



0.1 La traque

Objectifs pédagogiques : Illustrer la coloration de graphe et une propriété de la coloration en deux couleurs.

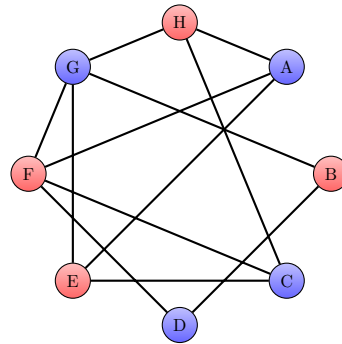
Notions abordées : Graphe, coloration, parité, connexité.

Matériel nécessaire : Un tableau

Niveau : A partir du cycle 3.

Préparation : Prenez autant de sommets bleus que de sommets rouges. Ajoutez des arêtes uniquement entre les sommets bleus et les sommets rouges, de manière à obtenir un graphe colorable avec deux couleurs. Choisissez un sommet de départ parmi les sommets bleus. Prenez un ordre sur les sommets alternant sommets bleus et sommets rouges, tel qu'en supprimant ces sommets suivant cet ordre, le graphe reste connexe (i.e. en un seul morceau) à chaque étape.

Par exemple, on peut prendre quatre sommets bleus, quatre sommets rouges et construire le graphe dessiné à droite. On peut ensuite choisir comme point de départ le sommet A et un ordre possible est (D, E, C, B, A, F, G, H).



Déroulement : Montrez le graphe (sans les couleurs) et indiquez le point de départ. À chaque tour, vous demandez au public d'effectuer mentalement et sans le dire la traversée de 3 arêtes depuis le sommet où il était. Au départ, il doit partir du sommet choisi. Dans notre exemple, en partant de A, le public peut effectuer le déplacement A-F-D-B. Il devra alors repartir de B au tour suivant. On peut éventuellement revenir sur ses pas. Ainsi A-H-A-E est également une traversée de trois arêtes possible.

Prétendez avoir le pouvoir à chaque tour de détecter un sommet sur lequel le public n'est pas arrivé et de le condamner. Le public ne pourra ensuite plus y passer. Otez les sommets dans l'ordre donné par la suite. Ainsi le public fait une traversée de 3 arêtes à

partir du sommet de départ. Vous retirez un sommet (dans notre exemple D). Le public fait une nouvelle traversée de 3 sommets (en partant de là où il était arrivé après la première traversée) dans le graphe où ce sommet est supprimé. Vous retirez un autre sommet (E dans l'exemple), et ainsi de suite.

Quand il ne reste plus qu'un seul sommet, vous savez où est arrivé le public. Ce sommet est forcément le dernier de la suite. Dans notre exemple, le dernier sommet à rester sera donc H.

Explication : Le tour fonctionne car dans un graphe coloré avec deux couleurs, à chaque fois que l'on traverse trois (et plus généralement un nombre impair) arêtes, le sommet sur lequel on arrive est de la couleur différente de celle du sommet où on est parti. Ainsi à chaque tour, le sommet sur lequel arrive le sommet change de couleur. En partant d'un sommet bleu, on sait donc qu'il arrivera à un sommet rouge après la première traversée de 3 arêtes. Le magicien supprime donc un sommet bleu (D dans notre exemple). Lors de la deuxième traversée de 3 arêtes, le public part d'un sommet rouge pour arriver sur un sommet bleu, le magicien enlève donc un sommet rouge (E dans notre exemple). Et ainsi de suite.