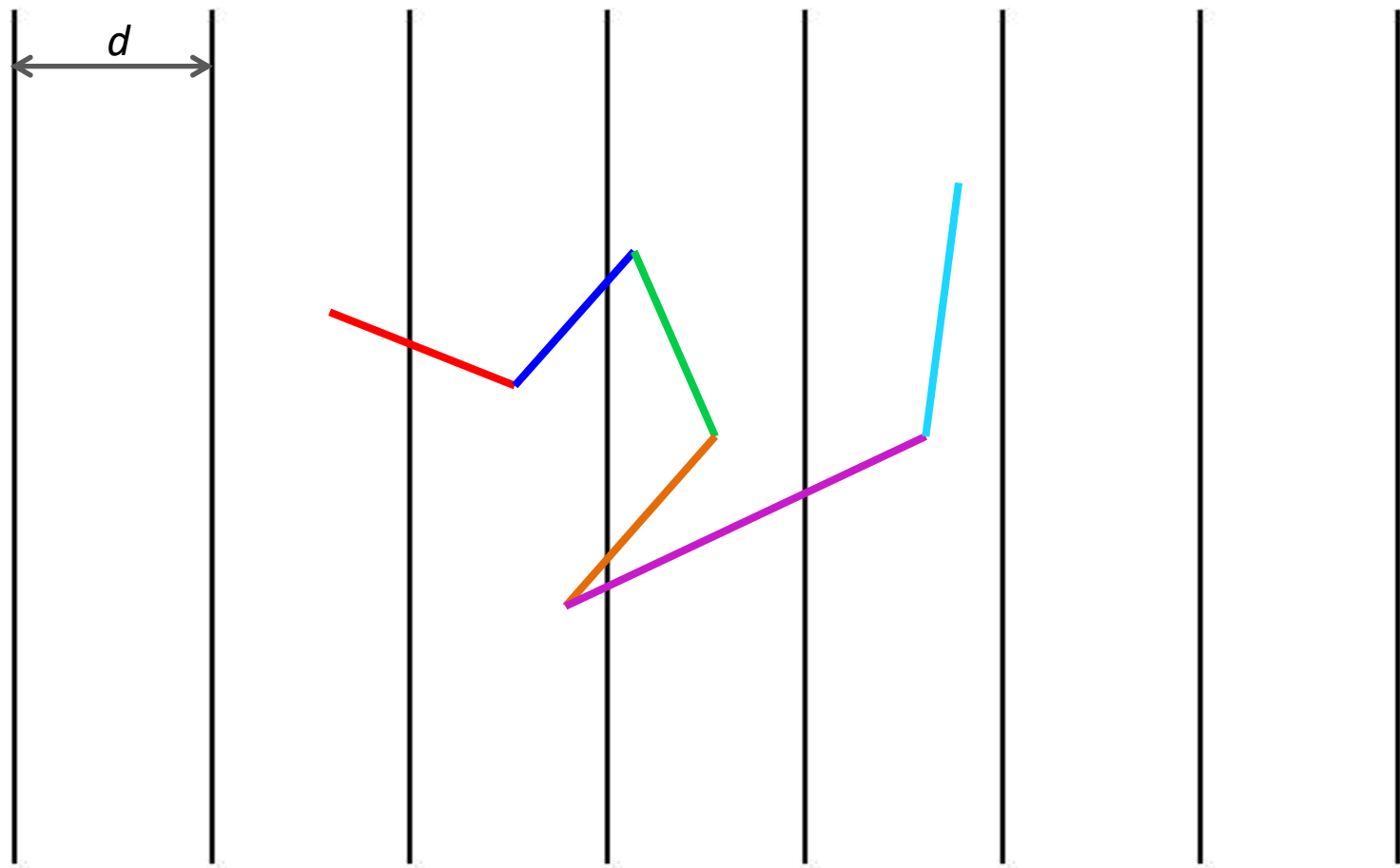
$$m(\ell) = m(\ell_1 + \ell_2) = m(\ell_1) + m(\ell_2)$$

L'aiguille brisée



$$m(\ell) = m(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 + \ell_6) = m(\ell_1) + m(\ell_2) + m(\ell_3) + m(\ell_4) + m(\ell_5) + m(\ell_6)$$

L'aiguille brisée

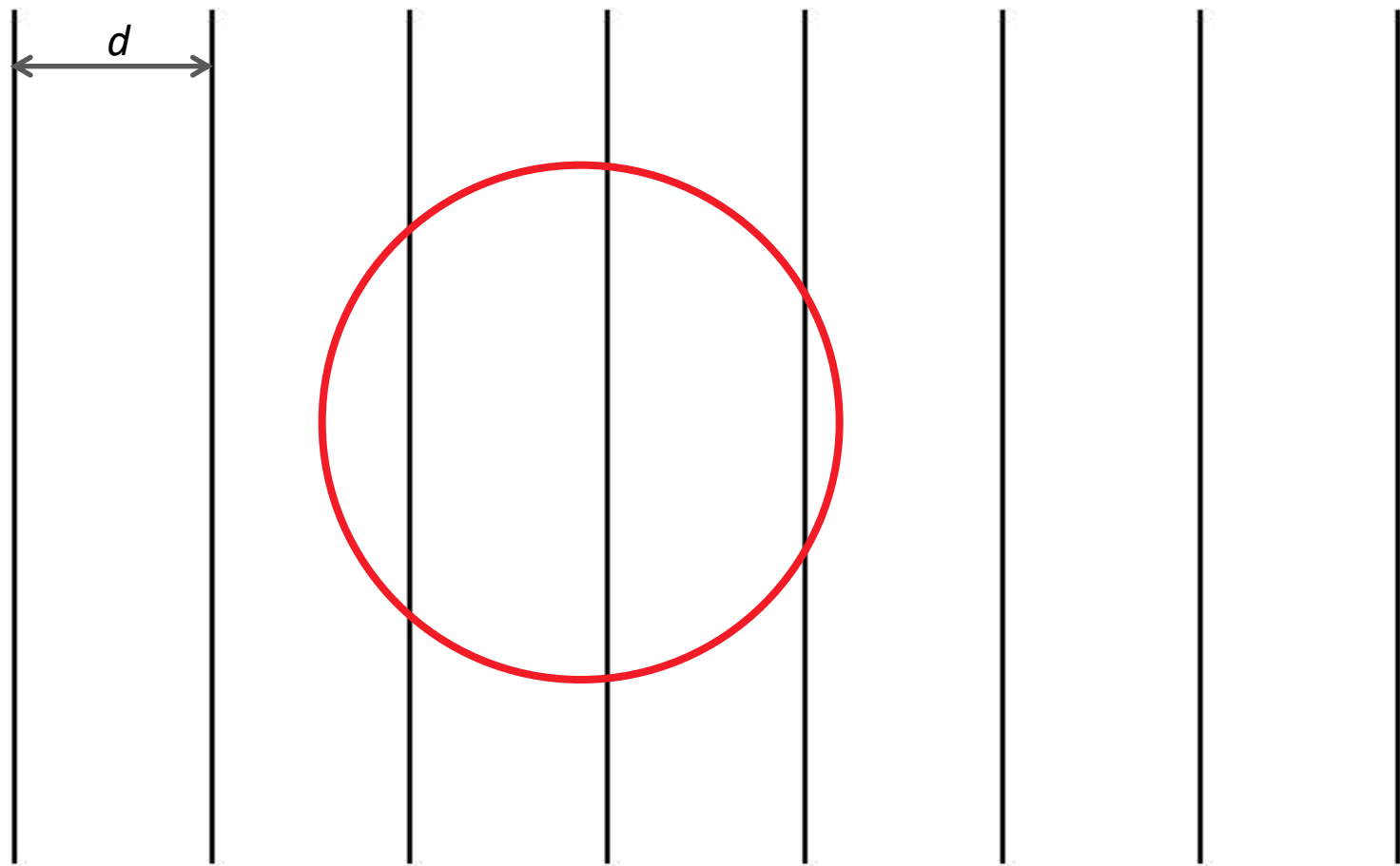


$$m(\ell) = m(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 + \ell_6) = m(\ell_1) + m(\ell_2) + m(\ell_3) + m(\ell_4) + m(\ell_5) + m(\ell_6)$$

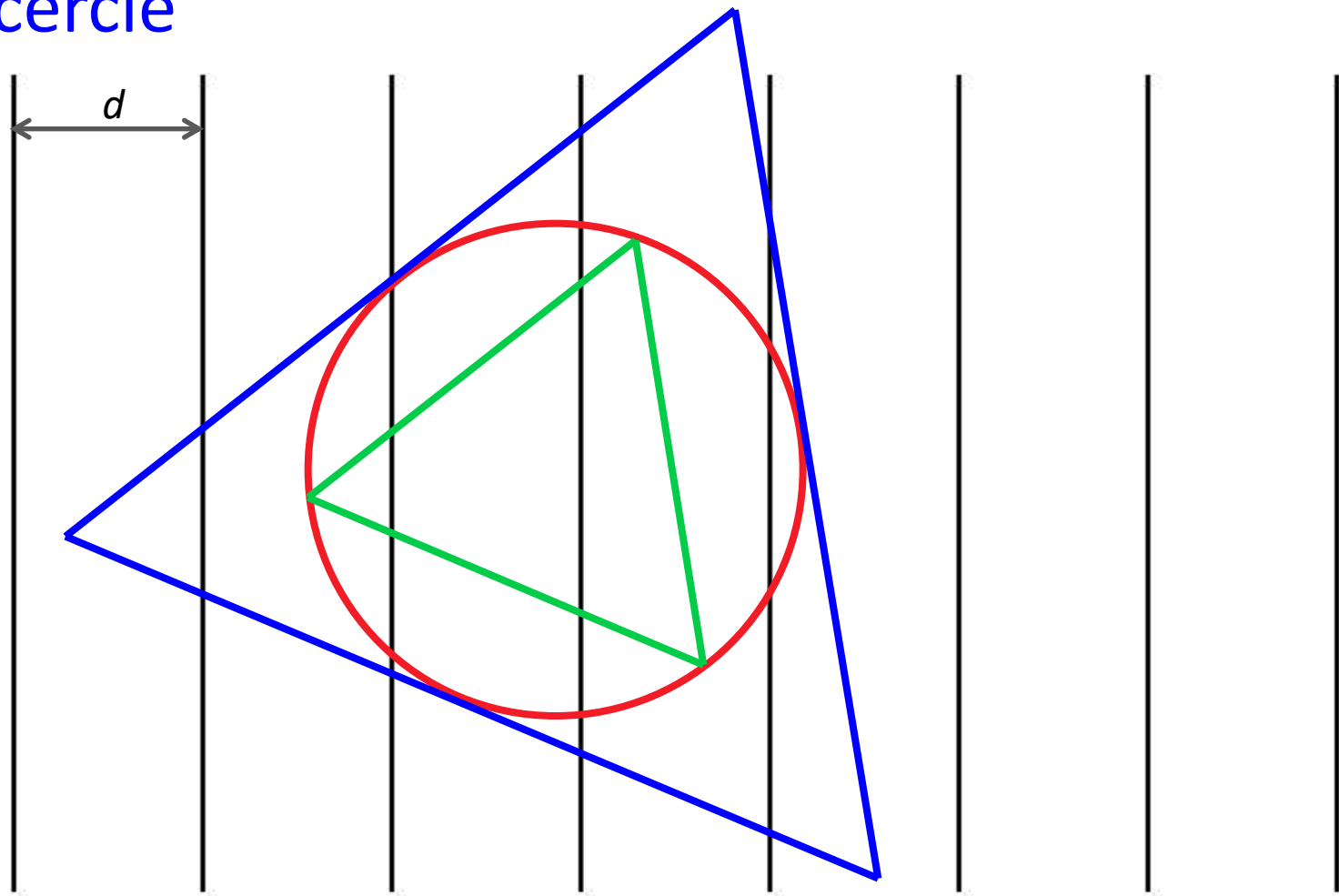
$m(\ell)$ est proportionnel à ℓ

$$m(\ell) = ? \times \ell$$

Le cercle

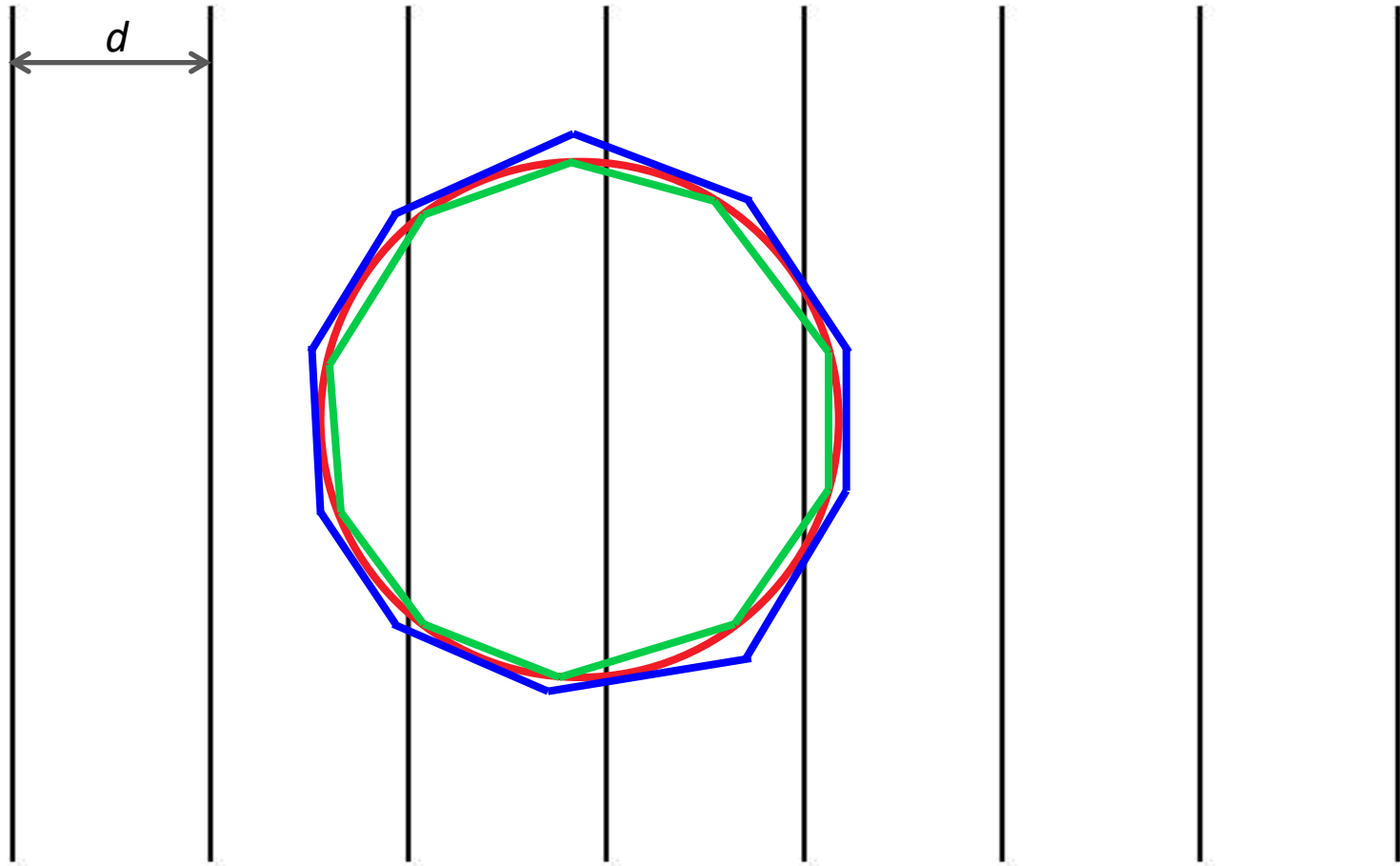


Le cercle



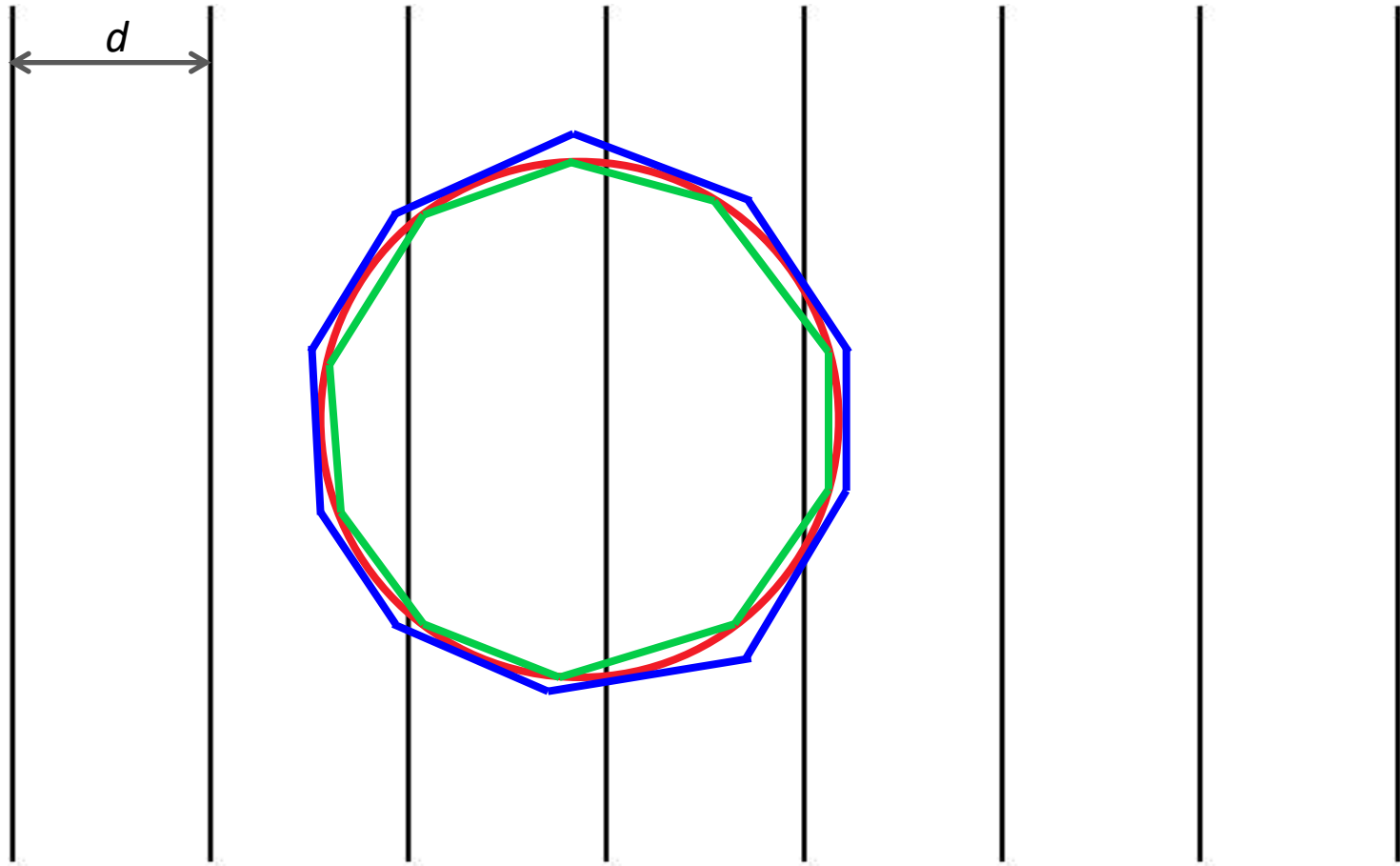
$$m(\ell_1) \leq m(\ell) \leq m(\ell_2)$$

Le cercle



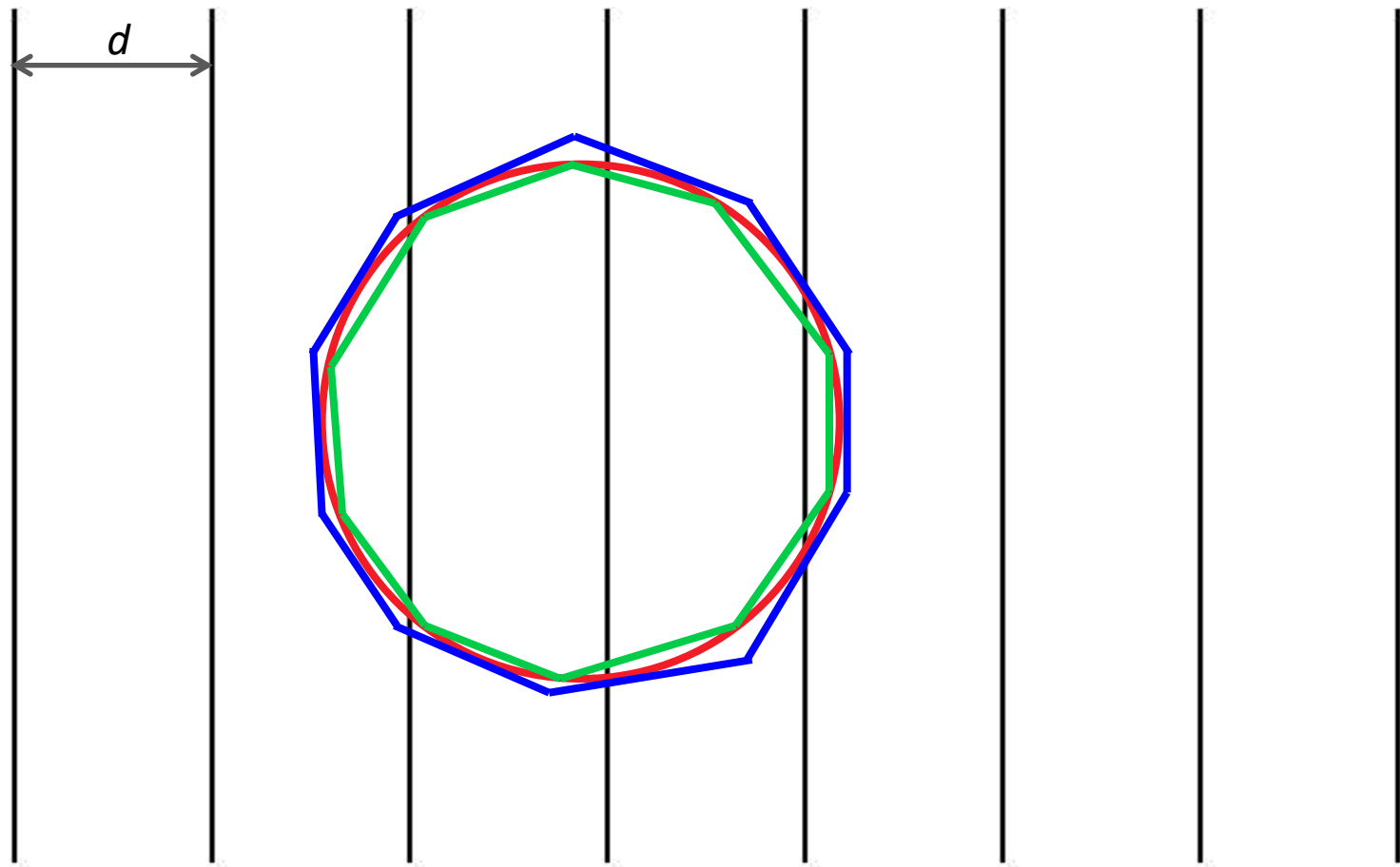
$$m(\ell_1) \leq m(\ell) \leq m(\ell_2)$$

Le cercle



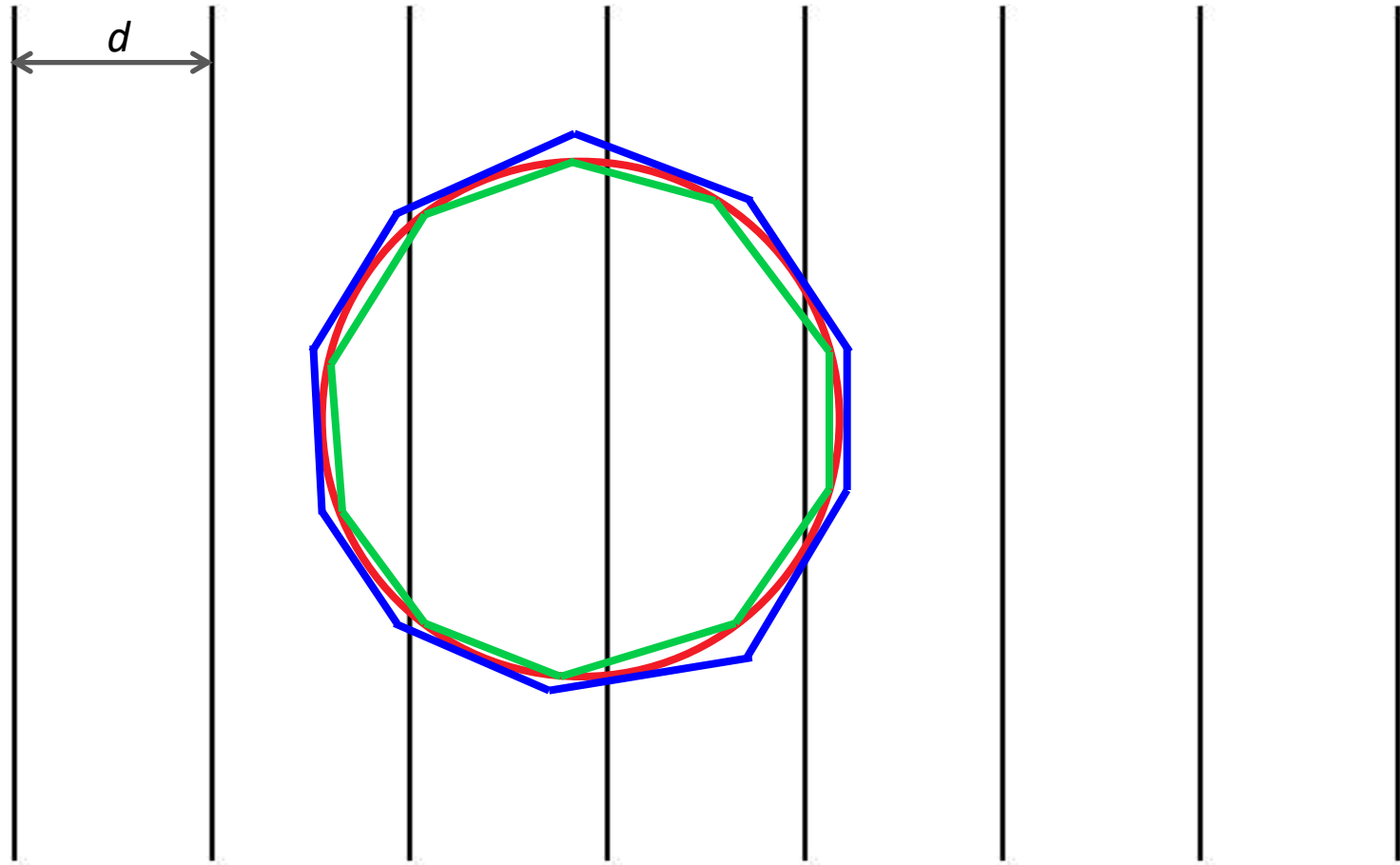
$$? \times l_1 \leq m(\ell) \leq ? \times l_2$$

Le cercle



$$? \times \ell \leq m(\ell) \leq ? \times \ell$$

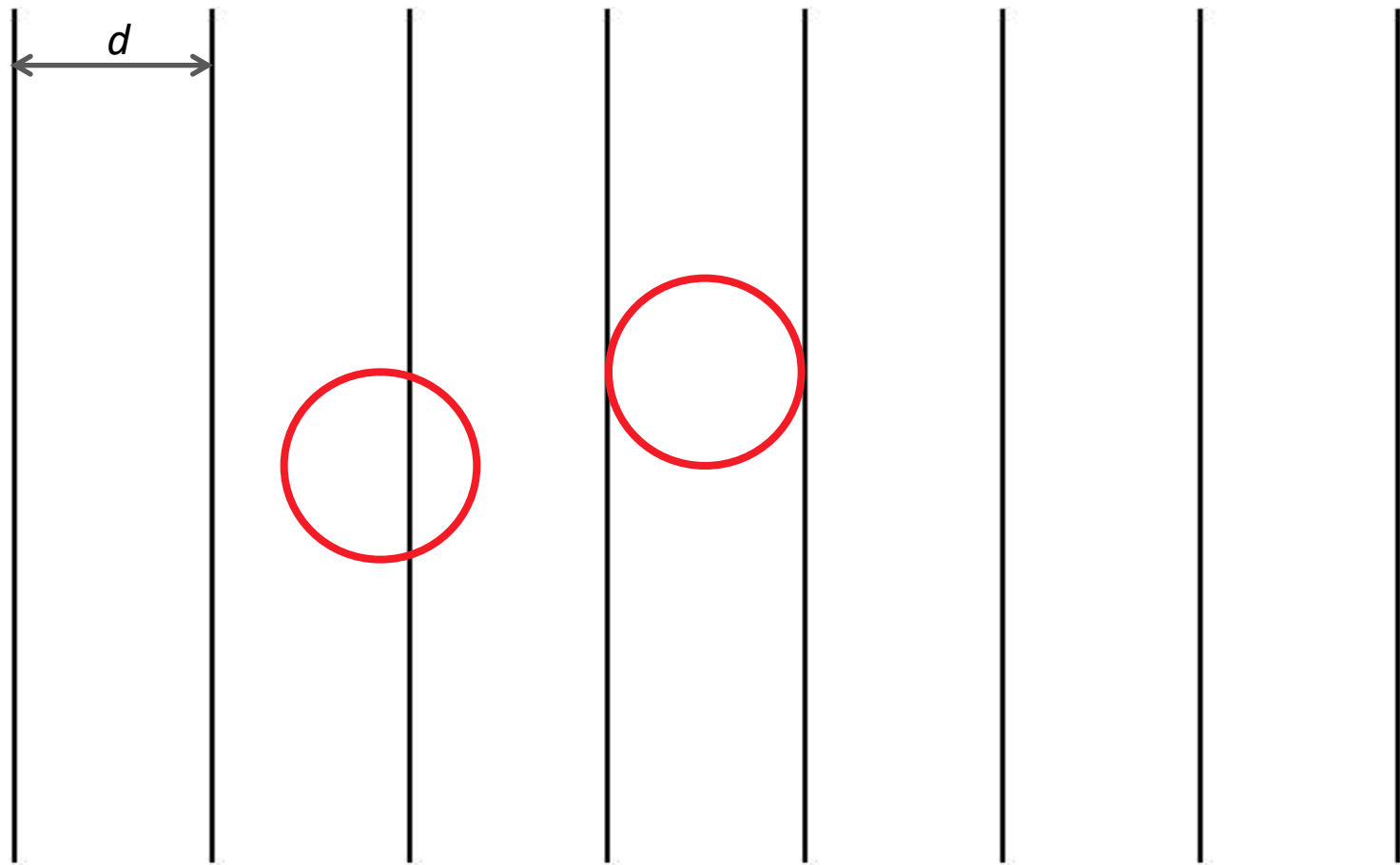
Le cercle



$$? \times \ell \leq m(\ell) \leq ? \times \ell$$

$$m(\ell) = ? \times \ell$$

Le cercle de diamètre d



Pour un cercle de diamètre d , $m(\ell) = 2 = ? \times \ell$.

Or $\ell = \pi \times d$.

Donc $2 = ? \times \pi \times d$.

D'où $? = 2/(\pi \times d)$.

π et l'aléatoire

nombre normal : fréquence d'apparition des chiffres (0, 1, 2, 3 , 4 ,5 ,6 ,7 ,8 , 9) dans son développement décimal est la même pour chacun d'entre eux (donc 1/10), et que c'est le cas pour toutes les suites de chiffres de taille fixée.

Un rationnel n'est pas normal.

Presque tous les nombres réels sont normaux, mais
on en connaît que très peu.

Conjecture : π est normal.

On utilise souvent les décimales de π comme générateur aléatoire.