# Fiche pédagogique

## Activité : Dessin sans lever le crayon, la tournée du facteur, les vagues de Koh Lanta, la ronde des bracelets : 4 jeux, une solution.

**Objectifs pédagogiques :** Pour les plus petits : présenter 4 jeux/puzzles et essayer de les résoudre. Pour les plus grands, montrer que ces 4 jeux peuvent être modélisés par un même problème de graphes et comprendre comment ce point de vue permet de tous les résoudre relativement simplement.
**Cette fiche est particulièrement longue car elle présente en fait 4 jeux différents. Chacun de ces jeux peut être présenté de façon indépendante. Il est cependant préférable de lire l'intégralité de la fiche, quite à n'en utiliser qu'une partie.**

**Notions abordées :** Graphes, chemins, cycles, algorithmes, preuves (d'impossibilité, de correction d'algorithmes...).

**Matériel nécessaire :** Pour tous les problèmes : papiers et crayons (on pourra dessiner les graphes) sont suffisants. Pour la tournée du facteur, on pourra en plus utiliser n'importe quel réseau physique (petits trains, grandeur nature avec des cerceaux...). Pour le puzzle des vagues de Koh Lanta, voir les puzzles conçus par TN ici (il est facile de les reproduire sur papier ou carton). Vous pouvez également créer facilement vos propres vagues. Enfin, pour la version ronde des bracelets, il suffit d'avoir des bracelets de couleur, une paire par élève (des exemples sont décrits plus bas).

**Niveau :** À partir du cycle 3.

**Durée :** Une à deux heures si vous voulez traiter tous les jeux et expliquer en quoi ils sont équivalents. Traiter un unique jeu demande au moins 1/2 heure (pour que les élèves aient le temps de le pratiquer), voire une heure pour expliquer en détail comment le résoudre. L'ensemble est faisable en 1/2 heure, mais en ne laissant que 5 minutes par jeu aux élèves ce qui sera frustrant pour eux (ainsi que pour le médiateur/enseignant)...

**Déroulement :**

*Point de vue adopté ici* : Cette activité peut être présentée de nombreuses différentes façons dont nous n'esquissons que quelques-unes d'entre elles.

Il s'agit de 4 jeux *a priori* radicalement différents qui, en fait, s'ils sont (re)présentés /modélisés d'une certaine façon, sont tous identiques. Il est donc possible de présenter chacun de ces jeux, et leur solution, de façon indépendante (voire ne présenter qu'un seul jeu lors d'une séance, sans même mentionner les autres), ou au contraire, présenter tout d'abord chacun des 4 jeux, en faisant jouer les élèves à chacun d'eux, mais sans donner de solution. Puis, expliquer en quoi ils sont équivalents, et montrer comment les résoudre tous de la même façon. Ici, nous allons nous placer entre les deux approches car nous pensons que cela permettra au professeur/médiateur de choisir l'approche qu'il désire adopter.

Ajouter une photo de l'activité

*Jeu 1 : dessiner sans lever le crayon* : Il s'agit d'un jeu classique. On dispose d'un dessin constitué de lignes qui s'intersectent (voir exemples Figure 1) et le but est, en partant d'un point (d'intersection) du dessin de, sans jamais lever le crayon, repasser une fois et une seule par chaque trait (en revanche il est possible de passer plusieurs fois par un point d'intersection) en revenant finalement à son point de départ. Le but est ici, selon les dessins, de savoir si cela est possible ou non.

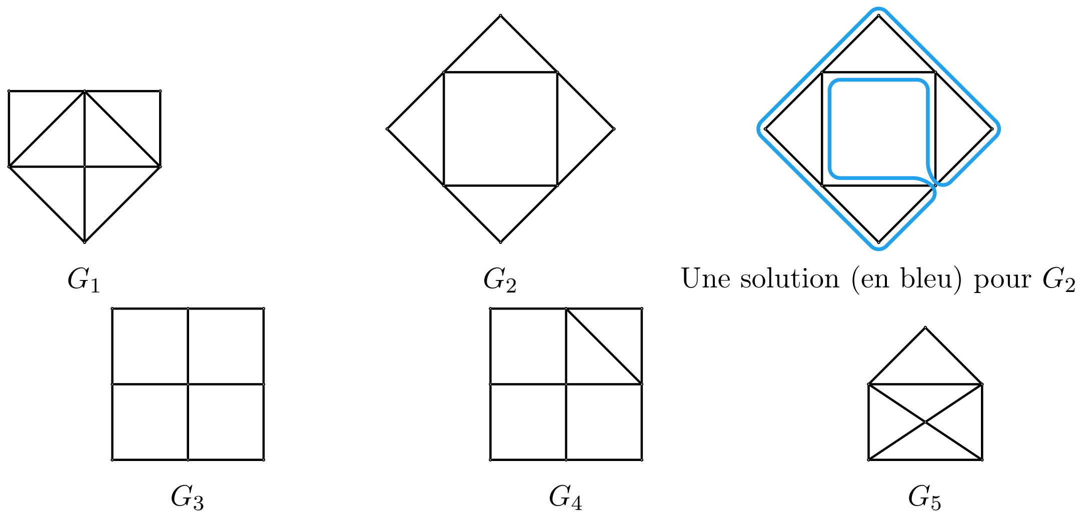



FIGURE 1 – Exemples de dessins pour le jeu 1.

*Déroulement du jeu 1* : Après avoir laissé les élèves expérimenter, il est intéressant que les élèves/groupes comparent leurs propositions / solutions. Plusieurs remarques intéressantes devraient émerger (sinon, il est important d'amener les élèves à les remarquer) :

— Si un dessin est en “plusieurs morceaux” (pas connexe), alors il n'existe pas de solution.
— Lorsqu'une solution existe, le point de départ n'a pas d'importance. Il n'est même pas nécessaire que ce soit un point d'intersection.
— Lorsqu'une solution existe, il peut y avoir plusieurs solutions différentes.
— Lorsque l'on arrive à un point d'intersection pour la première fois, pour qu'une solution existe, il faut au moins une deuxième ligne non utilisée pour en repartir ; si on arrive pour une deuxième fois sur un point d'intersection (donc un point sur lequel on est déjà arrivé, puis reparti), il faut au moins une quatrième ligne non utilisée pour en repartir...

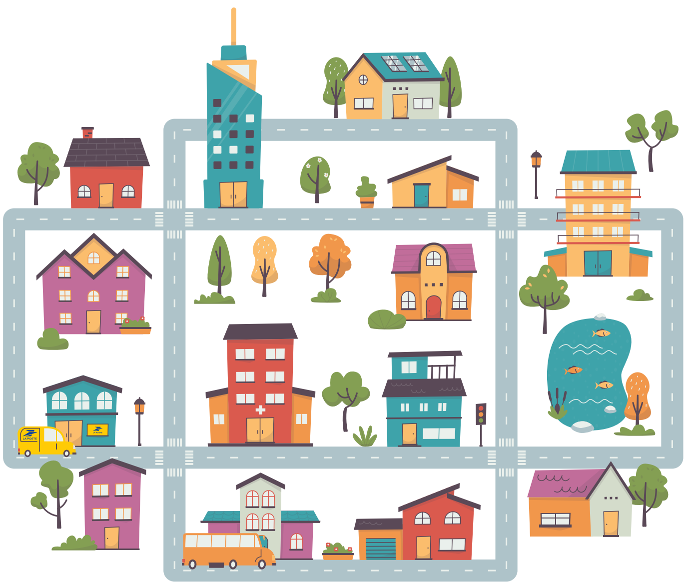
De la remarque précédente, on déduit que, pour qu'une solution existe, une condition nécessaire est que le nombre de lignes arrivant (incidentes) à chaque point d'intersection (on parle du degré du point d'intersection) soit un nombre pair. On en déduit, par exemple, que les dessins $G_1$ (un point d'intersection de degré 3 et un autre de degré 5), $G_3$ (4 points d'intersection de degré 3) et $G_4$ et $G_5$ (2 points d'intersection de degré 3) n'admettent pas de solutions.

Selon l'âge des élèves, il est important d'expliquer la notion de "condition nécessaire" (si cette condition n'est pas remplie, il n'y a pas de solution) et de la prouver (*a minima*, de convaincre l'audience que si il y a un point d'intersection de degré impair, alors il ne peut exister aucune solution au problème).

Dans le cas de ce jeu, ce qui est remarquable, c'est que cette simple condition nécessaire (tous les points d'intersection ont un degré pair) est aussi suffisante. C'est-à-dire que si tous les points d'intersection ont un degré pair, alors une solution existe toujours. À ce stade, il est difficile d'expliquer pourquoi (on y revient plus bas), mais il est bien de le mentionner. Par exemple, cela implique qu'on peut dire avec certitude que le dessin $G_2$ admet une solution (juste en comptant les lignes incidentes à chaque point d'intersection et en vérifiant que tous les degrés sont des nombres pairs), même sans connaître cette solution.

*Jeu 2 : la tournée du facteur* : On considère un réseau routier, typiquement, le plan d'une ville où l'on indique les rues et les croisements. Un facteur part de la poste (l'un des croisements) et son objectif est de passer une fois et une seule par chaque rue (pour distribuer le courrier), de telle sorte que son trajet se termine à la poste. L'objectif est de déterminer si un tel trajet existe ou non.

On peut présenter le même problème avec de multiples autres applications : par exemple, on peut parler d'un bus de ramassage scolaire qui, partant de l'école, doit passer une fois et une seule dans chaque rue (pour ramasser tous les élèves) avant de les ramener à l'école.



Plus précisément, on représente le plan de la ville par un graphe [1] où les croisements sont les sommets et les rues les arêtes. La question revient alors à chercher un trajet qui part d'un sommet quelconque et passe exactement une fois par chaque arête tout en revenant à son sommet de départ. Dans la terminologie des graphes, un tel trajet est appelé *Eulerien* (du nom du génial mathématicien suisse Leonhard Euler 1707-1783).

Il s'agit en fait d'une façon différente (mais équivalente) de présenter le jeu 1. Cette manière est peut-être plus visuelle si vous disposez concrètement d'un petit réseau routier. D'autre part, comme cela est expliqué dans la suite, il est important d'introduire la terminologie des graphes puisque, pour chacun des problèmes suivants, les formuler en terme de graphes permettra de les résoudre plus simplement.

Dans le vocabulaire des graphes, les remarques faîtes pour le jeu précédent (et qui sont clairement toujours valides) se traduisent en le théorème suivant : un graphe admet un trajet Eulerien si (condition suffisante) et seulement si (condition nécessaire) chaque sommet a un degré pair.

*Jeu 3 : puzzle des vagues* : Vous disposez d'un ensemble de morceaux de vagues (de pièces de puzzle) comme donné en exemple sur la Figure 2 et le but est de les organiser en cercle pour former une "vague circulaire". Deux pièces peuvent être accolées selon un côté (vertical) de même hauteur. Notons qu'une pièce peut être "tournée" (symétrie par rapport à l'axe vertical central, ou, en d'autres mots, la face visible est au choix).

La Figure 2 propose un exemple, mais il est évidemment possible (et facile) de dessiner vos propres puzzles.

Pour l'exemple de pièces de la Figure 2, une proposition d'assemblage est décrite sur la Figure 3. Ce n'est cependant pas une solution valide car la succession des morceaux crée un vague linéaire et non circulaire. Pour avoir une solution circulaire, il faudrait que le côté gauche de la pièce de gauche (pièce $b$ dans l'exemple) ait la même hauteur que le côté droit de la pièce de droite ($c$), ce qui n'est pas le cas ici.

En fait, on peut se convaincre que l'exemple de la Figure 2 n'admet pas de réponse car il existe exactement trois côtés de hauteur minimum (côtés gauches des vagues $a, b$ et $c$). Or pour avoir un cercle, il faudrait un quatrième côté de cette hauteur. On voit ainsi apparaitre la notion de parité déjà mentionnée dans les deux jeux précédents.

Pour résoudre ce problème et comprendre son lien avec les jeux 1 et 2, il est possible de le modéliser (représenter) sous forme de graphe. Faisons cela sur l'exemple de la Figure 2. Nous pouvons construire un graphe de la façon suivante : on ajoute un sommet par hauteur (dans l'exemple, les côtés des pièces ont en tout 5 hauteurs différentes et il y aura donc 5 sommets correspondant aux 5 hauteurs distinctes des côtés des morceaux de vagues de l'exemple de la Figure 2) et, pour chaque pièce / morceau de vague allant d'une hauteur $x$ à une hauteur $y$ (ou vice versa, allant d'une hauteur $y$ à une hauteur $x$), ajoutons une arête entre les sommets correspondants aux hauteurs $x$ et $y$. Notons que, si une vague a ses deux côtés de même hauteur $x$, alors il y a une boucle : une arête qui va du sommet $x$ à lui-même (une boucle

1. Rappelons qu'un graphe est composé de sommets, figurés par des cercles et représentant ici les croisements, et des arêtes figurées par des lignes reliant certaines paires de sommets et représentant ici les rues.

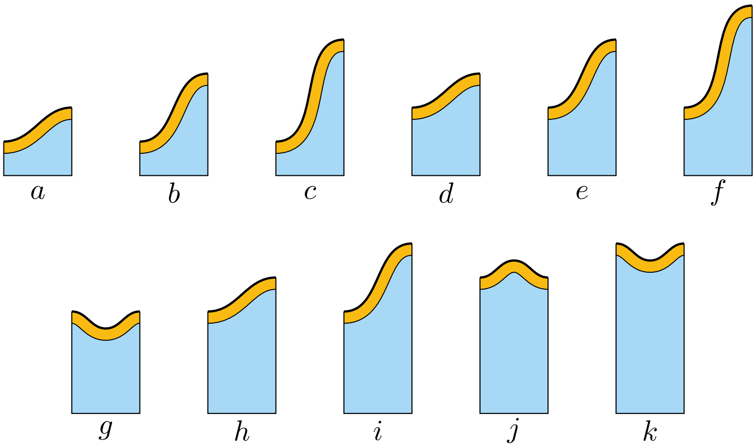



FIGURE 2 – Exemple d'un jeu de 11 pièces / morceaux de vagues.

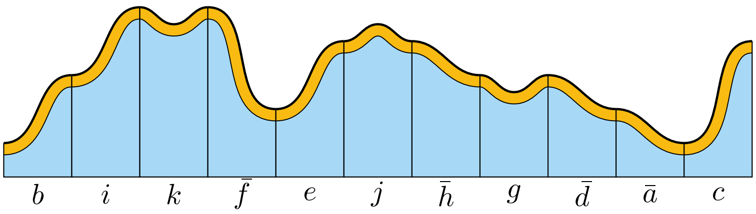



FIGURE 3 – Une façon d'assembler les pièces de la Figure 2. Ici, une pièce notée $x$ dans la Figure 2 est notée $\bar{x}$ si on l'a retournée (symétrie selon l'axe central vertical). Ce n'est cependant pas une solution car il faudrait que les hauteurs de droite et de gauche coïncident pour "refermer" la vague en cercle.

contribue pour 2 au degré). La Figure 4 représente le graphe ainsi obtenu pour l'exemple de la Figure 2.

Notons que dans le cas où le puzzle contient plusieurs pièces identiques (dont les bords ont des hauteurs $x$ et $y$), alors le graphe obtenu aura autant d'arêtes entre les sommets $x$ et $y$ (on parle alors d'arêtes "parallèles").

*Déroulement du jeu* 3 : Commencez par expliquer les règles pour constituer le puzzle et laissez les élèves expérimenter. On peut, là encore, diviser la classe en petits groupes avec chacun un exemple (plusieurs groupes travaillant sur un même exemple). Dans un second temps, discutez des différentes propositions/solutions et techniques utilisées par les élèves.

Si vous ne souhaitez pas (ou n'avez pas le temps pour) leur présenter la modélisation sous forme de graphe, alors il est possible de les amener à comprendre la règle de parité (pour qu'une solution existe, il faut que le nombre de bords de même hauteur soit pair) et leur dire

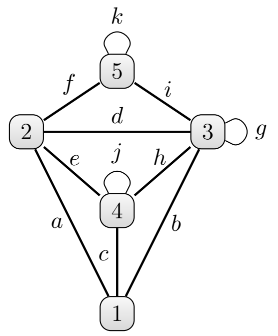



Figure 4 – Modélisation sous forme de graphe du puzzle donné à la Figure 2. Les entiers (1 à 5) qui étiquettent les sommets représentent les cinq hauteurs distinctes des bords des vagues de l'exemple. Les arêtes représentent les vagues : par exemple, l'arête entre les sommets 1 et 2 représente la pièce $a$.

qu'il s'agit en fait d'une condition nécessaire et suffisante.

Sinon, vous pouvez soit les amener à découvrir la modélisation avec des graphes soit la leur donner (la première solution semble plutôt être pour un niveau fin lycée). Une fois cette modélisation expliquée, alors il devrait être relativement facile d'amener les élèves à découvrir qu'une solution du puzzle (un assemblage circulaire des pièces) correspond à un parcours du graphe qui part d'un sommet et passe exactement une fois par chaque arête tout en revenant au sommet de départ.

Si vous avez vu au préalable les jeux 1 et 2, il est alors clair qu'ils sont équivalents au puzzle des vagues. Il est alors possible de reformuler la méthode de résolution d'un puzzle de la façon suivante. Un puzzle admet une solution (alignement circulaire des vagues) si et seulement si, dans le graphe correspondant, tous les sommets ont un degré pair.

Jusqu'ici, nous avons expliqué (prouvé) pourquoi la propriété que tous les sommets ont un degré pair était une condition nécessaire pour l'existence d'une solution. Le dernier jeu permet d'expliquer "concrètement" pourquoi il s'agit également d'une condition suffisante.

*Jeu 4 : la ronde des bracelets* : Vous disposez de paires de bracelets de couleur [2] (une paire de bracelets par élève). Chaque paire peut être constituée de deux bracelets de même couleur ou de couleurs différentes. Vous distribuez une paire de bracelets à chaque élève. Chaque élève devra mettre un bracelet à chaque main (le choix de quel bracelet est mis à quelle main peut être modifié en cours d'exercice) [3].

La question est de savoir si, collectivement, les élèves peuvent faire une ronde qui inclut tous les élèves et telle que deux élèves voisins dans la ronde se tiennent par des mains dont les bracelets sont de même couleur.

2. La façon de déterminer les couleurs de chaque paire est discutée plus bas.
3. Les bracelets peuvent bien sûr être remplacés par n'importe quel objet dans la mesure où chaque élève en a deux, un dans chaque main, et que les couleurs sont bien identifiées.

*Déroulement du jeu 4* : Comme précédement, commencez par expliquer les règles du jeu, donnez à chaque élève une paire de bracelets et laissez-les expérimenter et discuter de leurs propositions et méthodes de résolution.

Essayez de leur faire découvrir qu'une solution ne peut exister que si, pour chaque couleur, le nombre de bracelets de cette couleur est pair. Par exemple, si possible, donnez leur des bracelets avec seulement 2 couleurs, disons $A$ et $B$. Comparez les résultats lorsque le nombre de bracelets de couleur $A$ est impair (auquel cas le nombre de bracelets de couleur $B$ est aussi impair puisqu'on considère des paires de bracelets) et lorsqu'il est pair (donc le nombre de bracelets de couleur $B$ est aussi pair).

Une façon d'aider élèves peut être de leur dire de faire plusieurs petites rondes (en respectant la contrainte des couleurs) et les rassembler une à une en une ronde unique.

Dans la suite, nous supposons que vous avez présenté le jeu 3 auparavant (mais ce n'est pas indispensable). Il devrait alors apparaître que ces 2 jeux sont équivalents. En effet, dans la ronde des bracelets, ce sont les gens qui jouent le rôle des pièces de puzzle. Plutôt que d'avoir une pièce dont un bord a une hauteur $x$ et l'autre bord une hauteur $y$, ici, une personne a un bracelet de couleur $x$ et l'autre de couleur $y$.

Ainsi, le jeu 4 est équivalent à tous les jeux précédents et tout ce que nous avons dit s'applique également. En particulier, le jeu des bracelets peut être modélisé par une recherche de trajet Eulerien dans un graphe.

> *Comment décider de la composition des bracelets :* Pour créer vos paires de bracelets, dessinez votre graphe préféré (il doit être connexe, i.e., d'un seul tenant : chaque sommet doit être accessible de tout autre sommet par un chemin), attribuez une couleur à chaque sommet et, alors, chaque arête entre un sommet de couleur $x$ et un sommet de couleur $y$ (possiblement $x = y$), correspond à une paire de bracelets de couleurs $x$ et $y$. Une façon équivalente est de commencer par dessiner une longue vague circulaire que vous découpez en pièces (par des découpes verticales). Attribuez une couleur $x$ à chaque hauteur $x$ des bords des pièces obtenues. Alors, pour chaque pièce avec deux bords de hauteurs $x$ et $y$, associez une paire de bracelets de couleurs $x$ et $y$.

*Enfin, une preuve algorithmique de la condition suffisante* : Ici, nous voulons montrer que tout graphe connexe dont les sommets ont un degré pair admet un tour Eulérien. La preuve est algorithmique, c'est-à-dire que nous décrivons un algorithme (une méthode) qui, si la condition est vérifiée, calcule un tel tour. Nous décrivons cet algorithme dans le cadre du jeu 4 car je pense (j'espère) que dans cette activité grandeur nature, où les participants sont partie prenante de l'exécution de l'algorithme, l'algorithme sera mieux compris. Ce même algorithme pourrait être explicité dans le cadre des 3 autres jeux...

Considérons un exemple où chaque couleur correspond à un nombre pair de bracelets (et que le graphe correspondant est connexe).Commencez par demander aux élèves de créer une "petite" ronde (qui n'inclue pas forcément tout le monde) valide (deux élèves voisins dans la ronde se tiennent par des mains dont les bracelets sont de même couleur). Si la ronde courante inclue tout le monde, alors nous avons trouvé une solution. Sinon, il doit exister (cela vient du fait que le graphe est connexe) une couleur $x$ qui apparaît sur des bracelets de la ronde courante (disons que les personnes $A$ et $B$ sont liées par la couleur $x$) et sur un bracelet d'un des élèves, disons sur la main gauche de $C$, à l'extérieur de la ronde. On ouvre alors la ronde courante au niveau de $A$ et $B$ et accole $C$ à $A$. La main "libre" de $C$ est d'une couleur $y$ qui n'est utilisée qu'un nombre impair de fois dans la "ronde courante", il existe donc (puisque chaque couleur apparait un nombre pair de fois par hypothèse) une autre personne $D$ avec un bracelet de couleur $y$. On l'accole à $C$. On réitère le processus avec la personne $D$ et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une personne avec un bracelet de la même couleur que celle de la main libre de $B$ (doit exister du fait de la parité de chaque couleur). On referme alors la ronde. Nous avons donc réussi à agrandir la ronde courante. Si elle inclue tout le monde, alors nous avons trouvé une solution. Sinon, on recommence.

Décrivons cet algorithme sur un exemple avec les paires de bracelets suivantes : (Jaune,Jaune), (Vert,Vert), (Bleu, Bleu), (Jaune, Vert), (Jaune, Orange), (Orange,Vert), (Orange, Bleu), (Orange, Rouge), (Vert, Bleu), (Vert, Rouge) et deux paires (Bleu,Rouge). Le graphe correspondant est décrit sur la Figure 5. Dans ce qui suit, on note les paires de bracelets à l'aide des initiales des couleurs. Disons que cinq élèves ont réussi d'eux-même à faire la ronde suivante : $(O, V) - (V, V) - (V, B) - (B, B) - (B, O)$. L'élève avec la paire $(O, R)$, appelons la Jeanne, veut se greffer à cette ronde qui s'ouvre donc au niveau des deux bracelets orange déjà dans la ronde. Jeanne prend une des mains de la ronde avec un bracelet orange et doit chercher un élève avec un bracelet rouge hors de la ronde : elle voit Paul qui a la paire $(R, V)$, elle lui prend sa "main rouge" et Paul doit maintenant chercher un bracelet vert hors de la ronde. Il trouve Gaetan qui a la paire $(V, J)$ et lui prend sa "main verte". À son tour, Gaetan trouve un élève avec la paire $(J, O)$ qui peut refermer la ronde. Nous avons donc une ronde plus grande $(O, V) - (V, V) - (V, B) - (B, B) - (B, O) - (O, R) - (R, V) - (V, J) - (J, O)$ mais qui n'inclue pas encore tout le monde. Un élève avec la paire $(B, R)$ vient ouvrir la ronde au niveau des bracelets rouge, trouve un autre élève avec une paire $(B, R)$ qui peut aussitôt refermer la ronde. Il ne reste plus à l'élève avec la paire $(J, J)$ à se greffer au niveau des bracelets jaune et on obtient la ronde $(O, V) - (V, V) - (V, B) - (B, B) - (B, O) - (O, R) - (R, B) - (B, R) - (R, V) - (V, J) - (J, J) - (J, O)$. Notons qu'il y a plusieurs résultats possibles selon la ronde de départ et les endroits où la ronde est "ouverte" en cours d'exécution de l'algorithme (voir Figure 6).

L'algorithme précédent est une preuve constructive qu'un graphe dont tous les sommets sont de degré pair admet un tour Eulérien.

**Aller plus loin / Applications :** Il est possible de simplifier le problème décrit plus haut en supprimant la contrainte qu'il faut revenir à son point de départ. Dans le cas du jeu 1, il s'agit donc de répliquer un dessin, sans lever le crayon ni passer plusieurs fois par la même ligne, mais sans nécessairement revenir au point de départ. Dans le cas du jeu 2, le facteur (ou le bus) n'est plus obligé de terminer à la poste (ou à l'école). Dans le cas du jeu 3, on veut assembler les pièces de puzzle (deux pièces adjacentes se "collant" sur une même hauteur) mais sans imposer que les bords droit et gauche de la vague globale aient même hauteur (la solution proposée à la Figure 3 est alors valide pour l'exemple de la Figure 2). Dans le cas du jeu 4, on ne cherche plus une ronde, mais seulement une ligne de personnes.

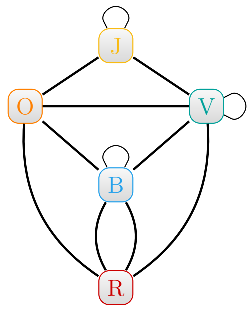



FIGURE 5 – Graphe modélisant les paires de bracelets : (Jaune, Jaune), (Vert, Vert), (Bleu, Bleu), (Jaune, Vert), (Jaune, Orange), (Orange, Vert), (Orange, Bleu), (Orange, Rouge), (Vert, Bleu), (Vert, Rouge) et deux paires (Bleu, Rouge).

En terme de graphe, cela revient à trouver un *chemin Eulerien*, c'est-à-dire un chemin qui part d'un sommet et passe exactement une fois par chaque arête.

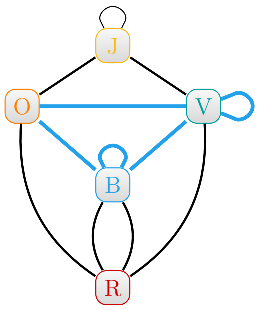
En utilisant des arguments similaires à ceux précédents, il est possible de montrer qu'un graphe connexe admet un chemin Eulerien si et seulement si au plus deux sommets ont un degré impair (dans ce cas, ces deux sommets seront les points de départ et d'arrivée du chemin Eulerien).

Dans les jeux qui précèdent, nous avons étudié le problème qui consiste à déterminer si un graphe (connexe) possède un tour Eulerien : un trajet qui passe exactement une fois par chaque ARÊTE tout en revenant à son sommet de départ et nous avons vu qu'il est "facile" de répondre à cette question (la réponse est OUI si et seulement si chaque sommet a un degré pair). Modifions un chouillat le problème : est-ce qu'un graphe admet un trajet qui passe exactement une fois par chaque SOMMET tout en revenant à son sommet de départ ? (il n'est plus indispensable de passer par chaque arête) Ce problème est connu comme le problème du *Voyageur de commerce* et il est NP-complet. Sans rentrer dans les détails, cela signifie que nous ne connaissons pas de façon "simple" ("rapide") de répondre au problème. En gros, pour répondre à la question, on ne sait pas faire autrement que de tester toutes les possibilités (tous les trajets possibles). Savoir s'il existe un algorithme plus efficace (polynomial) pour résoudre ce problème est l'un des 7 problèmes du millénaire mis à prix pour 1 million de dollars par l'institut Clay...

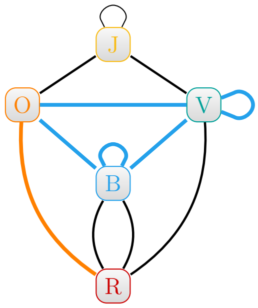
**Références :**


— `https://fr.wikipedia.org/wiki/Graphe_eul%C3%A9rien`
— `https://fr.wikipedia.org/wiki/Graphe_hamiltonien`
— `https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8mes_du_prix_du_mill%C3%A9naire`
— `https://portail.terra-numerica.org/res/rsrc/926`

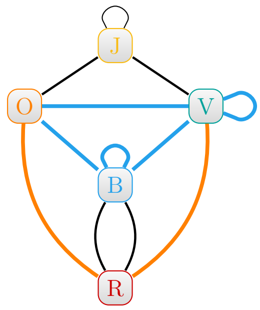

**Contact :** nicolas point nisse arobase inria point fr



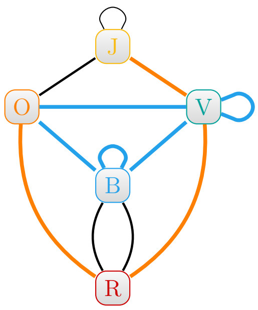

(a) Première ronde.



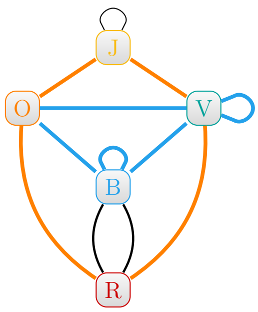

(b) Jeanne s'insère dans la ronde.



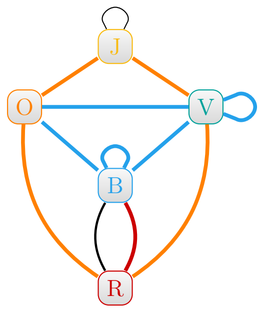

(c) Paul s'insère dans la ronde.



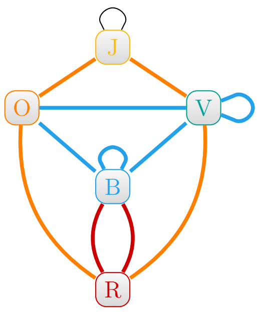

(d) Gaetan s'insère dans la ronde.



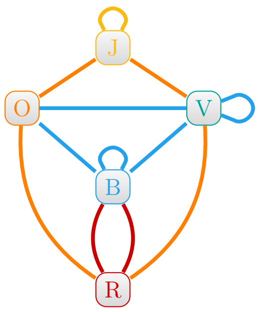

(e) Un élève referme la ronde.




(f) On ouvre la ronde au niveau du Rouge.




(g) On referme la ronde au niveau du Rouge.




(h) L'élève avec la paire jaune s'insère.

FIGURE 6 – Déroulé de l'algorithme.