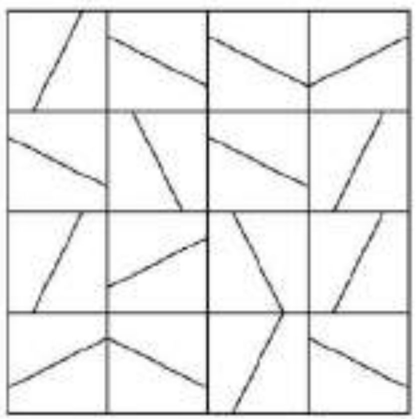
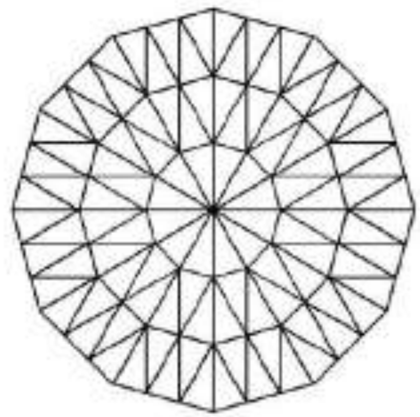
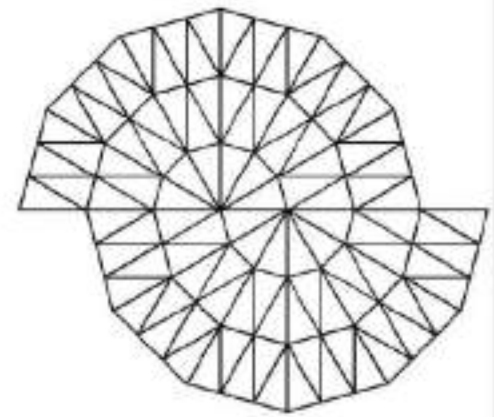
Pavages Apériodiques

Pavages Apériodiques

Existe-t-il des jeux de tuiles avec lesquels le pavage est forcément **apériodique** ?

1966 : Berger OUI Jeu à 20426 tuiles.

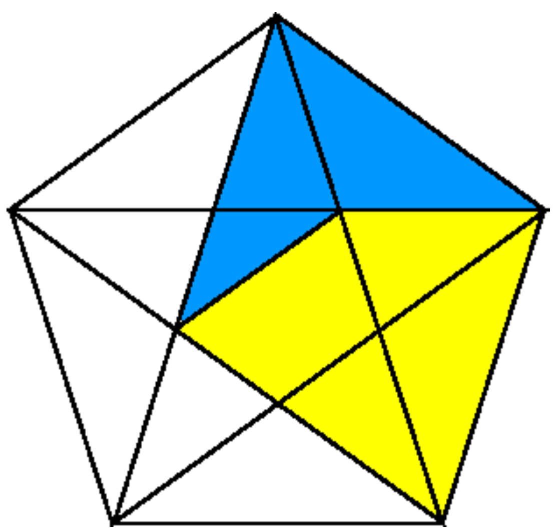
1971 : Robinson OUI Jeu à 6 tuiles.

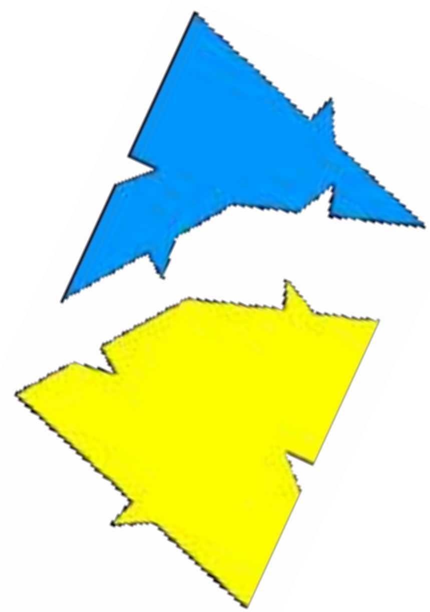
Raphael M. Robinson
1911 - 1995

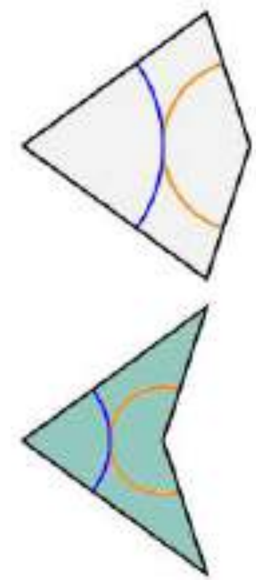
1974 : Penrose OUI Jeu à 2 tuiles.

Roger Penrose
1931 -

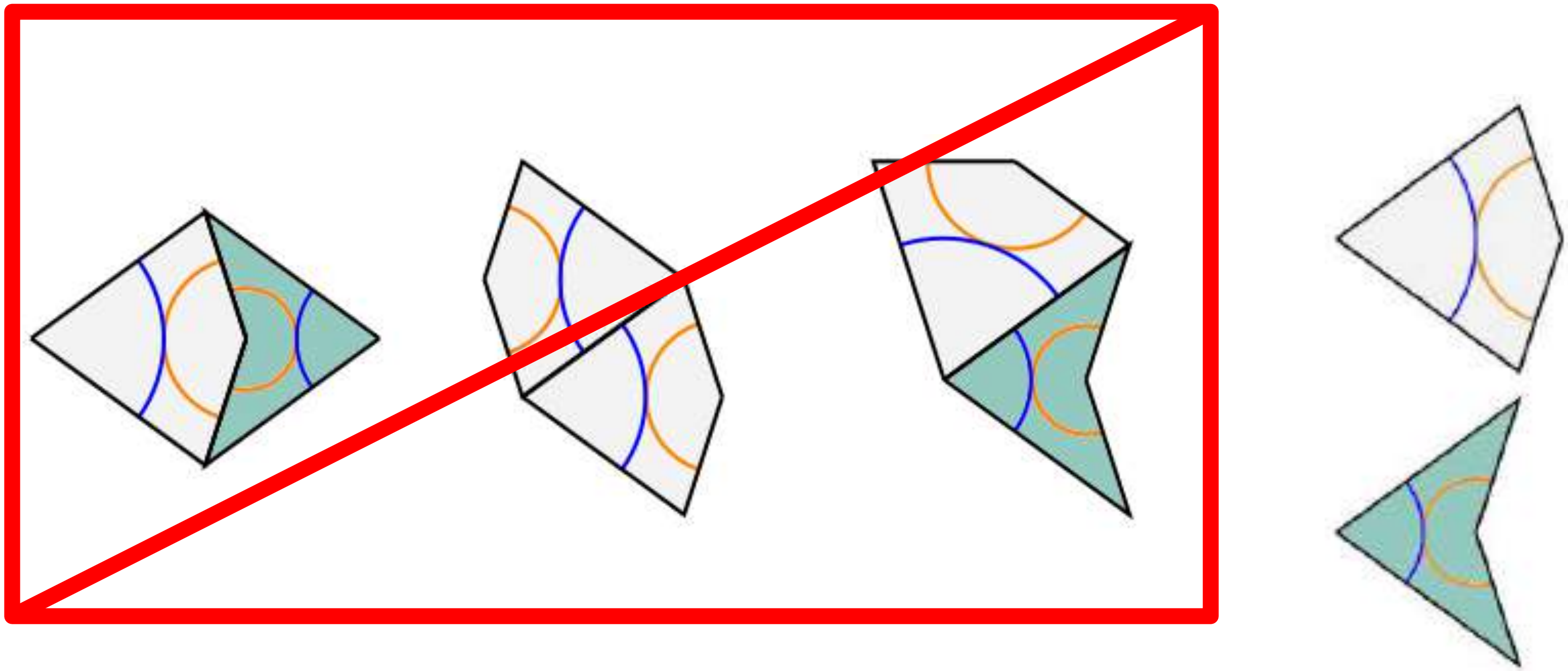
Pavages de Penrose





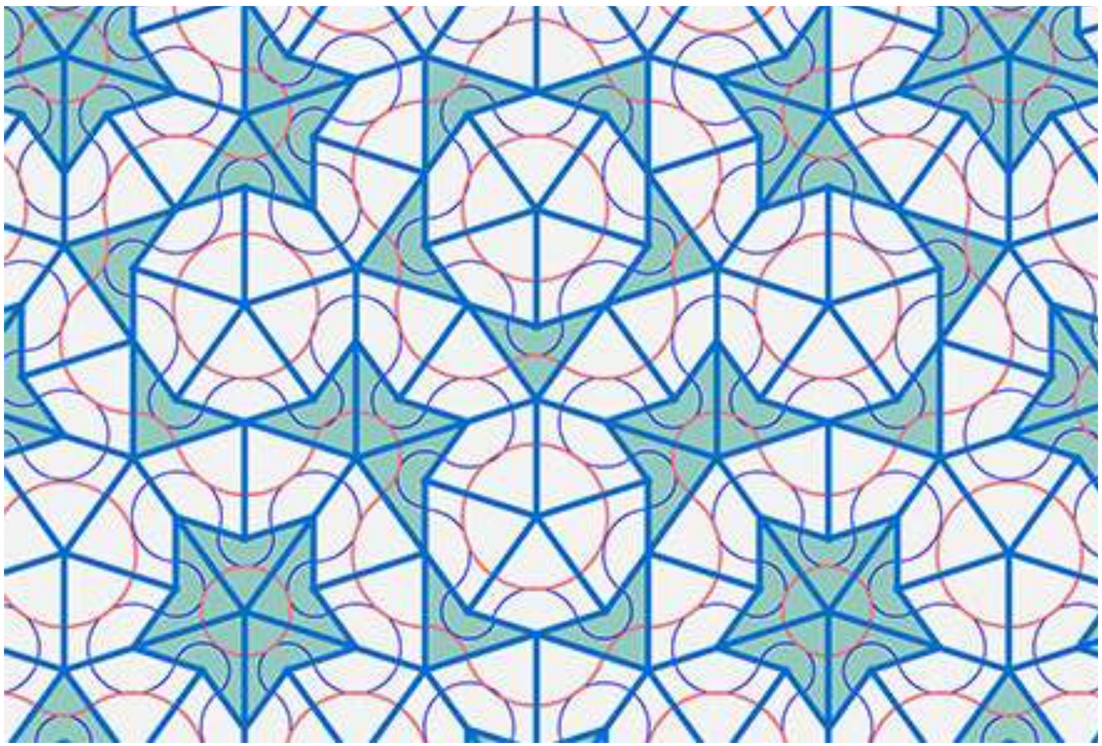


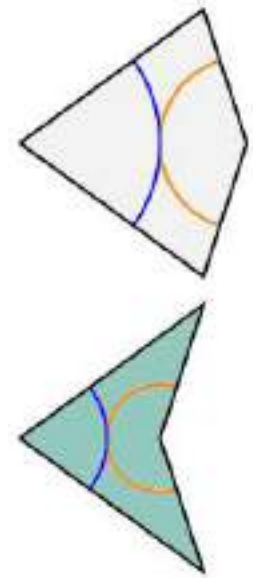
PAVAGES DE PENROSE



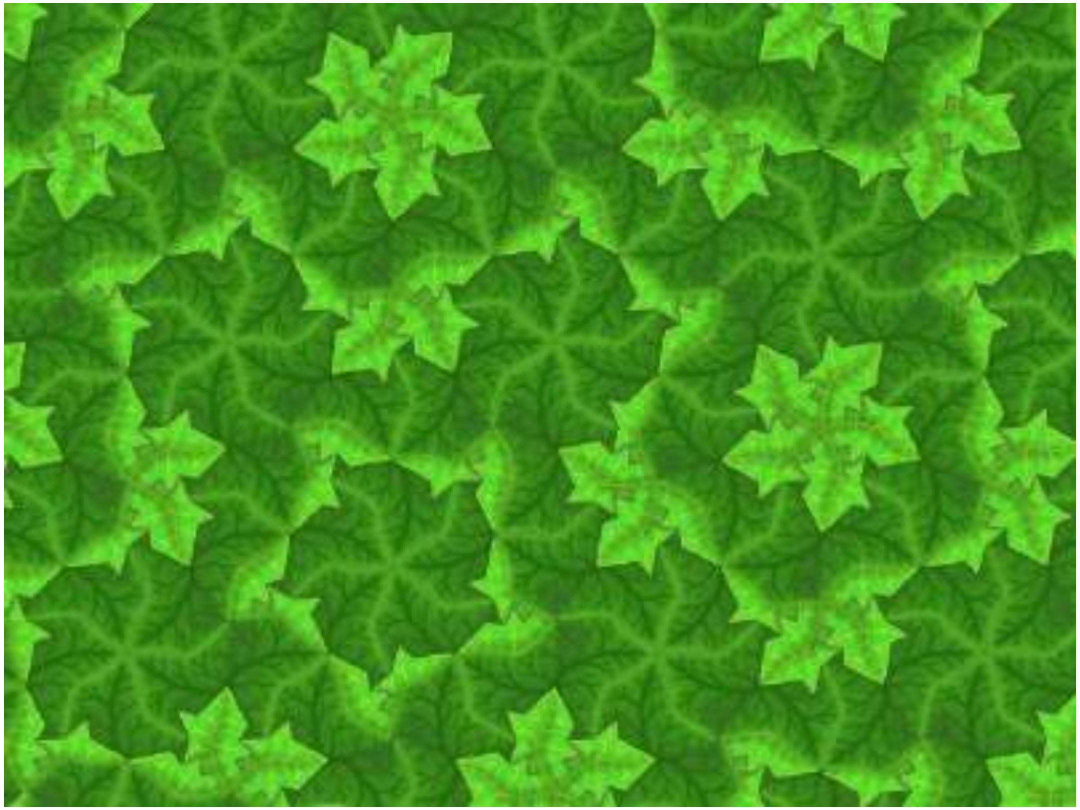
Configurations interdites

Pavages de Penrose





Pavages de Penrose



PAVAGES ET ARCHITECTURE INSLAMIQUE

Du VIII^{ème} au XV^{ème} siècle, les architectes musulmans ont perfectionné l'art du pavage à un niveau de complexité prodigieux. Ils connaissaient tous les pavages périodiques

Mausolée Darb-i Iman à Ispahan (Iran), construit en **1453**.

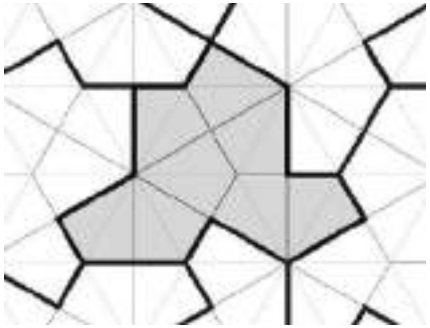
Le **pavage similaire à celui de Penrose**.

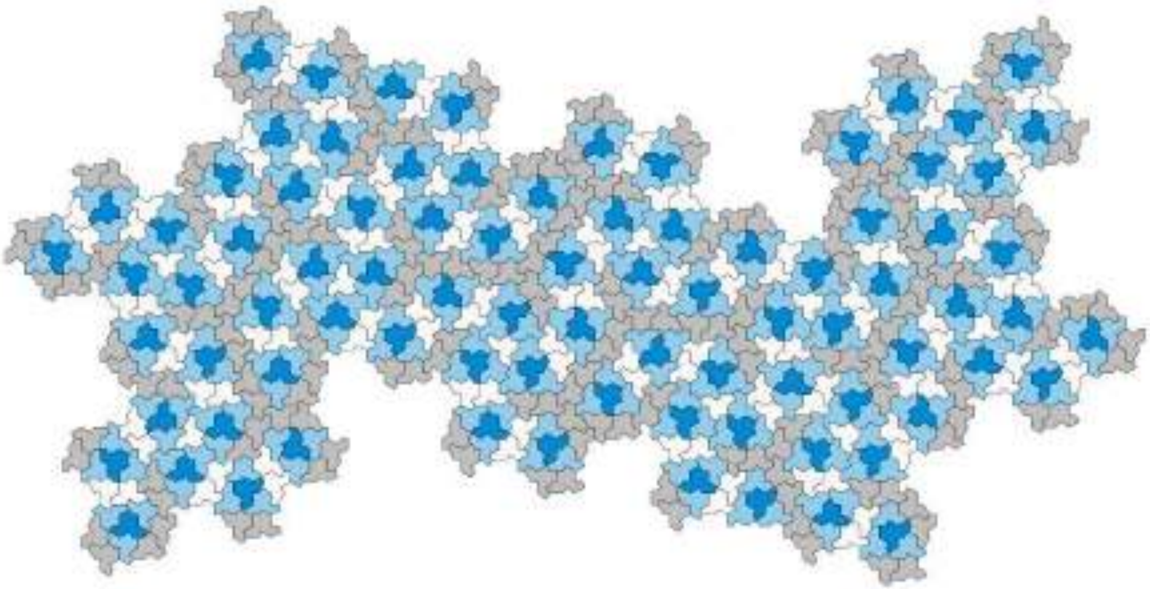
Que savaient les architectes des propriétés mathématiques sous-jacentes ??

``Einstein'' existe !

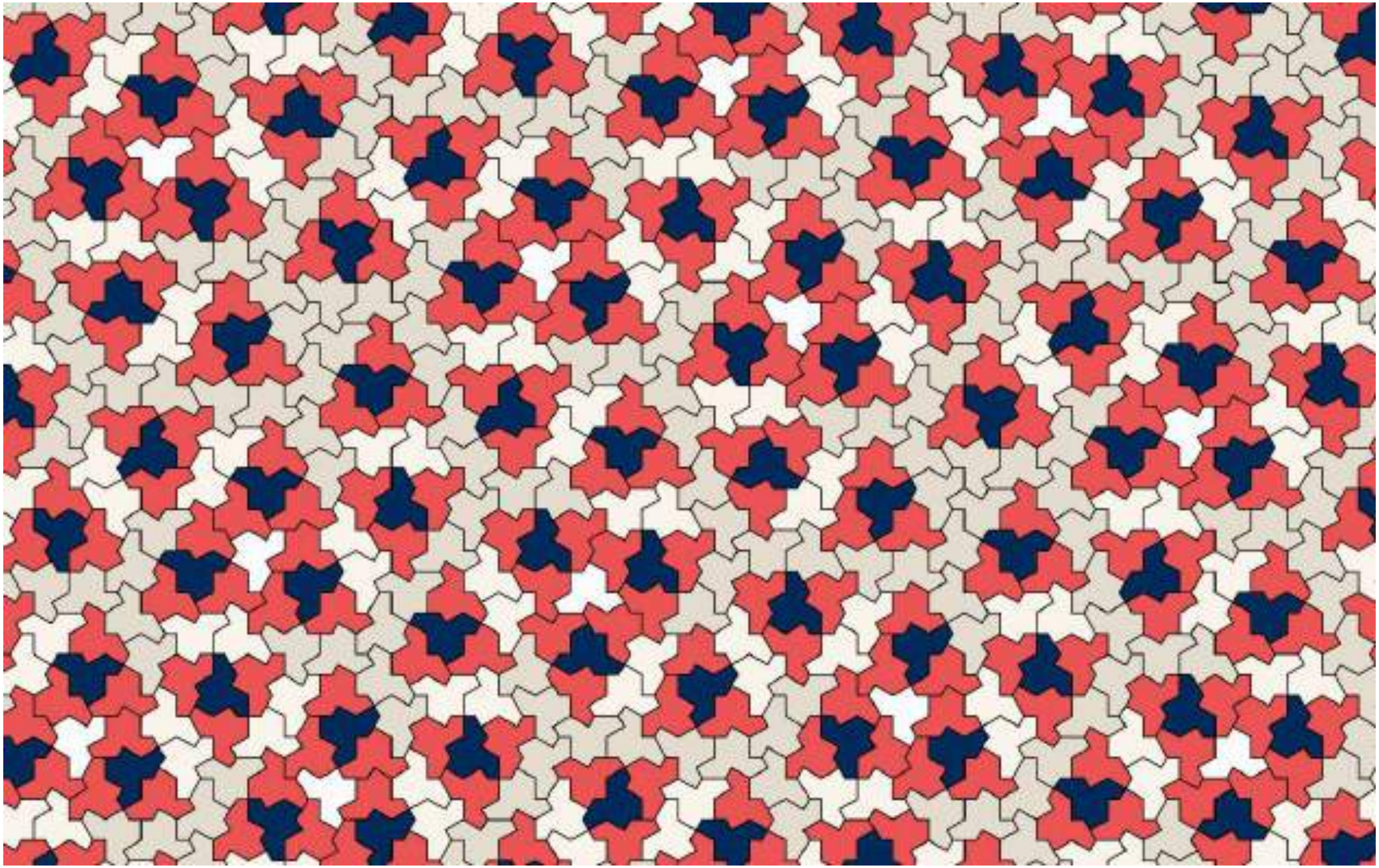
D. Smith, J. S. Myers, C. S. Kaplan, and C. Goodman-Strauss
(Yorkshire, Cambrige, Waterloo, and Arkansas), 2023.

Il existe une tuile (ein Stein) avec laquelle on peut **paver le plan**, mais **uniquement de manière apériodique**.





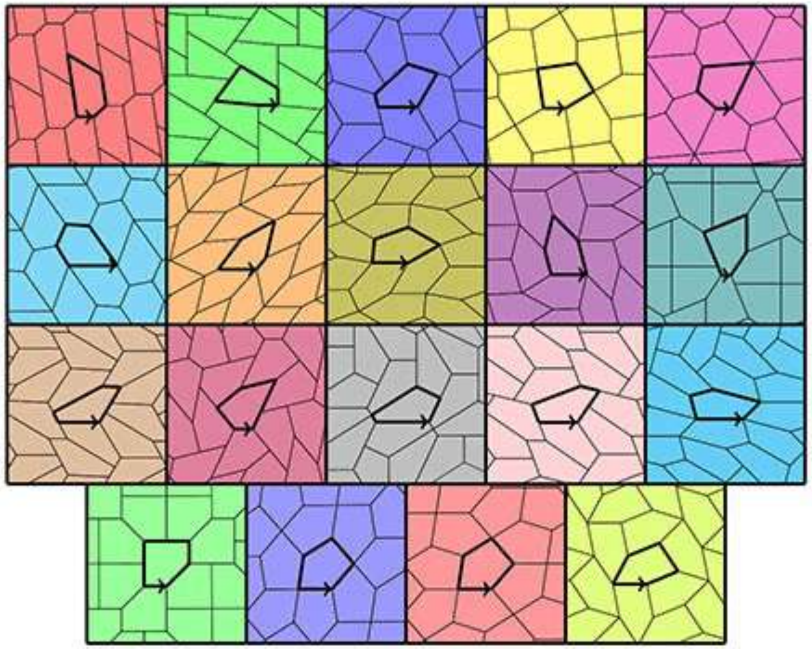
``Einstein'' existe !



PAVAGES AVEC DES POLYGONES CONVEXES

1918 Karl Reinhardt : **Quels sont les polygones avec lesquels on peut paver le plan ?**

- tous les triangles et quadrilatères ;
- 3 types d'hexagones ; un type d'heptagones ;
- **Restait le cas des pentagones.**



M. Rao, CNRS, Lyon

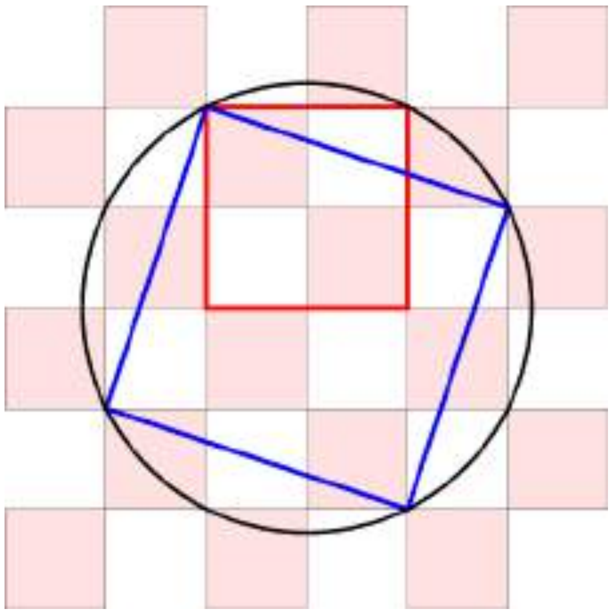
15 familles avaient été trouvées (la dernière en 2015).

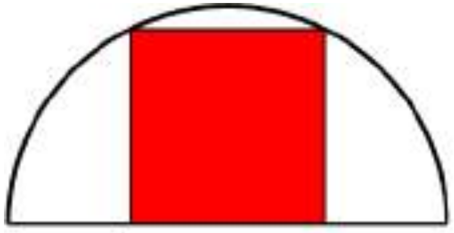
M. Rao a montré que ce sont les seules en **2017**.

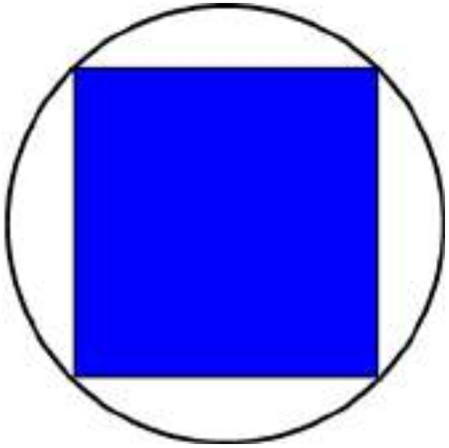
Il a identifié 371 familles potentielles, qu'il a ensuite testées **par ordinateur.**

CARRÉ INSCRITS

Théorème : L’aire d’un carré inscrit dans un demi-cercle vaut deux cinquièmes (2/5) de celle d’un carré inscrit dans un cercle de même rayon.



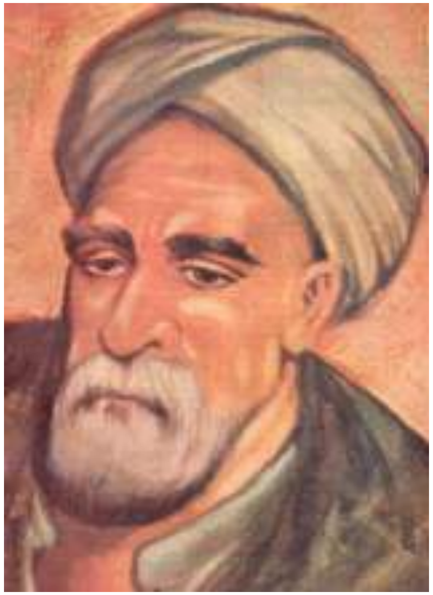




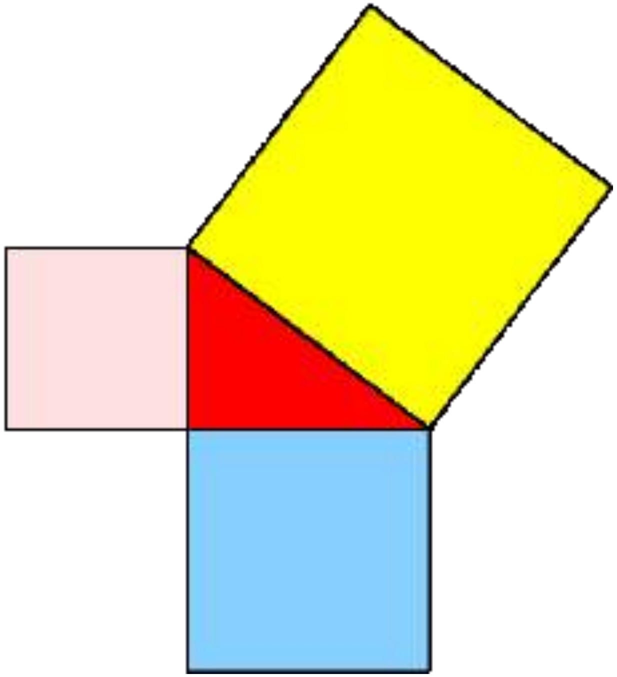
LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

Pour un triangle rectangle, la surface du carré de l’hypothénuse est égale à la somme des surfaces des carrés des deux autres côtés .

Preuve à l’aide d’un pavage.

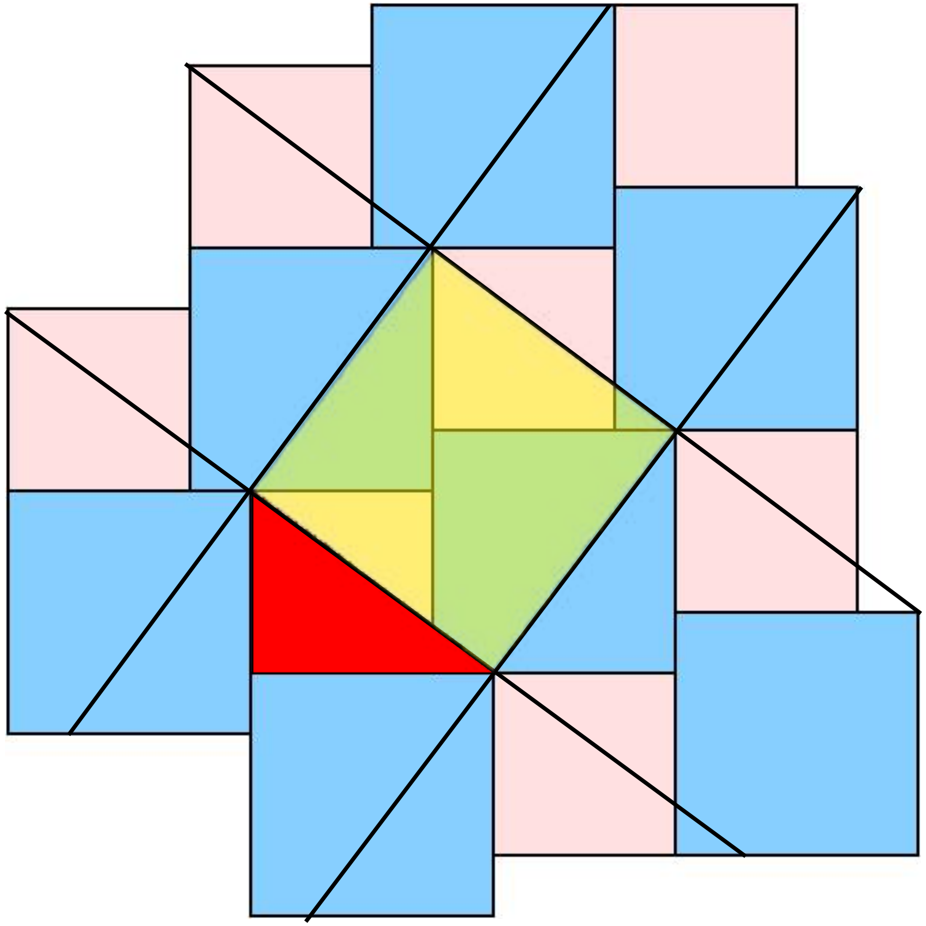


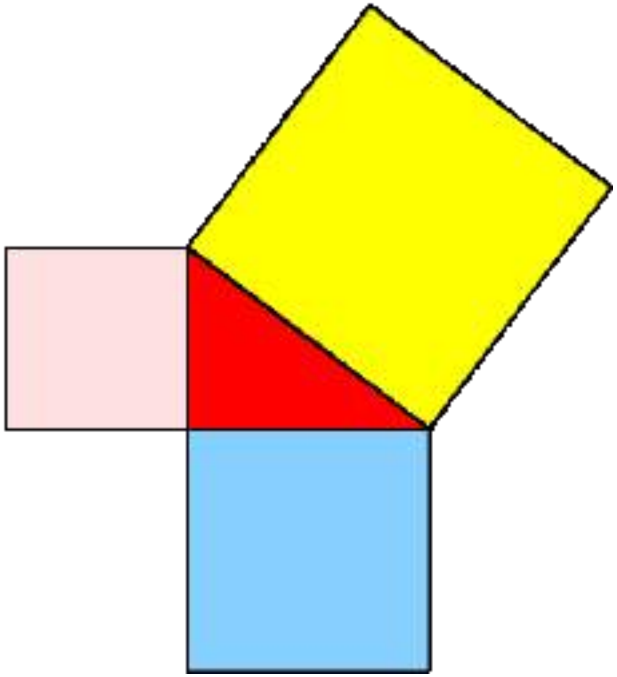
Al-Nayrizi (865 – 922)
Abū’l-‘Abbās al-Faḍl ibn Ḥātim al-Nairīzī



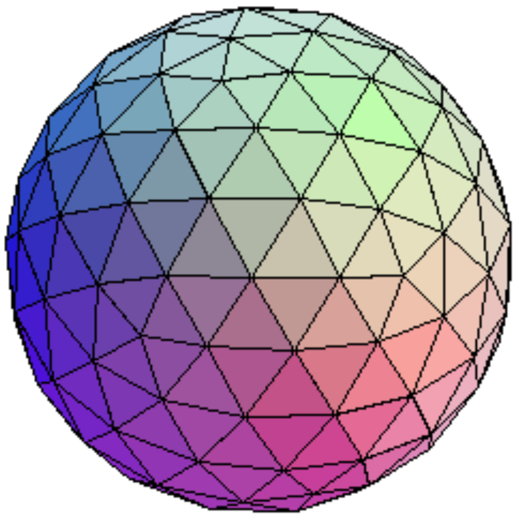
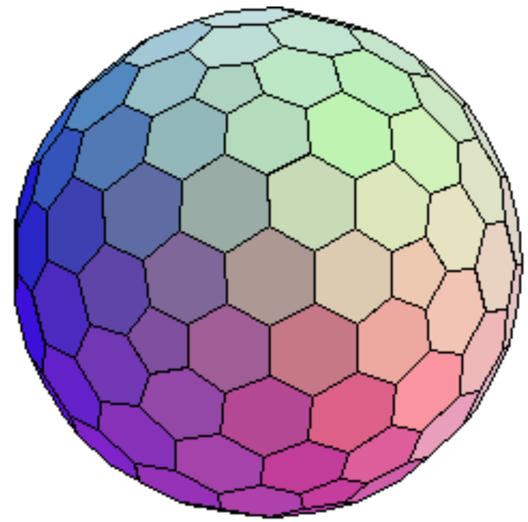
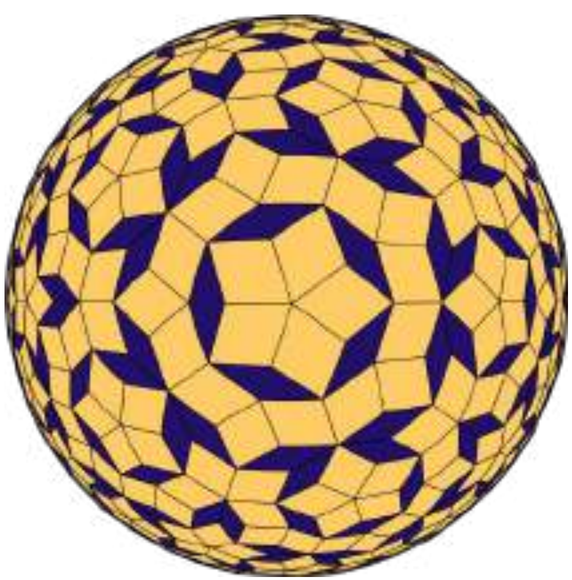
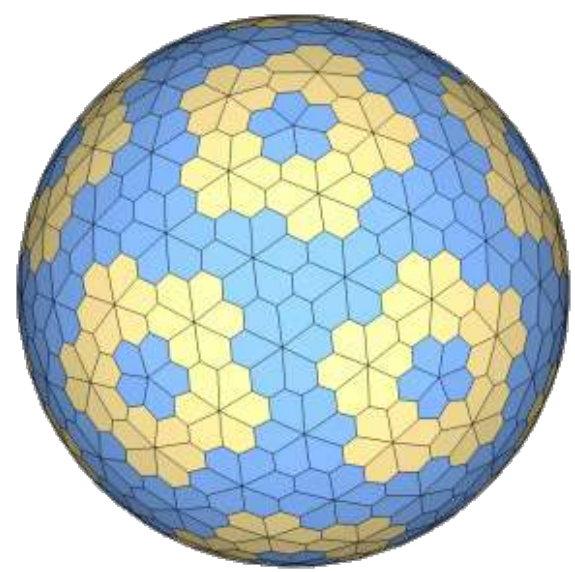
LE THÉORÈME DE PYTHAGORE

Pour un triangle rectangle, l'aire du carré de l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés des deux autres côtés .





Pavages de la Sphère

Structure du Ballon de Football

20 hexagones (blancs)

12 pentagones (noirs)

Structure du Ballon de Football

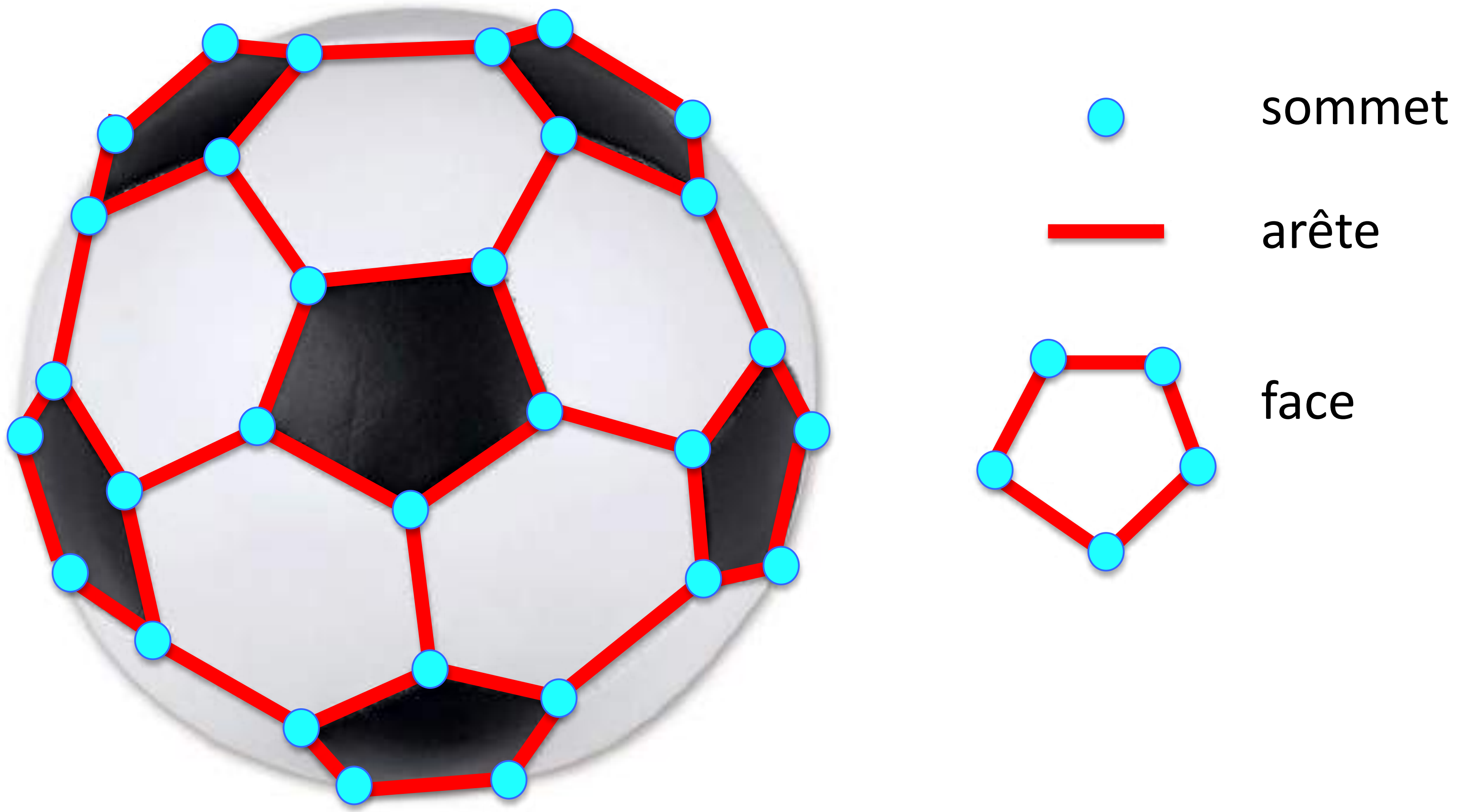
20 hexagones (blancs)

12 pentagones (noirs)

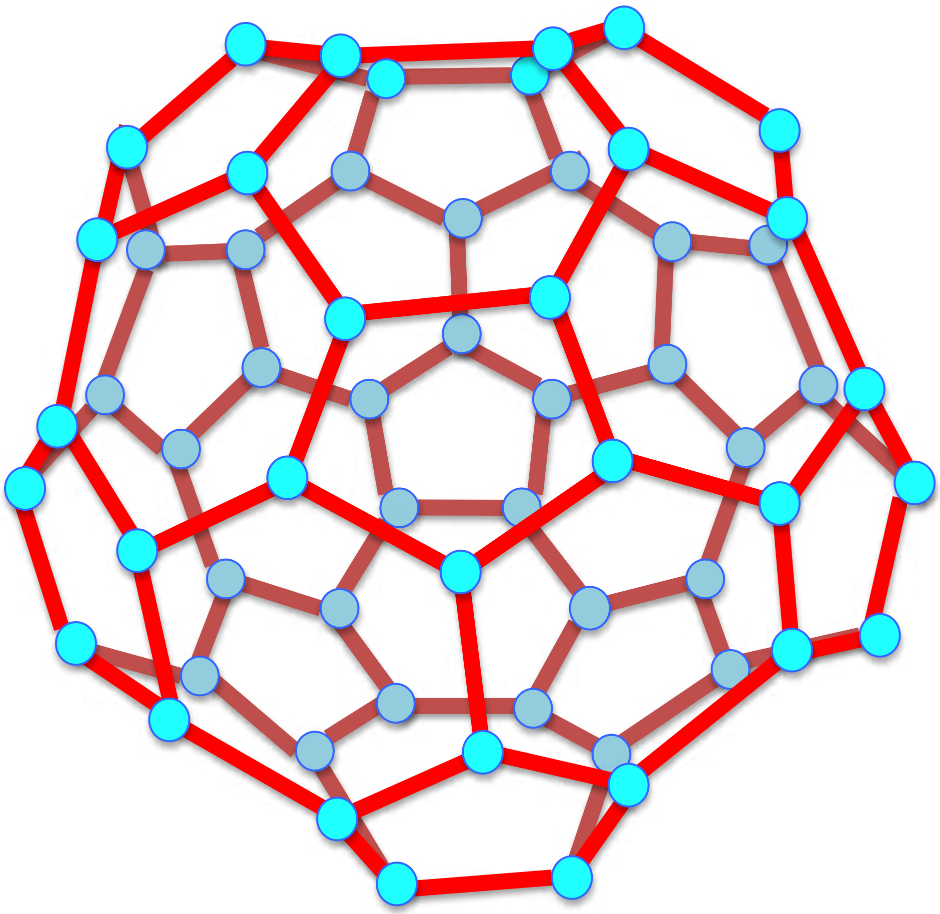
Pourquoi cela ?

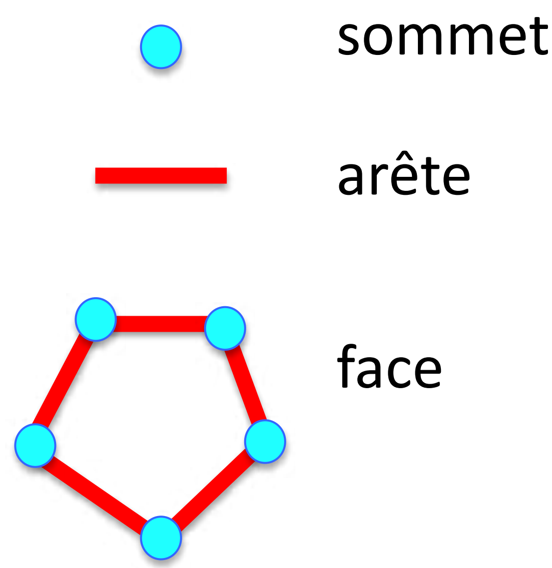
Peut-on faire un ballon avec un seul type de polygones ?

STRUCTURE DU BALLON DE FOOTBALL



STRUCTURE DU BALLON DE FOOTBALL





C'est un **polyèdre** !

Polyèdres

Formule d'Euler :

nombre de sommets + nombre de faces = nombre d'arêtes + 2

Pour le ballon de foot :

60 sommets
32 faces
90 arêtes

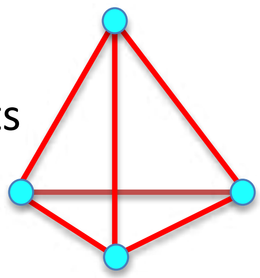
Leonhard Euler
1707 – 1783

Polyèdres réguliers

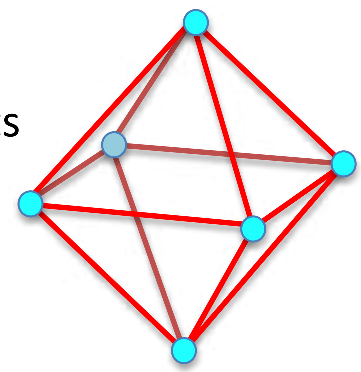
Formule d'Euler :

nombre de sommets + nombre de faces = nombre d'arêtes + 2

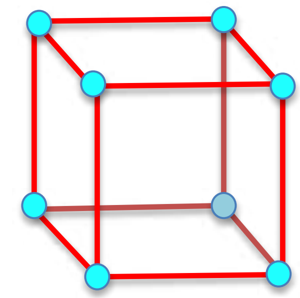
Tétraèdre
4 sommets
4 faces
6 arêtes



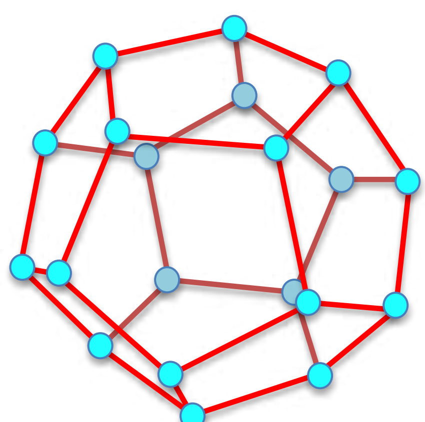
Octaèdre
6 sommets
8 faces
12 arêtes



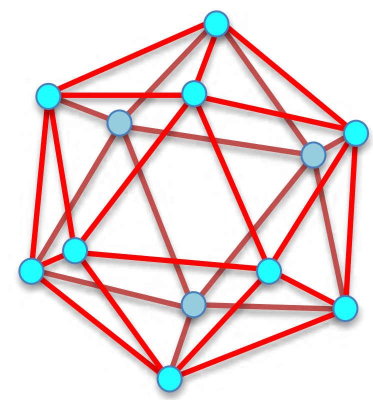
Cube
8 sommets
6 faces
12 arêtes



Dodécaèdre
20 sommets
12 faces
30 arêtes



Icosaèdre
12 sommets
20 faces
30 arêtes



POLYÈDRE AVEC UNIQUEMENT DES HEXAGONES ?

Formule d'Euler :

nombre de sommets + nombre de faces = nombre d'arêtes + 2

Supposons qu'il y ait **n faces hexagonales**.

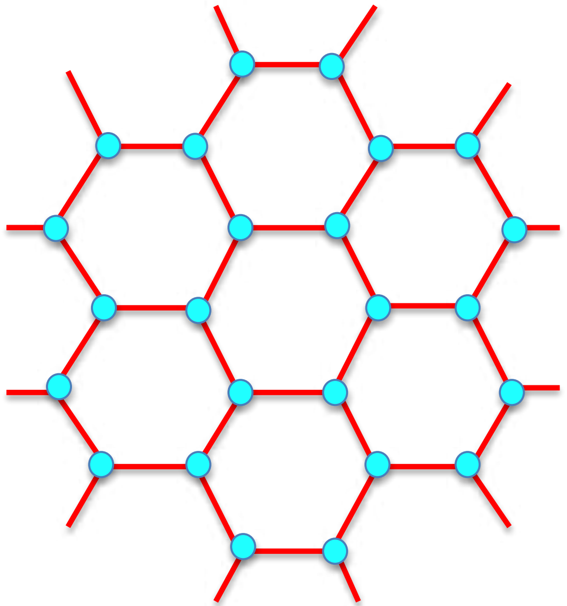
Chaque arête est dans 2 faces.

il y a 6n/2 = **3n arêtes.**

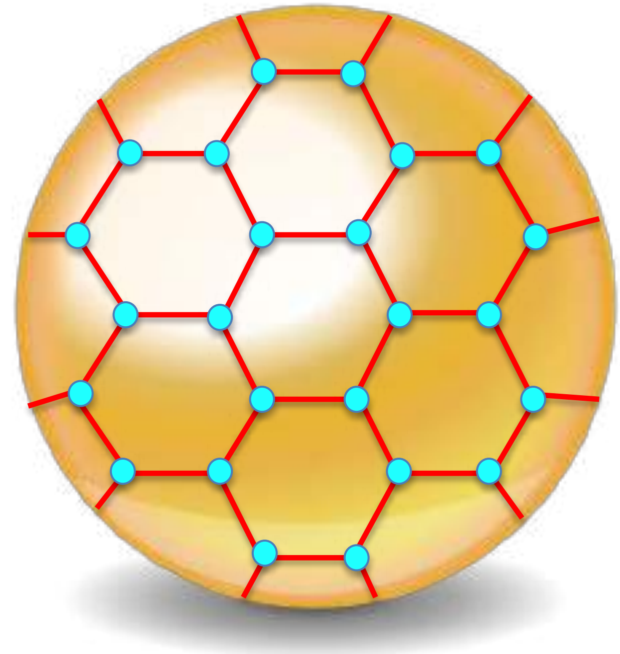
Chaque sommet est dans 3 faces.

il y a 6n/3 = **2n sommets.**

IMPOSSIBLE d'après la Formule d'Euler.

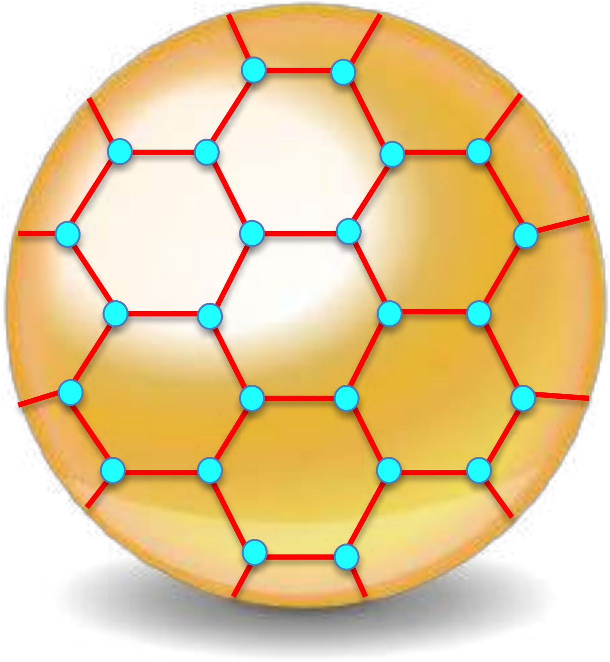


Polyèdre avec uniquement des Hexagones ?



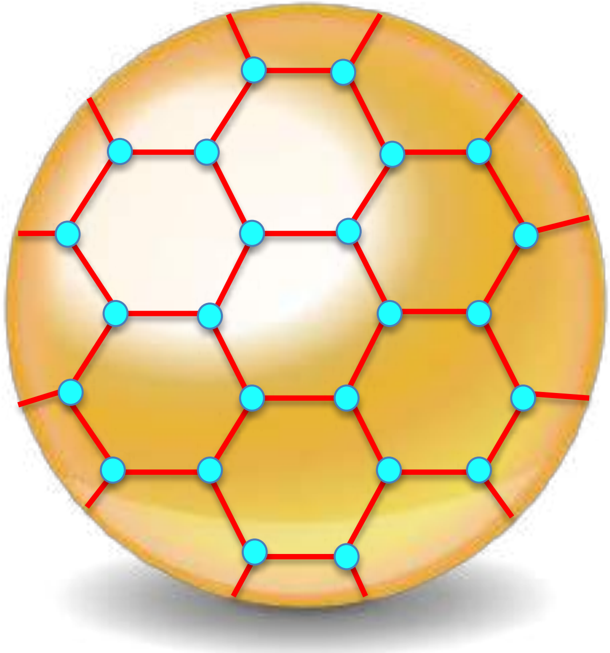
Polyèdre avec uniquement des Hexagones ?

Supposons qu'il y ait **n faces hexagonales**.



Polyèdre avec uniquement des Hexagones ?

Supposons qu'il y ait **n faces hexagonales**.

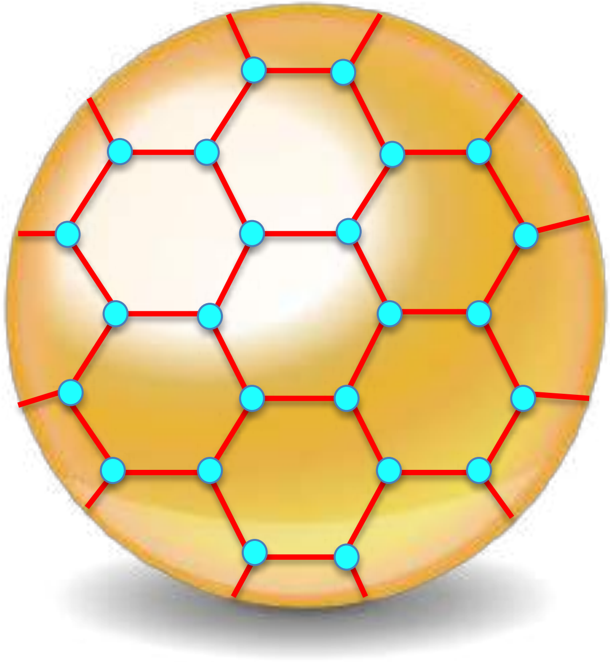


Chaque arête est dans 2 faces.

il y a 6n/2 = **3n arêtes.**

Polyèdre avec uniquement des Hexagones ?

Supposons qu'il y ait **n faces hexagonales**.



Chaque arête est dans 2 faces.

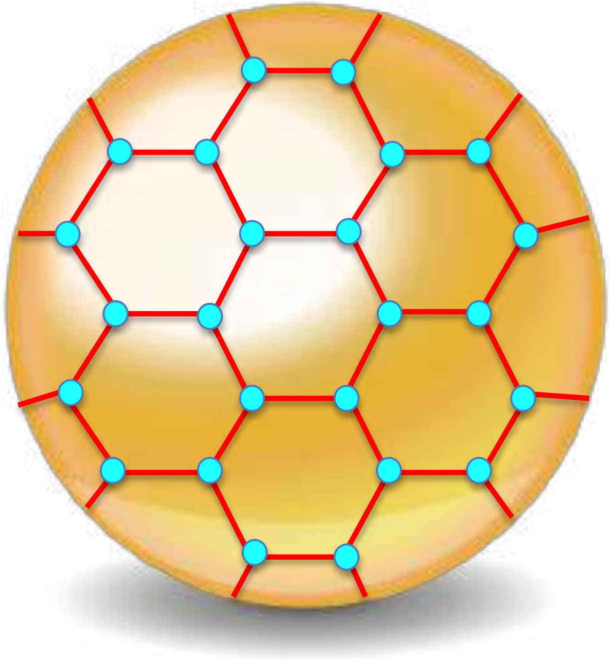
il y a 6n/2 = **3n arêtes.**

Chaque sommet est dans 3 faces.

il y a 6n/3 = **2n sommets.**

POLYÈDRE AVEC UNIQUEMENT DES HEXAGONES ?

Supposons qu'il y ait **n faces hexagonales**.



Chaque arête est dans 2 faces.

il y a 6n/2 = **3n arêtes.**

Chaque sommet est dans 3 faces.

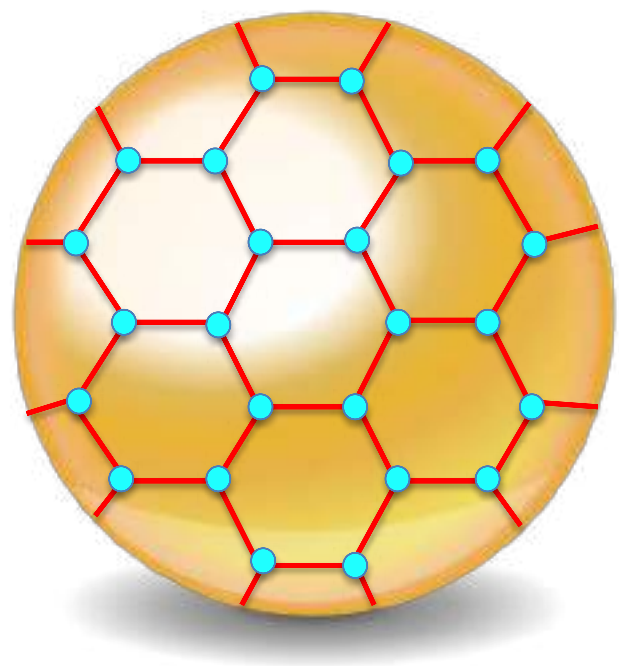
il y a 6n/3 = **2n sommets.**

Formule d'Euler :

nombre de sommets + nombre de faces = nombre d'arêtes + 2

Polyèdre avec uniquement des Hexagones ?

Supposons qu'il y ait **n faces hexagonales**.



Chaque arête est dans 2 faces.

il y a 6n/2 = **3n arêtes.**

Chaque sommet est dans 3 faces.

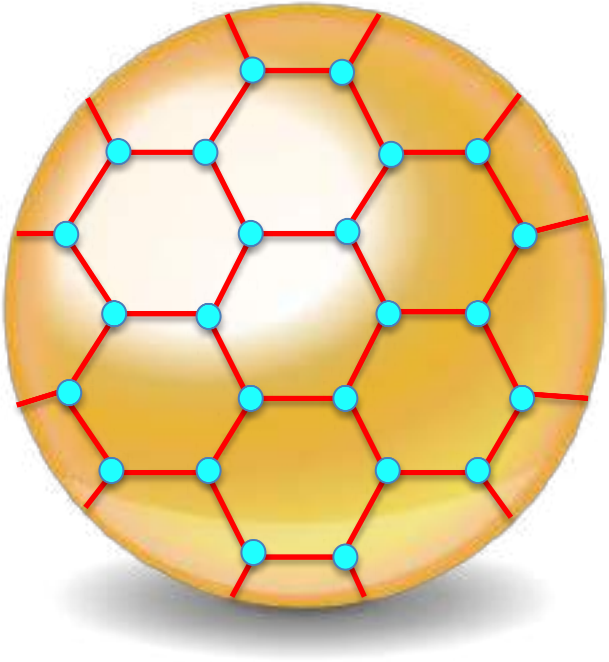
il y a 6n/3 = **2n sommets.**

Formule d'Euler :

$$2n \quad + \quad n \quad = \quad 3n \quad + 2$$

Polyèdre avec uniquement des Hexagones ?

Supposons qu'il y ait **n faces hexagonales**.



Chaque arête est dans 2 faces.

il y a $6n/2 =$ **3n arêtes.**

Chaque sommet est dans 3 faces.

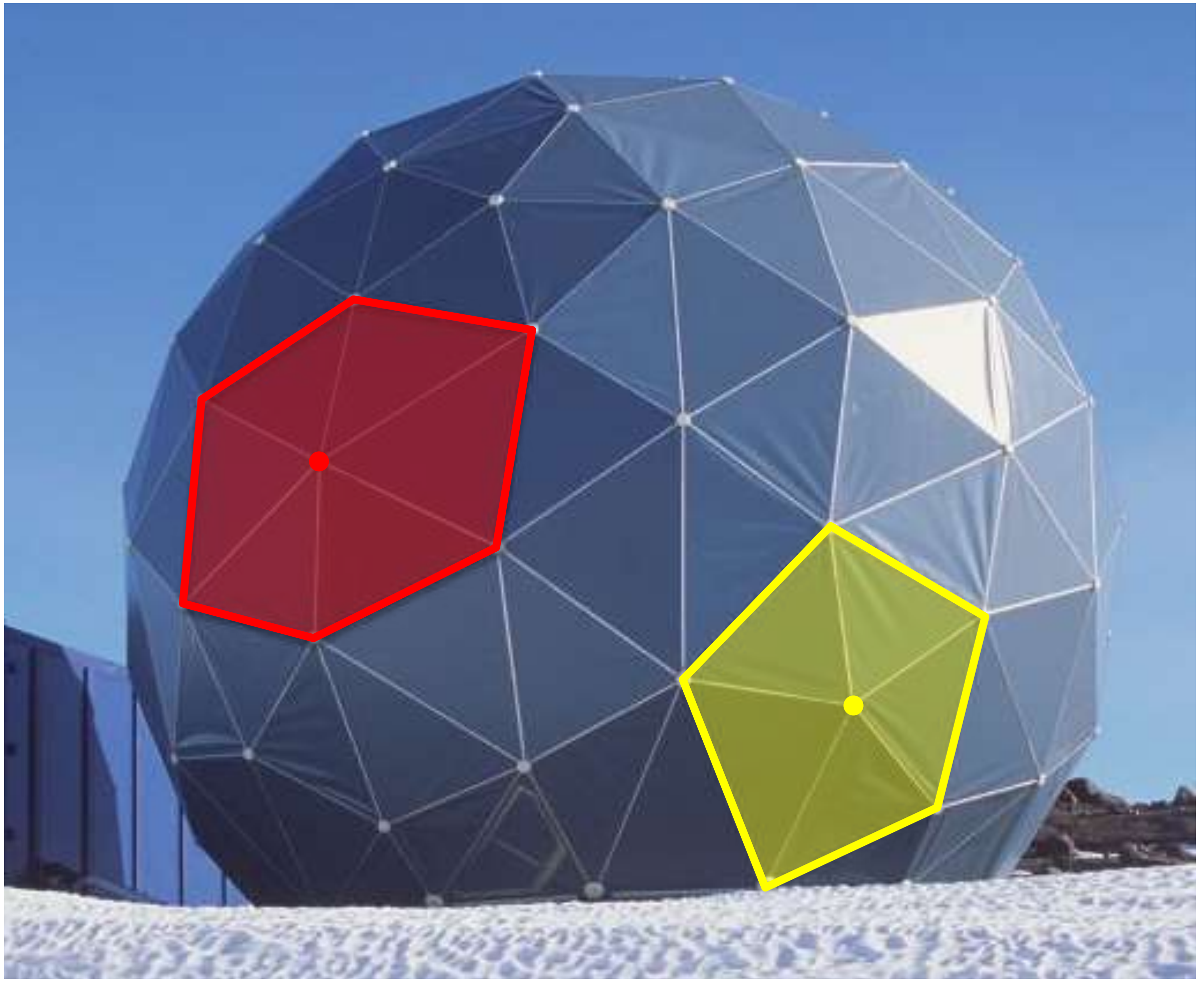
il y a $6n/3 =$ **2n sommets.**

Formule d'Euler :

$$\boxed{3n = 3n + 2}$$

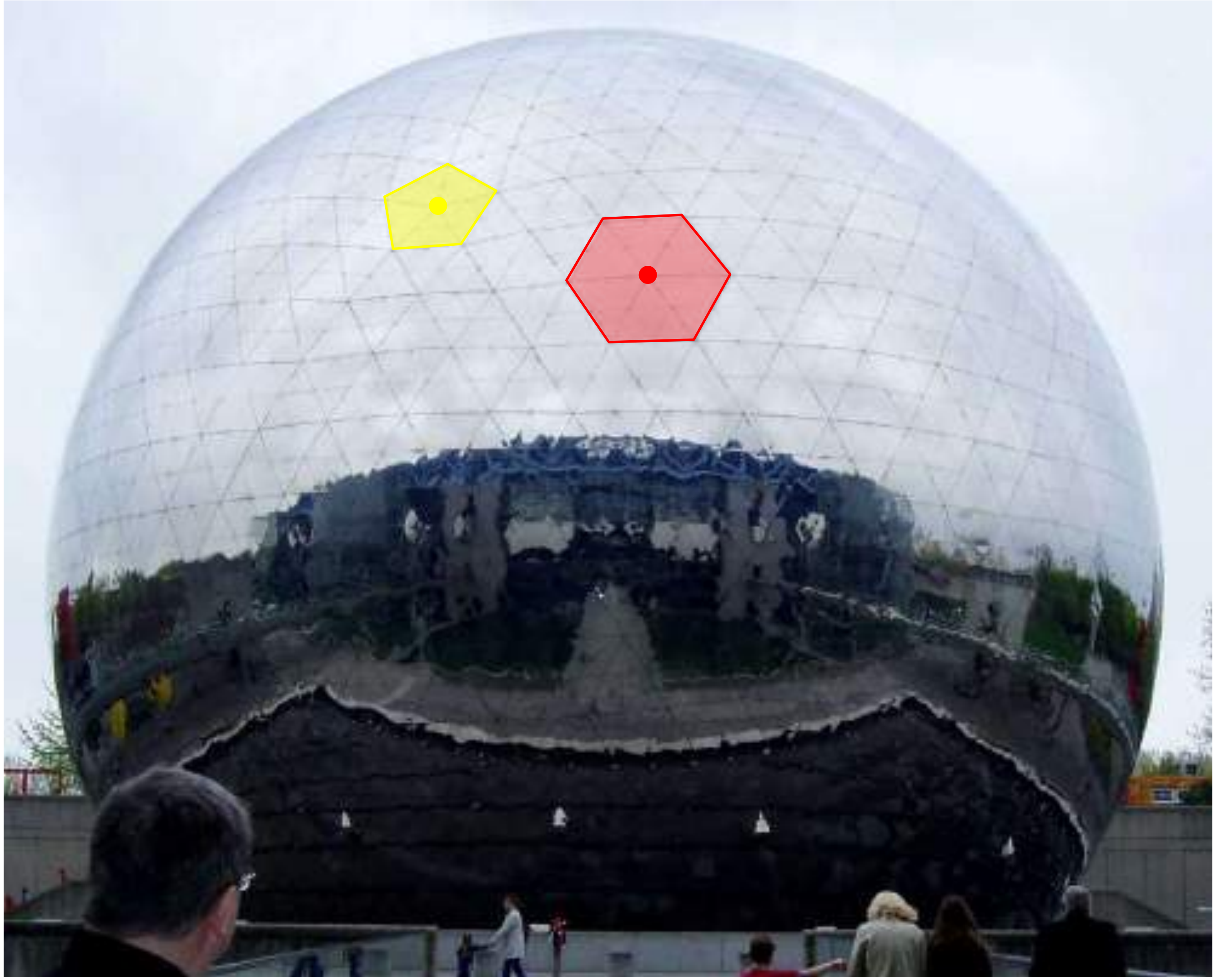
C'est **IMPOSSIBLE**

LES GÉODES



Dôme de télécommunications en Antarctique

LES GÉODES



Géode, Cité des Sciences, Paris