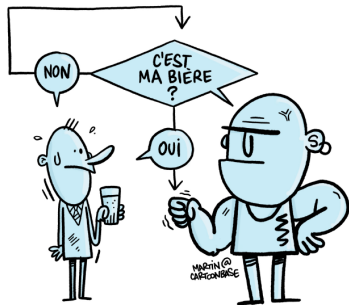


# Mariages stables et ParcoursSup

Frédéric HAVET



# Exemple d'algorithme. Analyse et applications.



# Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

<b>William</b>	<b>B</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>Alice</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>
<b>Xavier</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>B</b>	<b>Betty</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>W</b>	<b>X</b>
<b>Yvan</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>Clara</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>X</b>
<b>Zack</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>B</b>	<b>Denise</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>

# Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

<b>William</b>	<b>B</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>Alice</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>
<b>Xavier</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>B</b>	<b>Betty</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>W</b>	<b>X</b>
<b>Yvan</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>Clara</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>X</b>
<b>Zack</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>B</b>	<b>Denise</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>

Un **mariage**

**William** – **Alice**  
**Xavier** – **Betty**  
**Yvan** – **Clara**  
**Zack** – **Denise**

# Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

<b>William</b>	<b>B</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>Alice</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>
<b>Xavier</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>B</b>	<b>Betty</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>W</b>	<b>X</b>
<b>Yvan</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>Clara</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>X</b>
<b>Zack</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>B</b>	<b>Denise</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>

Un **mariage instable**

**William** – **Alice**  
**Xavier** – **Betty**  
**Yvan** – **Clara**  
**Zack** – **Denise**

# Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

<b>William</b>	<b>B</b>	D	<b>A</b>	C	<b>Alice</b>	<b>X</b>	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	<b>Betty</b>	Z	Y	<b>W</b>	<b>X</b>
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

Un **mariage instable**

**William** – **Alice**  
**Xavier** – **Betty**  
Yvan – Clara  
Zack – Denise

# Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

<b>William</b>	<b>B</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>Alice</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>
<b>Xavier</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>B</b>	<b>Betty</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>W</b>	<b>X</b>
<b>Yvan</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>Clara</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>X</b>
<b>Zack</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>B</b>	<b>Denise</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>

Un **mariage STABLE**

**William** – **Denise**  
**Xavier** – **Clara**  
**Yvan** – **Betty**  
**Zack** – **Alice**

# Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	<b>B</b>	<b>D</b>	A	C	Alice	<b>X</b>	W	<b>Z</b>	Y
Xavier	<b>C</b>	A	D	B	Betty	Z	<b>Y</b>	<b>W</b>	X
Yvan	<b>B</b>	C	A	D	Clara	W	Z	Y	<b>X</b>
Zack	D	<b>A</b>	C	B	Denise	X	<b>W</b>	Z	Y

Un **mariage STABLE**

**William** – Denise  
Xavier – Clara  
Yvan – Betty  
Zack – Alice



# Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

Un **mariage STABLE**

William – Denise  
Xavier – Clara  
Yvan – Betty  
Zack – Alice

# L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

<b>William</b>	<b>B</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>Alice</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>
<b>Xavier</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>B</b>	<b>Betty</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>W</b>	<b>X</b>
<b>Yvan</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>Clara</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>X</b>
<b>Zack</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>B</b>	<b>Denise</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>

**William** –  
**Xavier** –  
**Yvan** –  
**Zack** –

# L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

<b>William</b>	<b>B</b>	D	A	C	<b>Alice</b>	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	<b>Betty</b>	Z	Y	<b>W</b>	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

**William** – **Betty**

Xavier –

Yvan –

Zack –

# L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

William – Betty  
Xavier – Clara  
Yvan –  
Zack –

# L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

William – ~~Betty~~  
Xavier – Clara  
Yvan – Betty  
Zack –

# L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

<b>William</b>	<b>B</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>Alice</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>
<b>Xavier</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>B</b>	<b>Betty</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>W</b>	<b>X</b>
<b>Yvan</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>Clara</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>X</b>
<b>Zack</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>B</b>	<b>Denise</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>

**William** –  
**Xavier** – **Clara**  
**Yvan** – **Betty**  
**Zack** –

# L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

<b>William</b>	B	<b>D</b>	A	C	<b>Alice</b>	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	<b>Denise</b>	X	<b>W</b>	Z	Y

**William** – **Denise**  
Xavier – Clara  
Yvan – Betty  
Zack –

# L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

<b>William</b>	<b>B</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>Alice</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>
<b>Xavier</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>B</b>	<b>Betty</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>W</b>	<b>X</b>
<b>Yvan</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>Clara</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>X</b>
<b>Zack</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>B</b>	<b>Denise</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>

**William** – **Denise**  
**Xavier** – **Clara**  
**Yvan** – **Betty**  
**Zack** –



# L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

<b>William</b>	<b>B</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>Alice</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>
<b>Xavier</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>B</b>	<b>Betty</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>W</b>	<b>X</b>
<b>Yvan</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>D</b>	<b>Clara</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>	<b>X</b>
<b>Zack</b>	<b>D</b>	<b>A</b>	<b>C</b>	<b>B</b>	<b>Denise</b>	<b>X</b>	<b>W</b>	<b>Z</b>	<b>Y</b>

**William** – **Denise**  
**Xavier** – **Clara**  
**Yvan** – **Betty**  
**Zack** – **Alice**

# L'algorithme de Gale et Shapley : certification

## Terminaison :

Les hommes ne se proposent qu'une seule fois à chaque femme.  
Leur préférence décroît. A l'inverse, la préférence des femmes croît.  
On termine en  $n \times n = n^2$  étapes au plus.

**Validité :** Couples (H1, F1) et (H2, F2).

Supposons que H2 préfère F1 à F2.

H2 s'est proposé à F1, mais n'est pas avec elle.

- ▷ Soit F1 l'a refusé car avec un homme qu'elle préférerait à H2.
- ▷ Soit F1 l'a ensuite quitté pour un homme qu'elle préférerait à H2.

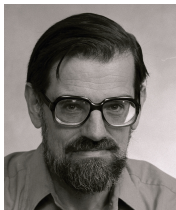
Dans les deux cas, F1 préfère H1 à H2, **pas d'instabilité**.

# L'algorithme de Gale et Shapley : applications

1968 : **Gale and Shapley**. Travaux purement **théoriques**.



David Gale (1921-2008)



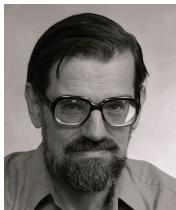
Lloyd Shapley (1923-2016)

# L'algorithme de Gale et Shapley : applications

1968 : **Gale and Shapley**. Travaux purement **théoriques**.



David Gale (1921-2008)



Lloyd Shapley (1923-2016)



Alvin Roth (1951-)

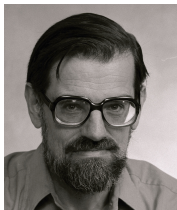
1980 : **Roth**. Affectation d'internes dans les hopitaux américains.

# L'algorithme de Gale et Shapley : applications

1968 : **Gale and Shapley**. Travaux purement **théoriques**.



David Gale (1921-2008)



Lloyd Shapley (1923-2016)



Alvin Roth (1951-)

1980 : **Roth**. Affectation d'internes dans les hopitaux américains.

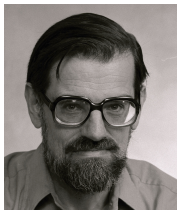
2004 : Appariement donneur/receveur greffe de rein.

# L'algorithme de Gale et Shapley : applications

1968 : **Gale and Shapley**. Travaux purement **théoriques**.



David Gale (1921-2008)



Lloyd Shapley (1923-2016)



Alvin Roth (1951-)

1980 : **Roth**. Affectation d'internes dans les hopitaux américains.

2004 : Appariement donneur/receveur greffe de rein.

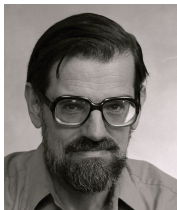
2012 : Prix Nobel d'économie Shapley et Roth.

# L'algorithme de Gale et Shapley : applications

1968 : **Gale and Shapley**. Travaux purement **théoriques**.



David Gale (1921-2008)



Lloyd Shapley (1923-2016)



Alvin Roth (1951-)

1980 : **Roth**. Affectation d'internes dans les hopitaux américains.

2004 : Appariement donneur/receveur greffe de rein.

2012 : Prix Nobel d'économie Shapley et Roth.

2009 : APB ;      2018: Parcours Sup.

# L'algorithme de Gale et Shapley : asymétrie

Les hommes proposent, les femmes disposent.

## Asymétrie :

- ▶ Un homme termine avec sa partenaire préférée parmi toutes celles possibles dans un mariage stable.
- ▶ Une femme termine avec son partenaire le moins aimé parmi tous les possibles.



# L'algorithme de Gale et Shapley : asymétrie

Les hommes proposent, les femmes disposent.

## Asymétrie :

- ▶ Un homme termine avec sa partenaire préférée parmi toutes celles possibles dans un mariage stable.
- ▶ Une femme termine avec son partenaire le moins aimé parmi tous les possibles.

## Sincérité :

- ▶ Un homme n'a aucun intérêt à mentir sur ses préférences.
- ▶ Une femme peut avoir intérêt à mentir pour obtenir un meilleur partenaire.

# L'algorithme de Gale et Shapley : asymétrie

Les hommes proposent, les femmes disposent.

## Asymétrie :

- ▶ Un homme termine avec sa partenaire préférée parmi toutes celles possibles dans un mariage stable.
- ▶ Une femme termine avec son partenaire le moins aimé parmi tous les possibles.

## Sincérité :

- ▶ Un homme n'a aucun intérêt à mentir sur ses préférences.
- ▶ Une femme peut avoir intérêt à mentir pour obtenir un meilleur partenaire.

APB : étudiants  $\equiv$  hommes. ParcoursSup : étudiants  $\equiv$  femmes.

Nécessité d'**algorithmes acceptables**, donc **compréhensibles**.

# Merci de votre attention.

