

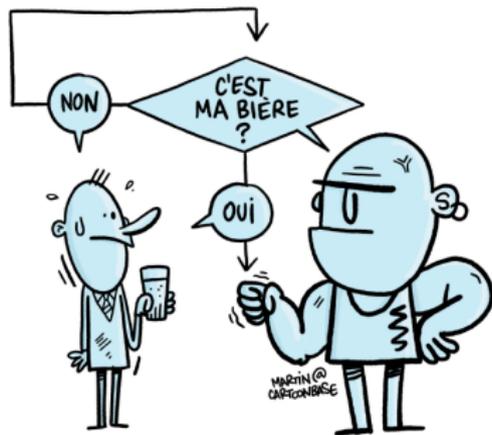
Mariages stables et ParcoursSup

Frédéric HAVET



Exemple d'algorithme.

Analyse et applications.



Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

Un **mariage**

William – **Alice**
Xavier – **Betty**
Yvan – **Clara**
Zack – **Denise**

Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

Un **mariage instable**

William – **Alice**
Xavier – **Betty**
Yvan – **Clara**
Zack – **Denise**

Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

Un **mariage instable**

William – **Alice**
Xavier – **Betty**
Yvan – Clara
Zack – Denise

Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

Un **mariage STABLE**

William – **Denise**
Xavier – **Clara**
Yvan – **Betty**
Zack – **Alice**

Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

Un **mariage STABLE**

William – Denise
Xavier – Clara
Yvan – Betty
Zack – Alice

Le problème des mariages stables

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

Un **mariage STABLE**

William – **Denise**
Xavier – **Clara**
Yvan – **Betty**
Zack – **Alice**

L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

William –
Xavier –
Yvan –
Zack –

L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

William – **Betty**

Xavier –

Yvan –

Zack –

L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

William – Betty
Xavier – Clara
Yvan –
Zack –

L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

William – ~~Betty~~
Xavier – Clara
Yvan – Betty
Zack –

L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

William –
Xavier – **Clara**
Yvan – **Betty**
Zack –

L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

William – **Denise**
Xavier – Clara
Yvan – Betty
Zack –

L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

William – **Denise**
Xavier – **Clara**
Yvan – **Betty**
Zack –

L'algorithme de Gale et Shapley

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Préférences des hommes

Préférences des femmes

William	B	D	A	C	Alice	X	W	Z	Y
Xavier	C	A	D	B	Betty	Z	Y	W	X
Yvan	B	C	A	D	Clara	W	Z	Y	X
Zack	D	A	C	B	Denise	X	W	Z	Y

William – **Denise**
Xavier – **Clara**
Yvan – **Betty**
Zack – **Alice**

L'algorithme de Gale et Shapley : certification

Terminaison :

Les hommes ne se proposent qu'une seule fois à chaque femme.
Leur préférence décroît. A l'inverse, la préférence des femmes croît.
On termine en $n \times n = n^2$ étapes au plus.

Validité : Couples (H1, F1) et (H2, F2).

Supposons que H2 préfère F1 à F2.

H2 s'est proposé à F1, mais n'est pas avec elle.

- ▷ Soit F1 l'a refusé car avec un homme qu'elle préférerait à H2.
- ▷ Soit F1 l'a ensuite quitté pour un homme qu'elle préférerait à H2.

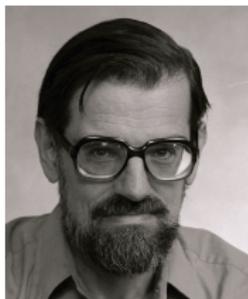
Dans les deux cas, F1 préfère H1 à H2, **pas d'instabilité**.

L'algorithme de Gale et Shapley : applications

1968 : **Gale and Shapley**. Travaux purement **théoriques**.



David Gale (1921-2008)



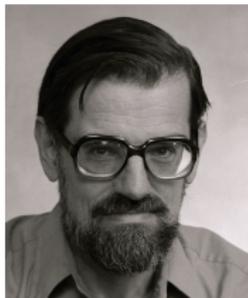
Lloyd Shapley (1923-2016)

L'algorithme de Gale et Shapley : applications

1968 : **Gale and Shapley**. Travaux purement **théoriques**.



David Gale (1921-2008)



Lloyd Shapley (1923-2016)



Alvin Roth (1951-)

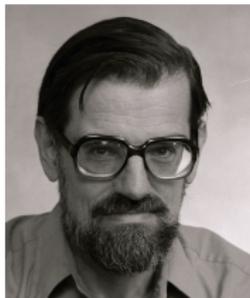
1980 : **Roth**. Affectation d'internes dans les hopitaux américains.

L'algorithme de Gale et Shapley : applications

1968 : **Gale and Shapley**. Travaux purement **théoriques**.



David Gale (1921-2008)



Lloyd Shapley (1923-2016)



Alvin Roth (1951-)

1980 : **Roth**. Affectation d'internes dans les hopitaux américains.

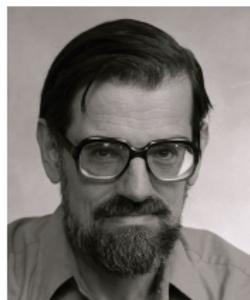
2004 : Appariement donneur/receveur greffe de rein.

L'algorithme de Gale et Shapley : applications

1968 : **Gale and Shapley**. Travaux purement **théoriques**.



David Gale (1921-2008)



Lloyd Shapley (1923-2016)



Alvin Roth (1951-)

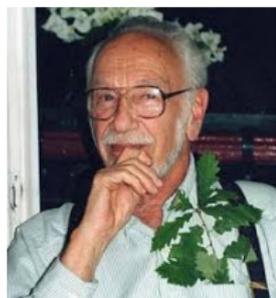
1980 : **Roth**. Affectation d'internes dans les hopitaux américains.

2004 : Appariement donneur/receveur greffe de rein.

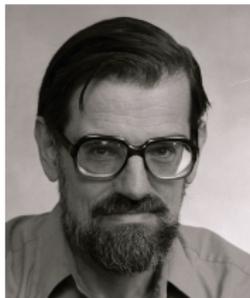
2012 : Prix Nobel d'économie Shapley et Roth.

L'algorithme de Gale et Shapley : applications

1968 : **Gale and Shapley**. Travaux purement **théoriques**.



David Gale (1921-2008)



Lloyd Shapley (1923-2016)



Alvin Roth (1951-)

1980 : **Roth**. Affectation d'internes dans les hopitaux américains.

2004 : Appariement donneur/receveur greffe de rein.

2012 : Prix Nobel d'économie Shapley et Roth.

2009 : APB ; 2018: Parcours Sup.

L'algorithme de Gale et Shapley : asymétrie

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Asymétrie :

- ▶ Un homme termine avec sa partenaire préférée parmi toutes celles possibles dans un mariage stable.
- ▶ Une femme termine avec son partenaire le moins aimé parmi tous les possibles.

L'algorithme de Gale et Shapley : asymétrie

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Asymétrie :

- ▶ Un homme termine avec sa partenaire préférée parmi toutes celles possibles dans un mariage stable.
- ▶ Une femme termine avec son partenaire le moins aimé parmi tous les possibles.

Sincérité :

- ▶ Un homme n'a aucun intérêt à mentir sur ses préférences.
- ▶ Une femme peut avoir intérêt à mentir pour obtenir un meilleur partenaire.

L'algorithme de Gale et Shapley : asymétrie

Les hommes proposent, les femmes disposent.

Asymétrie :

- ▶ Un homme termine avec sa partenaire préférée parmi toutes celles possibles dans un mariage stable.
- ▶ Une femme termine avec son partenaire le moins aimé parmi tous les possibles.

Sincérité :

- ▶ Un homme n'a aucun intérêt à mentir sur ses préférences.
- ▶ Une femme peut avoir intérêt à mentir pour obtenir un meilleur partenaire.

APB : étudiants \equiv hommes. ParcoursSup : étudiants \equiv femmes.

Nécessité d'**algorithmes acceptables**, donc **compréhensibles**.

Merci de votre attention.

