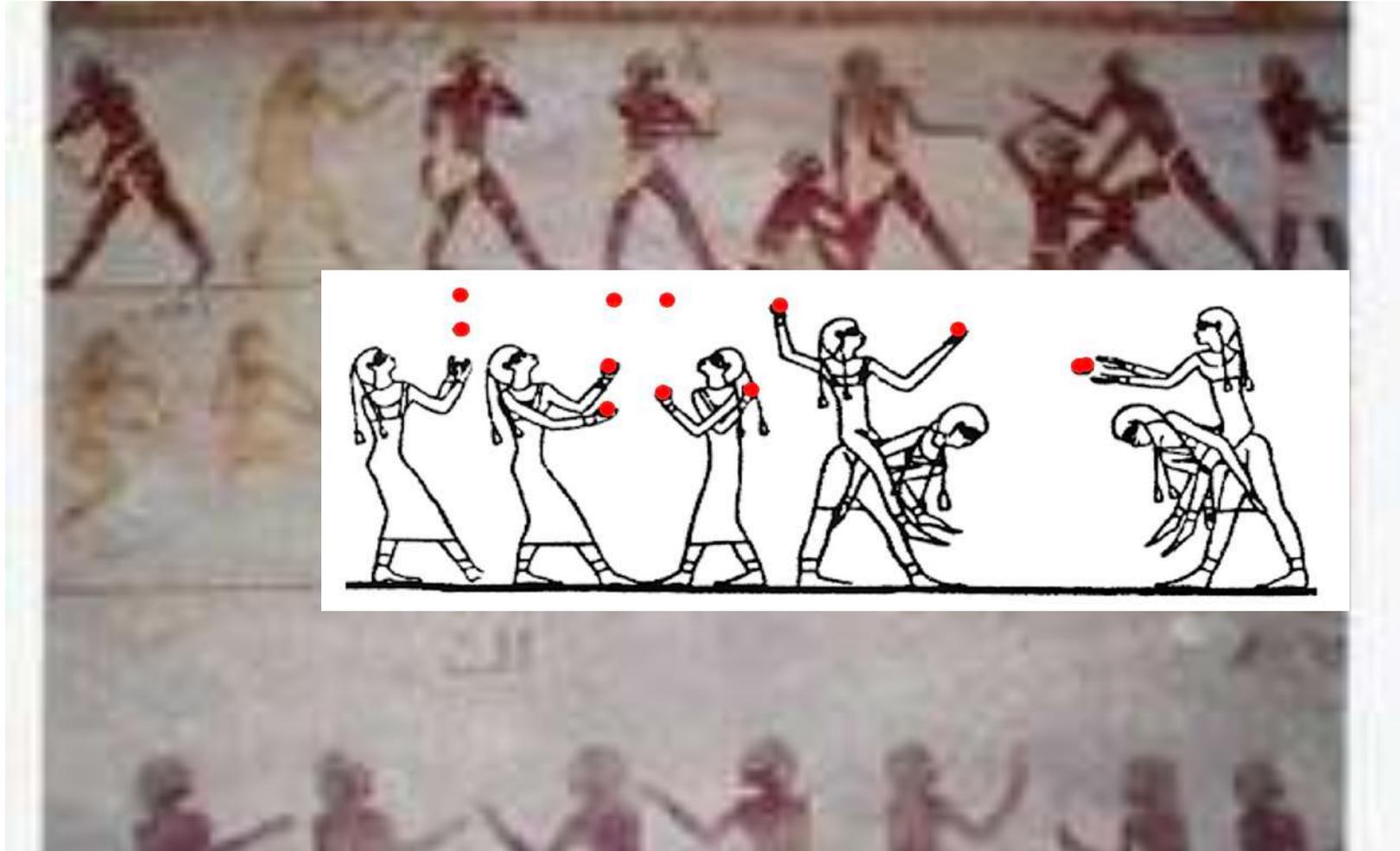


Histoire du jonglage



Tombe 17 de Beni Hassan en Egypte vers -1890.

Histoire du jonglage



Livre de Lie Zi :
Lan Zi (vers -500)
jonglait avec
7 épées.



Talmud :

Rabbi Shimon Ben
Gamaliel (-10) jonglait
avec 8 torches
enflammées.

Tonga :
jongle traditionnelle
pour les filles



Azèques : antipodisme

1948 : création de l'International Juggling Association

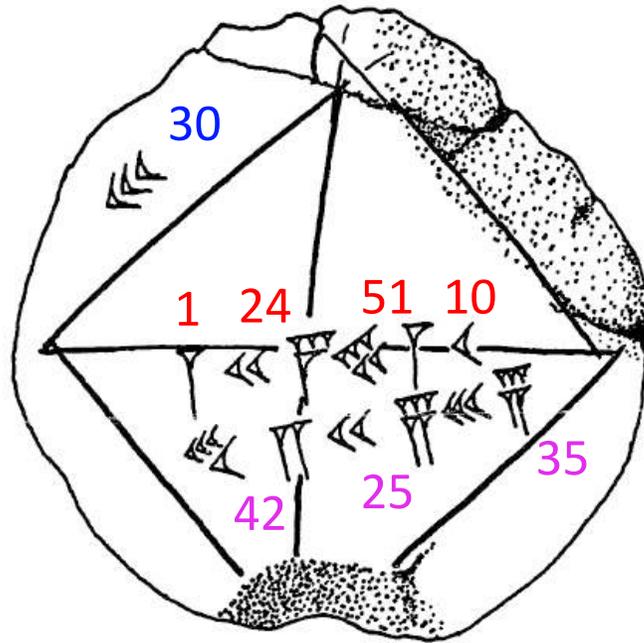
Histoire des maths



← 8 cm →

Tablette YBC 7289, vers – 1800
Yale Babylonian Collection

Histoire des maths



Tablette YBC 7289, vers – 1800
Yale Babylonian Collection

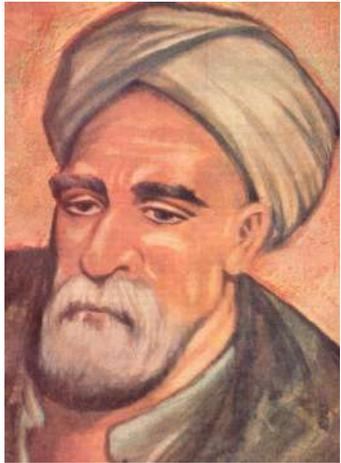
Longueur du côté : 30.

Diagonale :

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{305470}{216000} \approx 1,414213 \approx \sqrt{2}$$

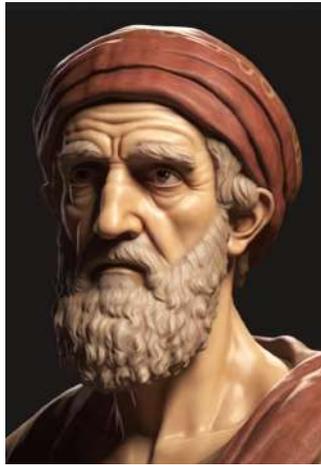
$$42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2} = \frac{152735}{3600} \approx 42,4264 \approx 30\sqrt{2}$$

Histoire des maths



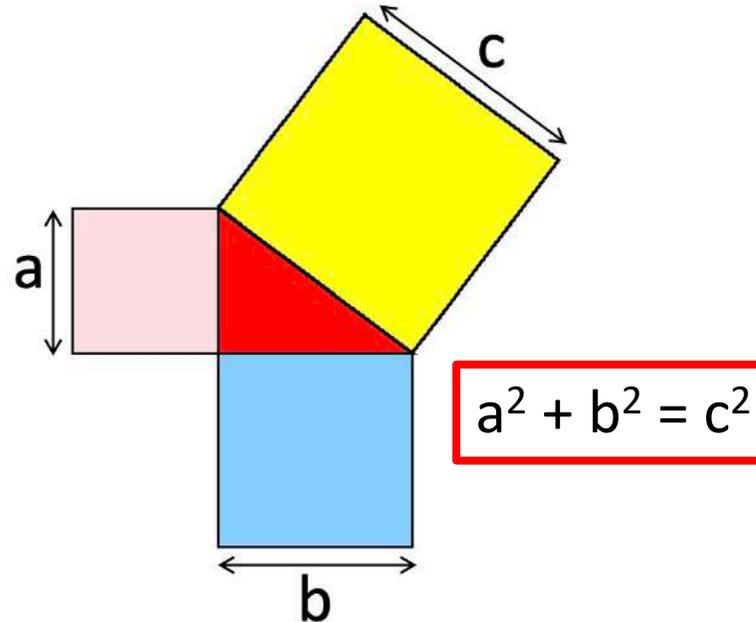
Al-Nayrizi
(865 – 922)

Preuve par pavage

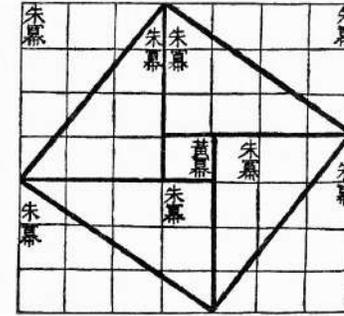


Pythagore
(500 av. J.C.)

Preuve



Zhoubi Suanjing
(vers 0)
Procédure du Gougu



Baudhayana
(800 av. J.C.)

Triplets pythagoriciens



Cité maya de Tikal (800 av. J.C.)

Principes similaires

International Mathematical Union

1920 création ; 1932 dissolution ; 1950-52 rétablissement.

Rencontre entre les maths et le jonglage

1981 Article de Claude Shannon

1981 Paul Klimek *Quantic Juggling* : notation *siteswap*.

1985 Bruce Tiemann et Bengt Magnusson (*California Institute of Technology*)
Mike Day, Colin Wright et Adam Chalcraft (*Cambridge*)

Cas d'étude

- Rythme régulier
- Lancers alternatifs main droite / main gauche

Théorème de Shannon

Théorème (Shannon, 1981)

Jonglage **régulier** (une main fait le même lancer à chaque fois) avec **B balles**.

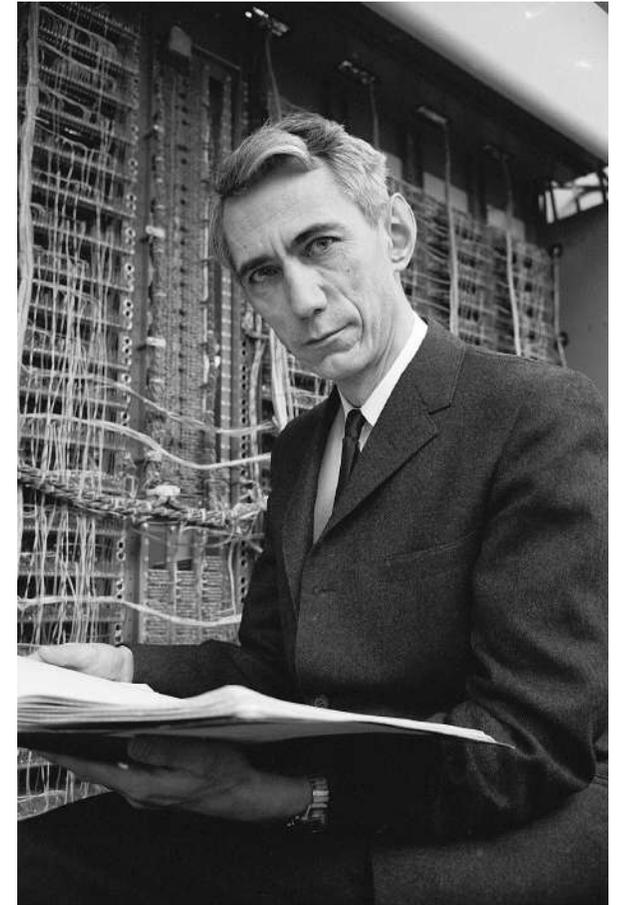
$$\frac{a + d}{v + d} = \frac{B}{H}$$

a : temps qu'une balle passe en l'air ;

d : temps pendant lequel une balle demeure dans une main ;

v : temps pendant lequel une main reste vide ;

H : nombre de mains.



Claude Shannon (1916 – 2001)

Preuve du théorème de Shannon

$$\frac{a + d}{v + d} = \frac{B}{H}$$

a : temps qu'une balle passe en l'air ;

d : temps pendant lequel une balle demeure dans une main ;

v : temps pendant lequel une main reste vide ;

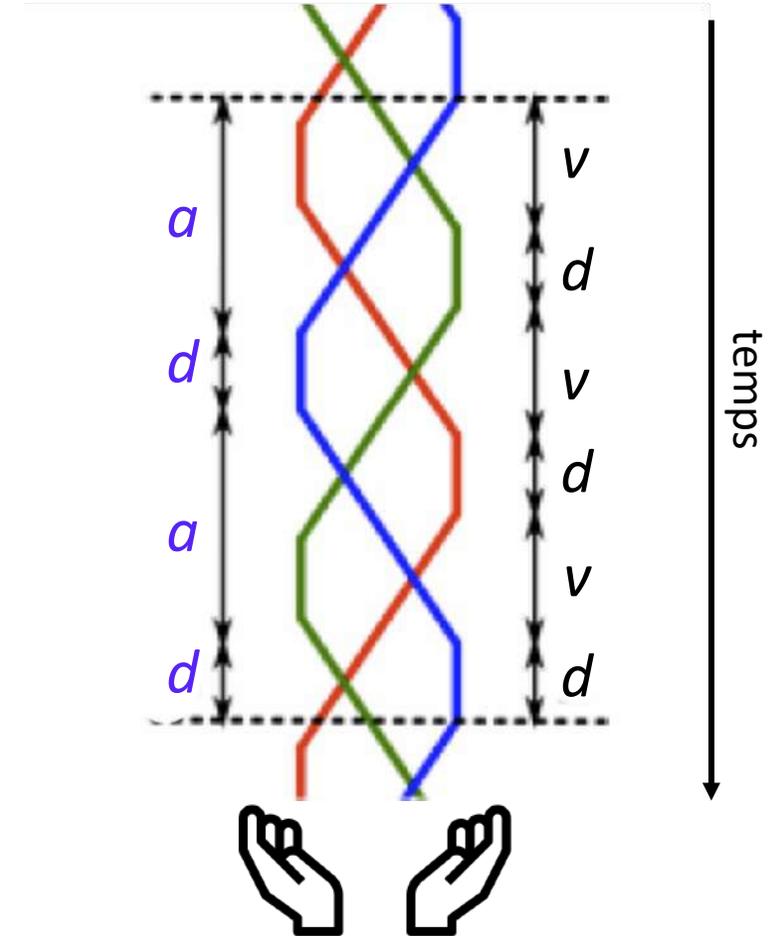
H : nombre de mains.

Cas $B=3$ et $H=2$.

Balle bleue et main droite :

$$2(a+d) = 3(v+d)$$

$$\frac{a + d}{v + d} = \frac{3}{2}$$



Conséquence du théorème de Shannon

$$a = (v + d) \frac{B}{H} - d$$

a est une fonction affine **croissante** du nombre de balles B .

Plus on veut jongler avec un nombre important de balles, plus il faut augmenter leur temps passé en l'air a .

Comment augmenter a ?

→ **En lançant les balles plus haut !**

Hauteur des lancers

t : temps pour tomber d'une hauteur h

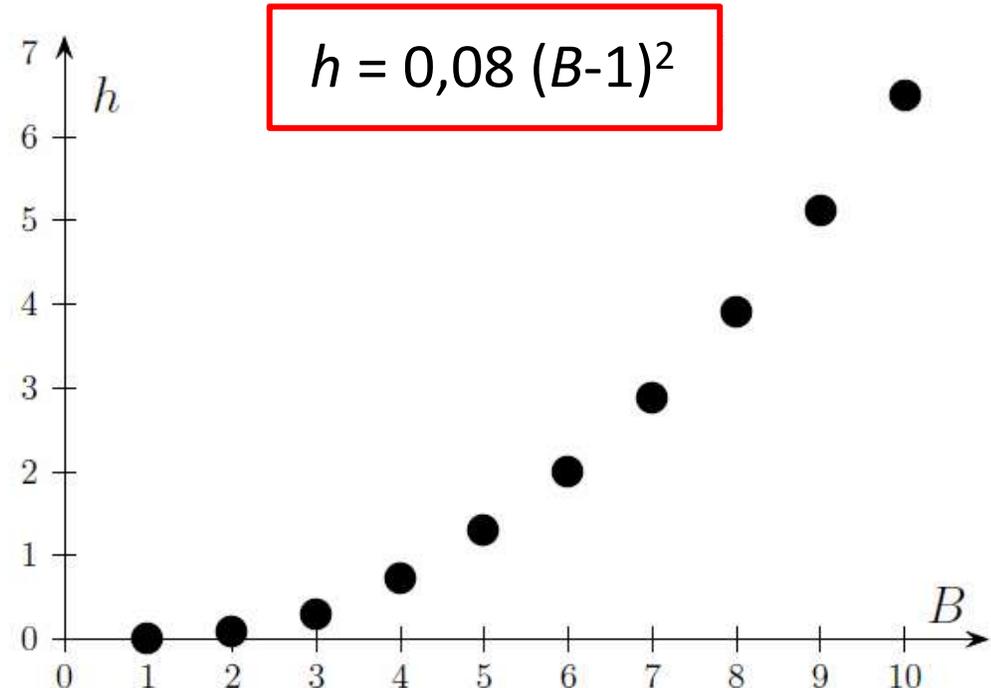
Pesanteur $\approx 10 \text{ m.s}^{-2}$
 $v = d = 1/4 \text{ s}$

$$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$h = \frac{5}{4}g \left((v + d) \frac{B}{H} - d \right)^2$$

Pour jongler à B balles,
il faut lancer chaque
balle à une hauteur
d'environ
 $h = 0,08 (B-1)^2$

B	h
1	0
2	0,1
3	0,3
4	0,7
5	1,3
6	2,0
7	2,9
8	4,0
9	5,1
10	6,5



Records de jonglage



Records de jonglage

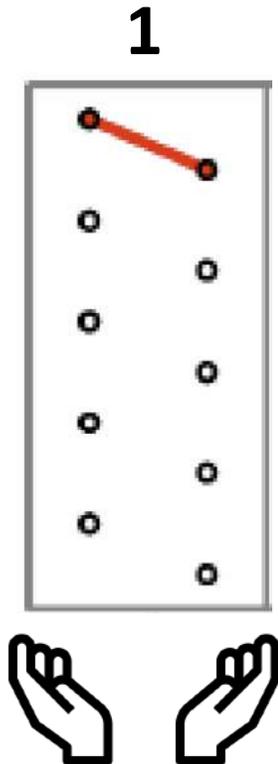
3 balles	12 h 5 min	David Slick	
4 balles	3 h 00 min	Maximilian Kuschmierz	
5 balles	3 h 44 min	Bence Ónodi	
6 balles	25 min 17 s	Adolfo E. Almonacid Cardenas	
7 balles	16 min 25 s	Adolfo E. Almonacid Cardenas	
8 balles	1 min 18 s	Enzo Nicolas Aguero	
9 balles	55 s	Anthony Gatto	
10 balles	40 captures	Tom Whitfield	
11 balles	34 captures	Tom Whitfield	
12 balles	20 captures	Alex Barron	
13 balles	15 captures	Alex Barron	
14 balles	14 captures	Alex Barron	

Records de jonglage



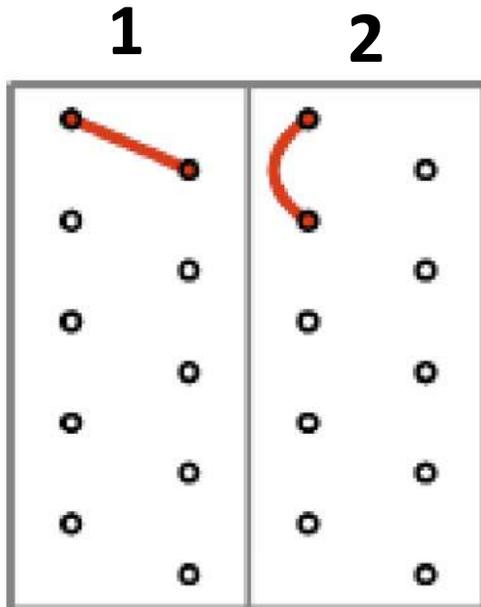
Notation mathématique : le *siteswap*

Principe : Utiliser des chiffres pour représenter les lancers.



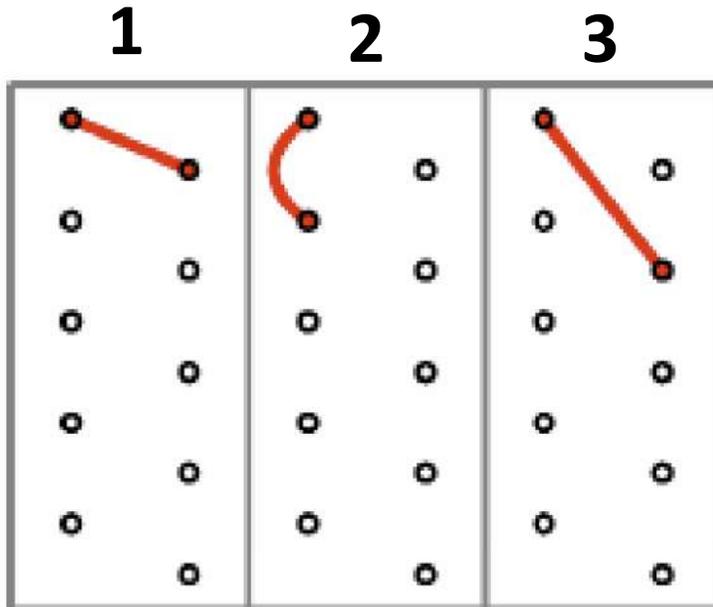
1. La balle est lancée directement dans la main opposée, rapidement (1 temps)

Notation mathématique : le *siteswap*



2. La balle est lancée et rattrapée par la même main, pas très haut (10 cm).
En pratique, on ne la lance pas : elle reste dans la main.

Notation mathématique : le *siteswap*

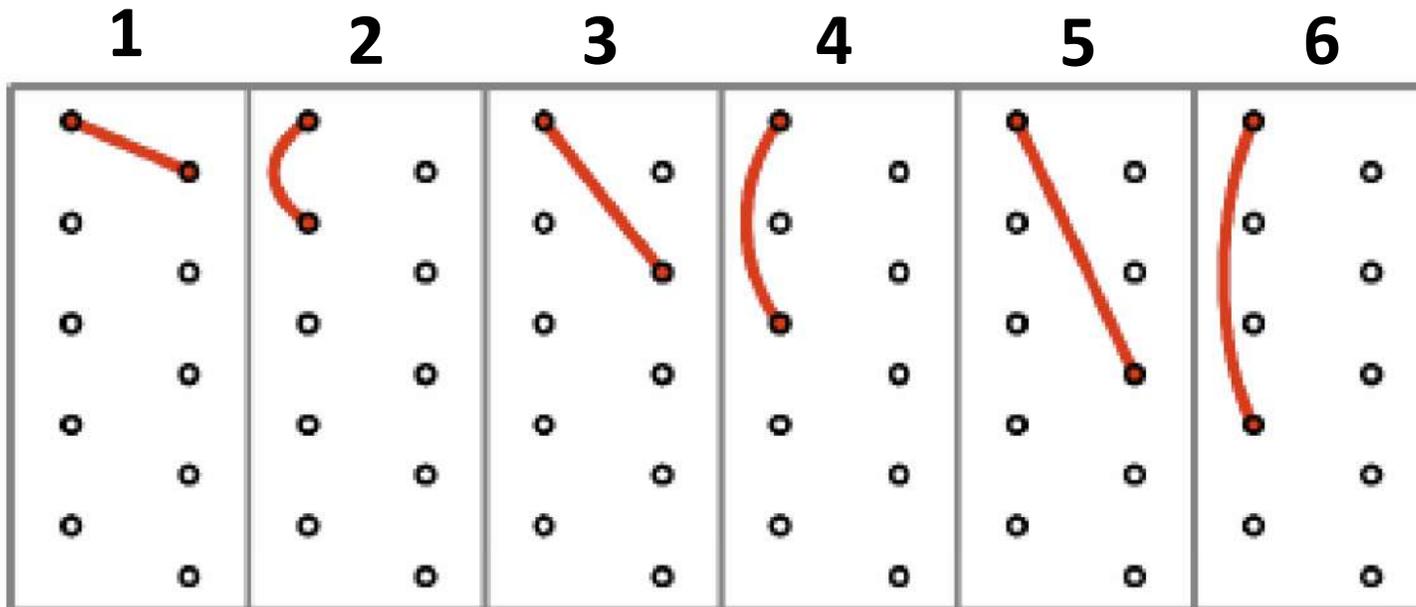


3. La balle est lancée dans la main opposée mais plus haut (environ 30 cm) puisqu'il lui faut trois temps pour retomber. Dans le même temps, on doit pouvoir faire trois lancers 1.

C'est le lancer pour la cascade à 3 balles.

Notation mathématique : le *siteswap*

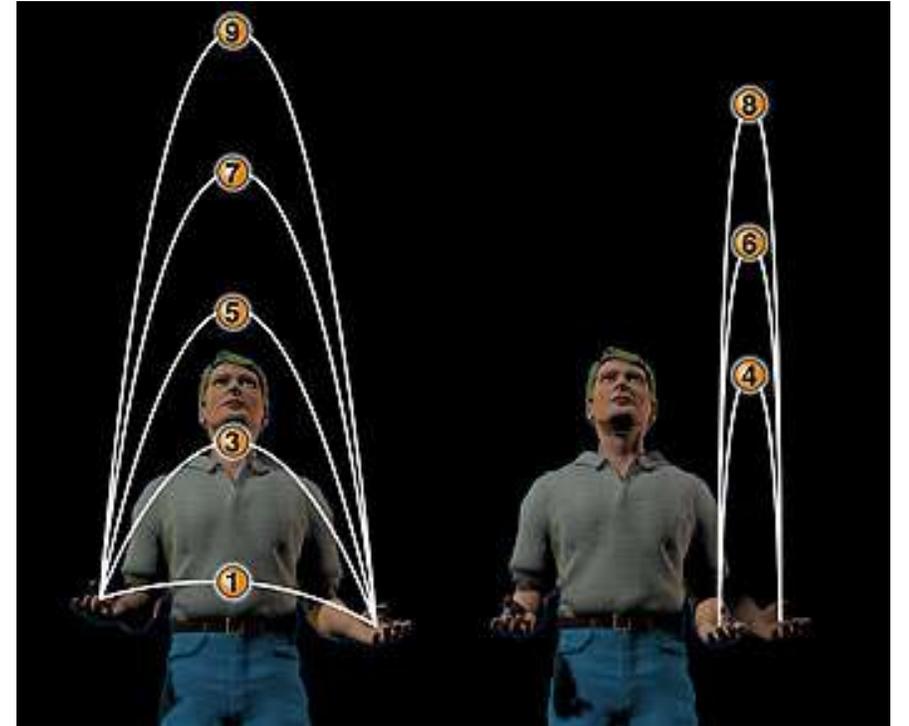
4. Lancer vertical, à environ 70 cm, pour retomber dans la même main.
5. Lancer croisé haut, environ 1,3 m.



0. main sans balle en attente.

Notation mathématique : le *siteswap*

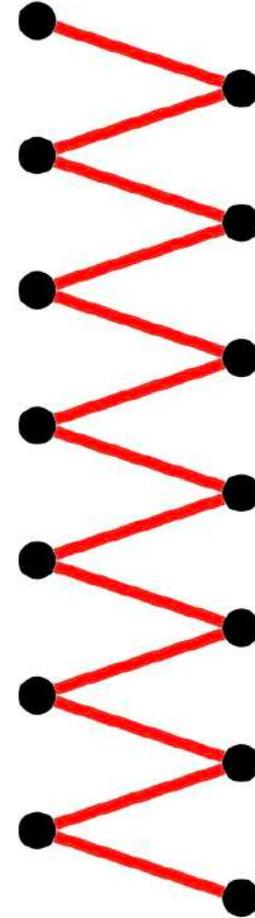
Les **lancers impairs** sont **croisés** et envoient dans la **main opposée** ;
Les **lancers pairs** sont **verticaux** et envoient dans la **même main**.



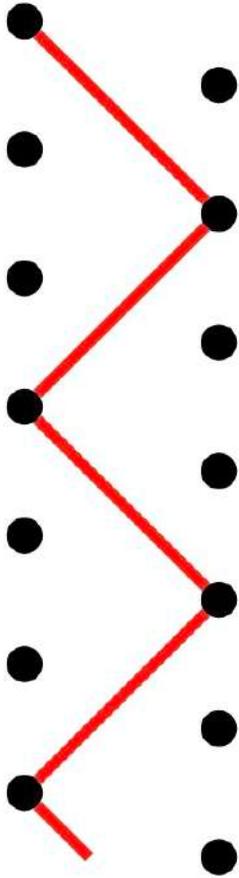
siteswap d'une figure de jonglage : succession de ces nombres entiers.

Si périodique, on donne juste le code sur une période.

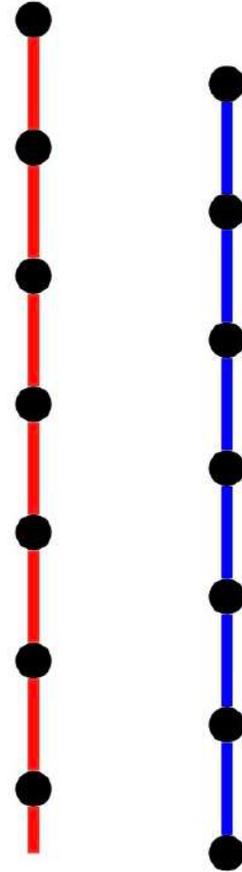
Cascade 1 balle = 11111111.... = 1



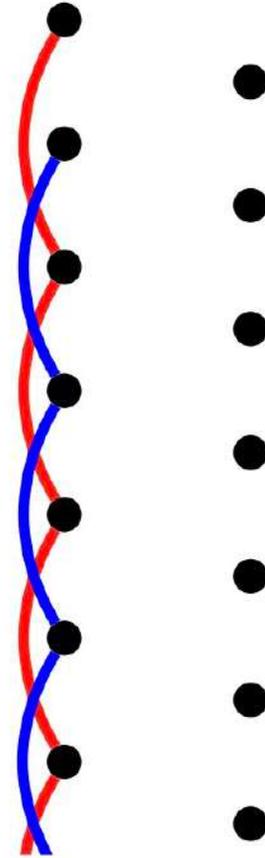
Lancer = 300300300.... = 300



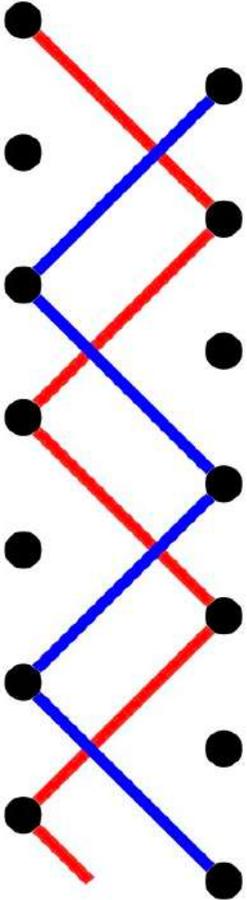
Cascade 2 balles = 2222222222..... = 2



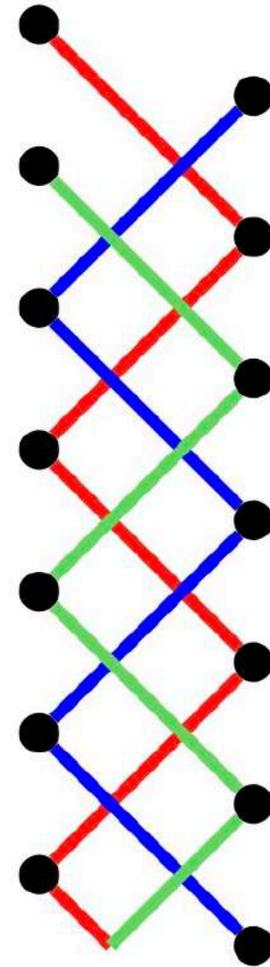
2 balles 1 main = 40404040..... = 40



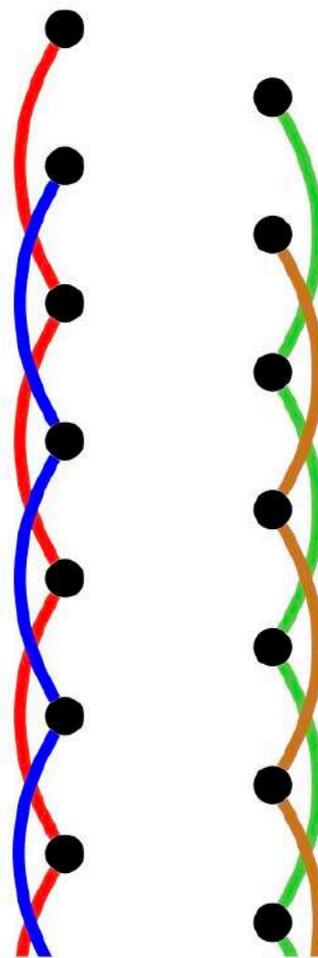
Lancer 2 balles = 330330330..... = 330



Cascade 3 balles = 3333333333..... = 3



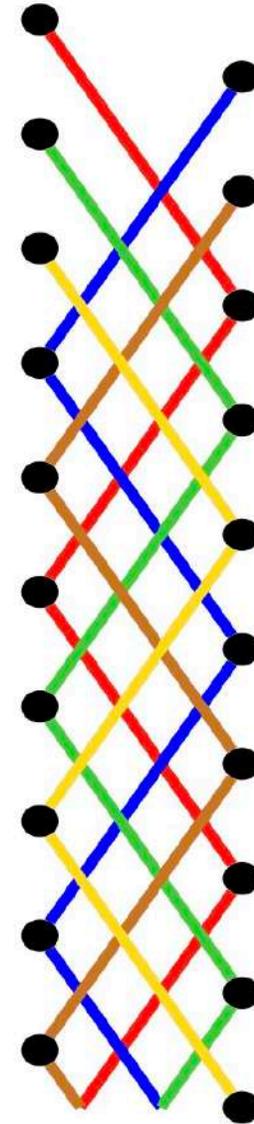
Cascade 4 balles = 44444444..... = 4



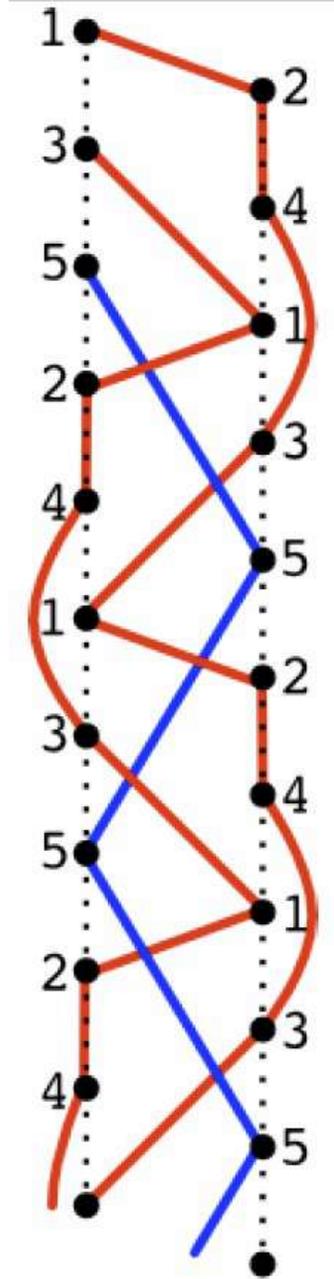
Les balles ne croisent pas.

Ca revient à jongler à 2 balles avec chacune des deux mains.

Cascade 5 balles = 55555555..... = 5



1234512345..... = 12345



Les boules ne font pas la même chose.

La **balle bleue** fait des lancers de 5.

Les deux **deux balles rouges** font le même motif : successions de lancers **1, 2, 4, 3**.

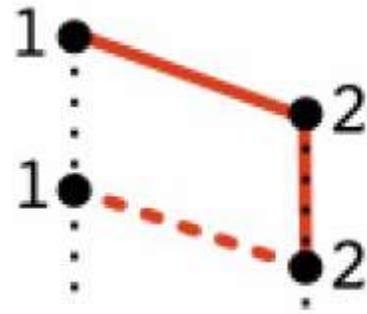
Questions

Question 1 :

Toute suite de nombres correspond-elle à un *siteswap jonglable* ?

NON

- 12 : deux balles arrivent au même moment dans la même main.



une infinité de balles sont nécessaires.

Questions

Question 2 :

Y a-t-il une **condition** sur les nombres pour qu'un *siteswap* soit **jonglable** ?

Question 3 :

Si un *siteswap* jonglable est donné, comment savoir **combien** il nécessite **de balles** ?

Question 4 :

Comment déterminer **tous les *siteswaps* jonglables** ?

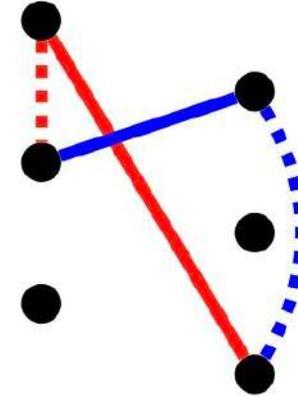
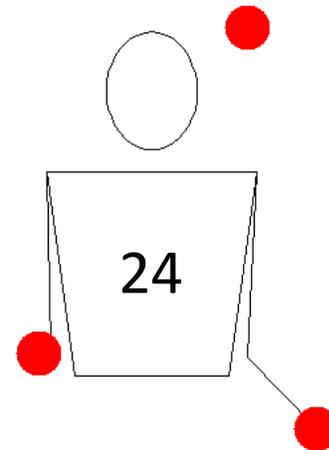
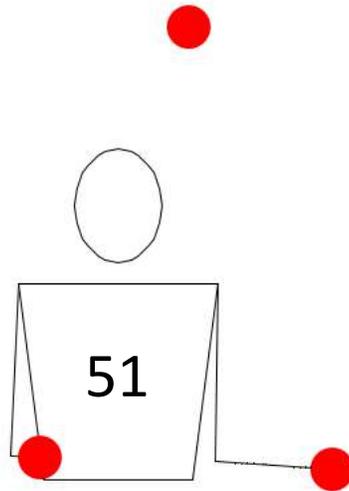
Echange d'arrivées

siteswap jonglable

deux lancers consécutifs (a,b) . (avec $a > 0$)

changer en $(b+1, a-1)$.

→ nouveau *siteswap* jonglable



51 → 24

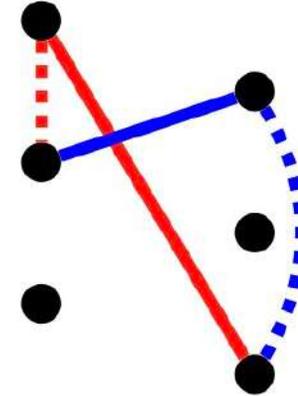
Echange d'arrivées

siteswap jonglable

deux lancers consécutifs (a,b) . (avec $a > 0$)

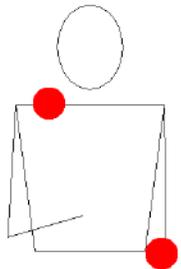
changer en $(b+1, a-1)$.

→ nouveau *siteswap* jonglable

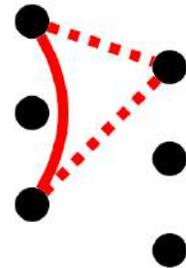
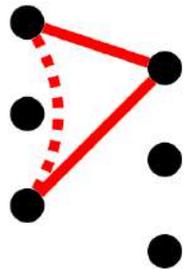


51 → 24

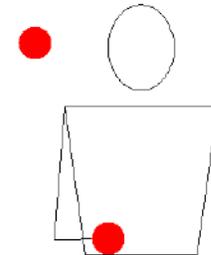
Cas particuliers $a = 1$ ou $b = 0$.



13 → 40

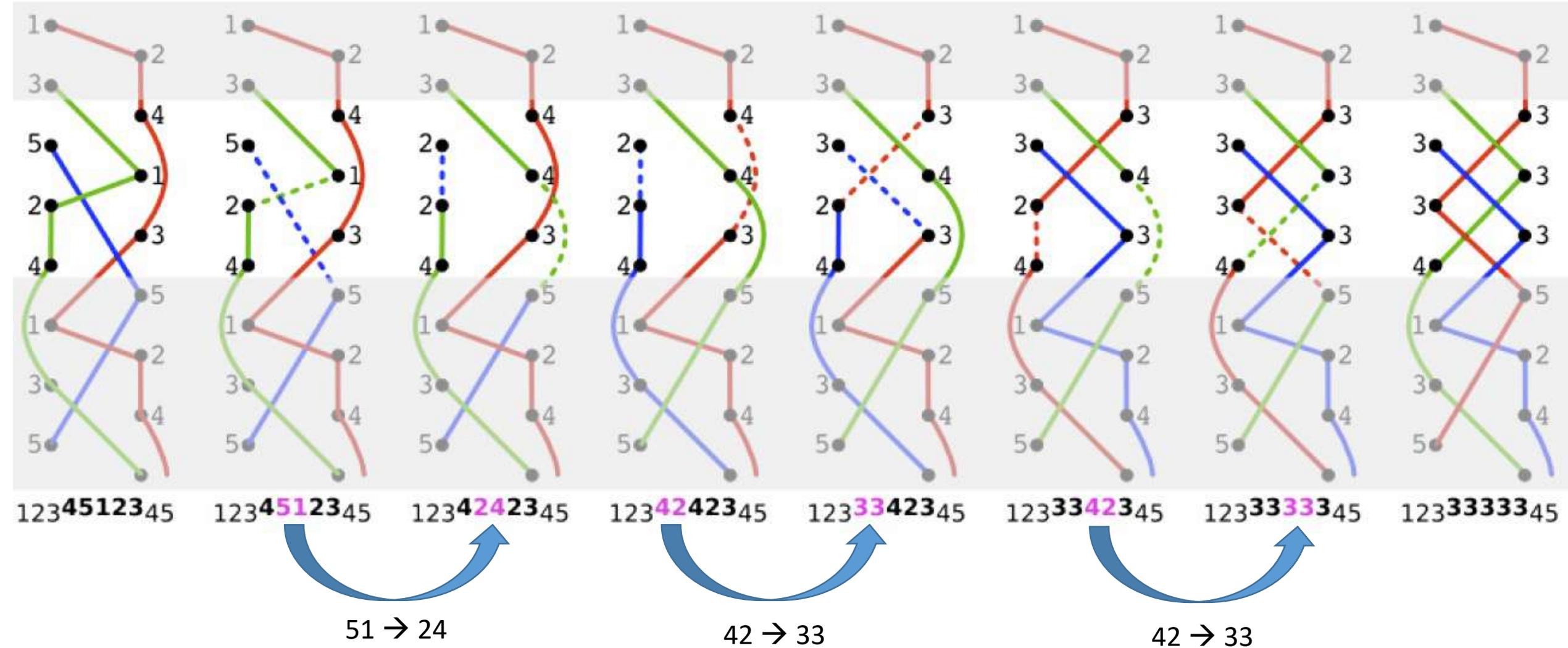


40 → 13



Echange d'arrivées

45123 \mapsto 42423 \mapsto 33423 \mapsto 33333



Théorème de la moyenne

Pour tout *siteswap* jonglable,

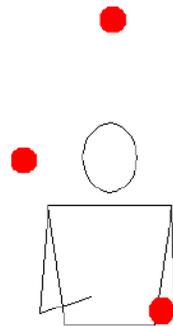
moyenne de ses nombres = **nombre de balles** nécessaire pour le jongler

EXEMPLES :

12345

$$1+2+3+4+5 = 15.$$

$$15/5 = 3.$$



12345 se joue à **3 balles**.

1234

$$1+2+3+4 = 10.$$

$$10/4 = 2,5.$$

1234 n'est pas **jonglable**.

Théorème de la moyenne

Pour tout *siteswap* jonglable,

moyenne de ses nombres = **nombre de balles** nécessaire pour le jongler

Condition nécessaire pour qu'un *siteswap* soit jonglable.
Il faut que la moyenne du *siteswap* soit un nombre entier.

Combien de balles pour 441 ?

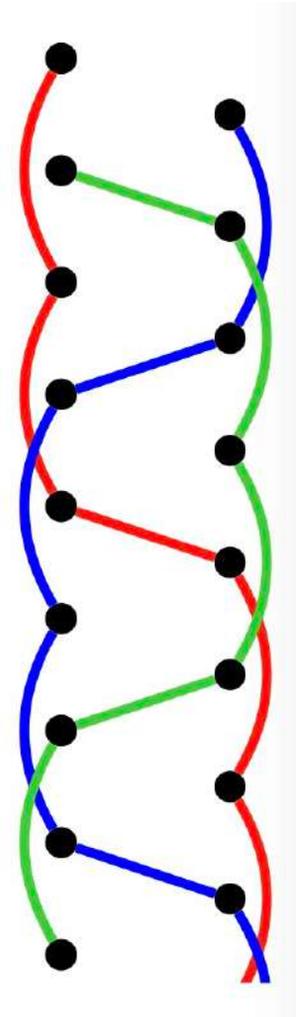


Combien de balles pour 441 ?

$$4+4+1 = 9.$$

$$9/3 = 3.$$

Il faut 3 balles.

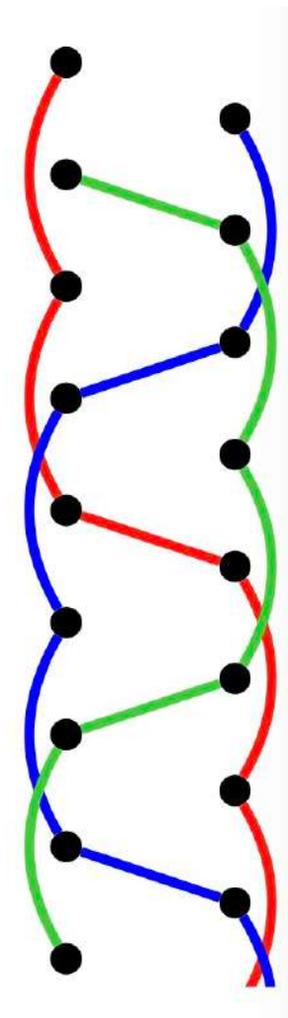


Combien de balles pour 441 ?

$$4+4+1 = 9.$$

$$9/3 = 3.$$

Il faut 3 balles.



Combien de balles pour 4532 ?

$$4+5+3+2 = 14.$$

$$14/4 = 3,5.$$

SiteSwap **non valide**.

Ce n'est pas jonglable.



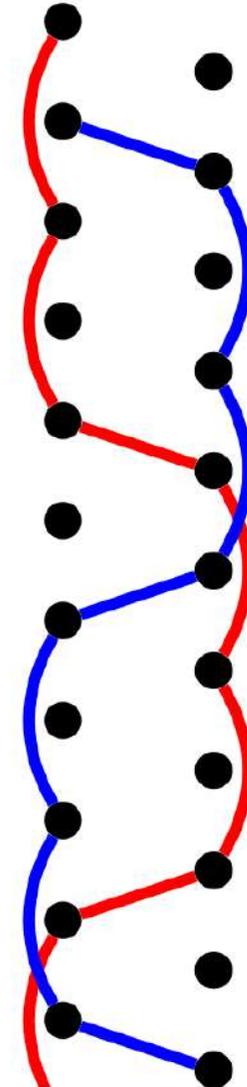
Combien de balles pour 401440041 ?



Combien de balles pour 401440041 ?

$$4+0+1+4+4+0+0+4+1 = 18.$$
$$18/9 = 2.$$

Il faut 2 balles.



Combien de balles pour 5671234 ?



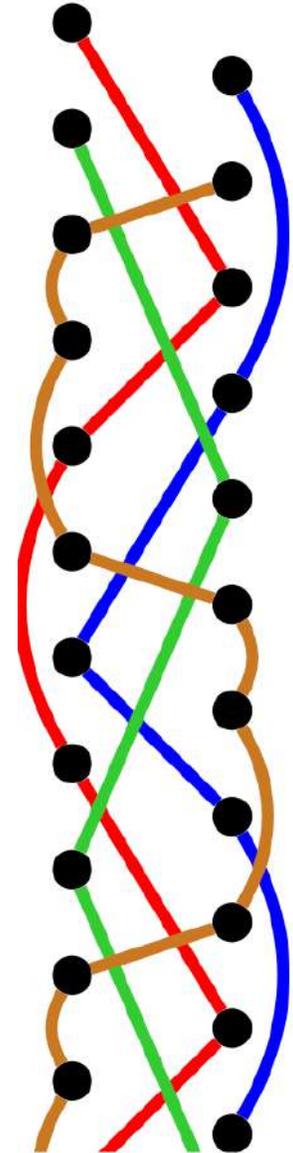
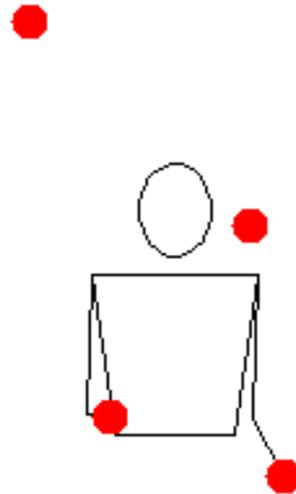
Combien de balles pour 5671234 ?

$$5+6+7+1+2+3+4 = 28.$$

$$28/7 = 4.$$

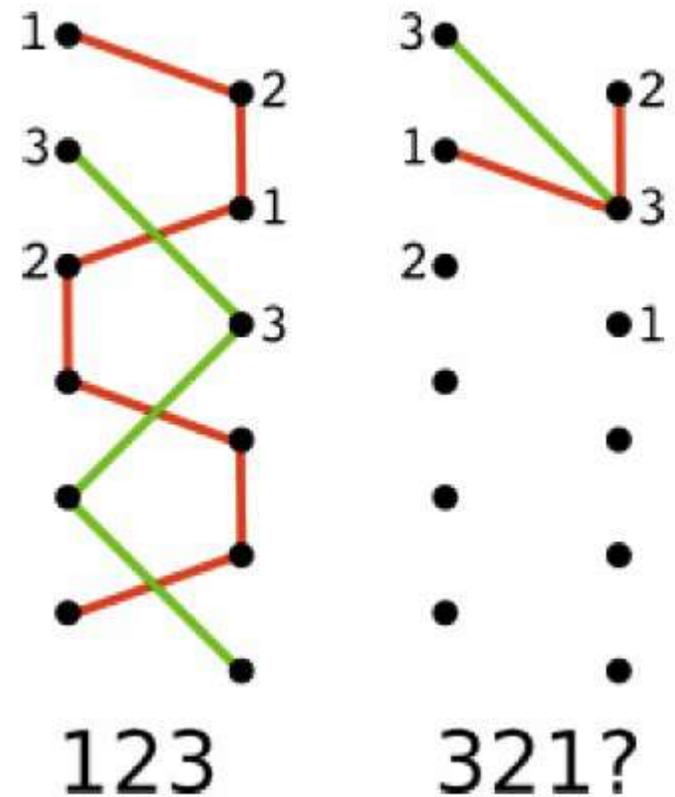
Il faut 4 balles.

Les quatre balles font des **mouvements différents.**



Condition nécessaire mais pas suffisante

- Par exemple on peut jongler 123 (avec $6/3 = 2$ balles) mais pas 321 car au 3e temps on aurait trois balles arrivant dans la même main !
- Donc la propriété de la moyenne ne suffit pas.
- Pour un siteswap jonglable donné, une permutation des nombres n'est pas toujours jonglable.



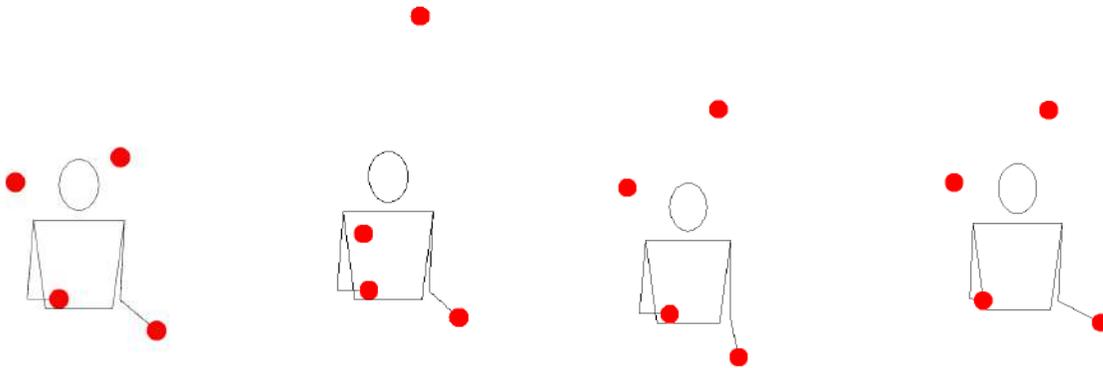
Nouvelles figures grâce à *siteswap*

jonglage régulier

succession d'échanges d'arrivées

autre **figure jonglable**

4444 → 4453 → 4552 → 5551



5551 a été découverte grâce à *siteswap*

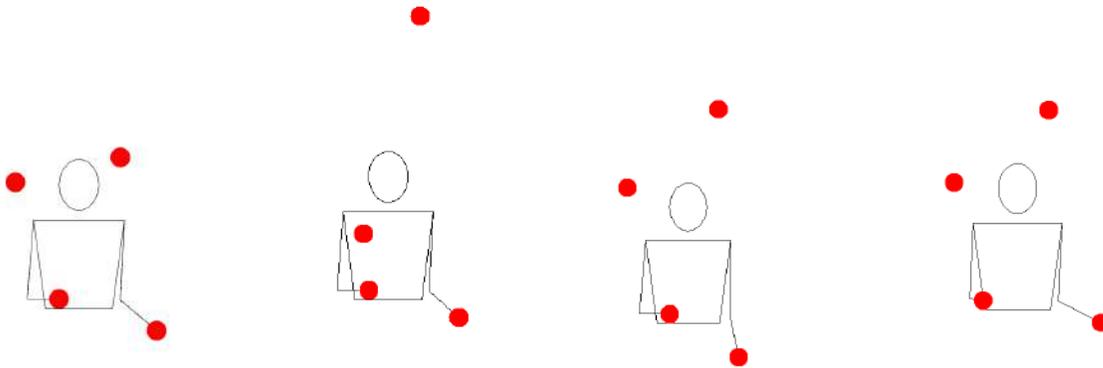
Nouvelles figures grâce à *siteswap*

jonglage régulier

succession d'échanges d'arrivées

autre **figure jonglable**

4444 → 4453 → 4552 → 5551



5551 a été découverte grâce à *siteswap*



Générer tous les *siteswaps* de hauteur donnée

Etat pour hauteur h : mot binaire de h bits (0 ou 1).

k -ième bit vaut 1 : une balle va tomber dans k temps.

vaut 0 : aucune balle ne va tomber dans k temps.

B balles $\rightarrow B$ bits à 1.

Exemple : $h=4$; $B=2$ six états

1100 , 1010 , 0110 , 0011 , 0101 , 1001 .

Transitions



Générer tous les *siteswaps* de hauteur donnée

Etat pour hauteur h : mot binaire de h bits (0 ou 1).

k -ième bit vaut 1 : une balle va tomber dans k temps.

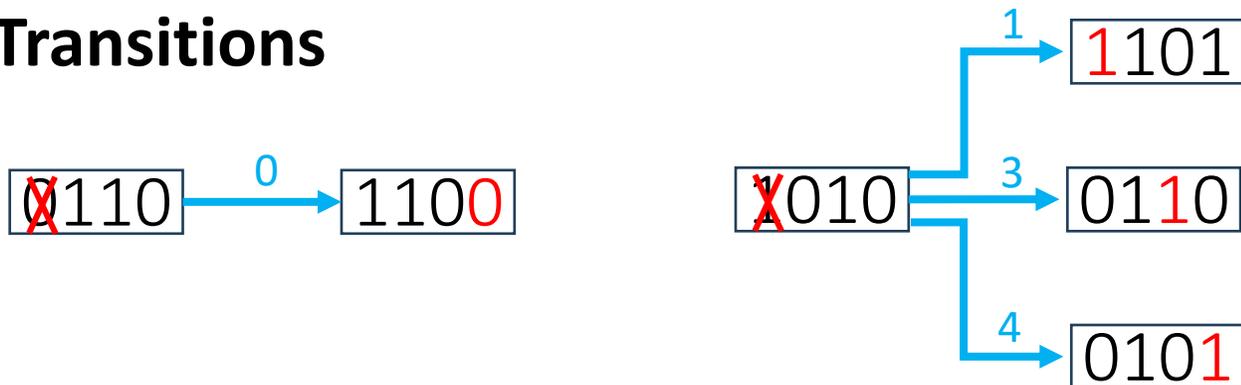
vaut 0 : aucune balle ne va tomber dans k temps.

B balles $\rightarrow B$ bits à 1.

Exemple : $h=4$; $B=2$ six états

1100 , 1010 , 0110 , 0011 , 0101 , 1001 .

Transitions



Graphe de transition : 2 balles hauteur 2

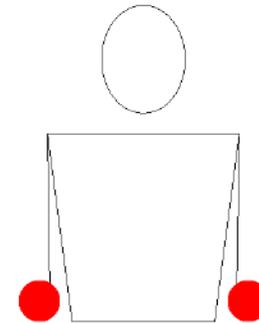


0 1 2

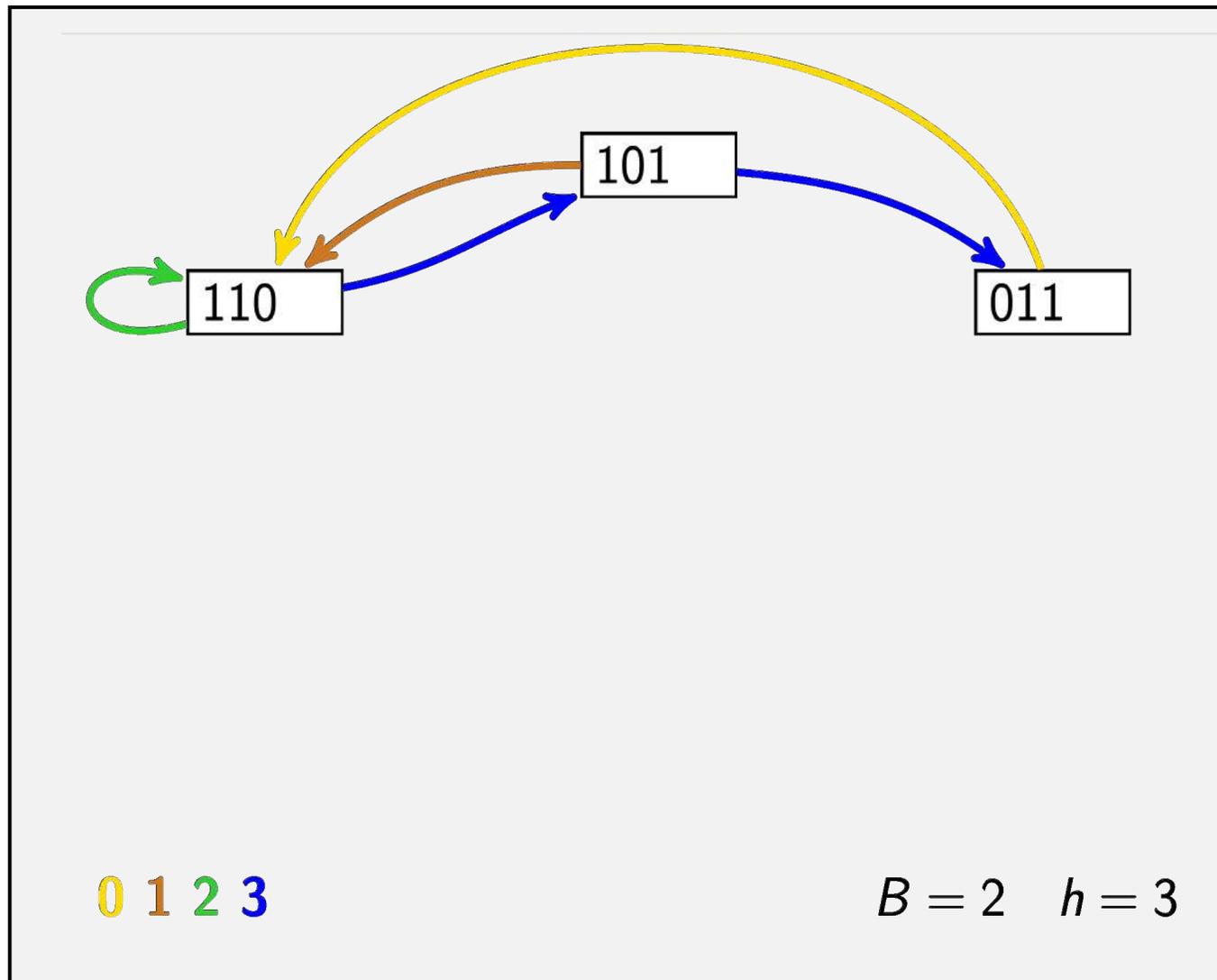
$B = 2$ $h = 2$

Un seul état : 11 .

Seul lancer possible :
lancer 2 = garder la
balle dans la main.



Graphe de transition : 2 balles hauteur 3

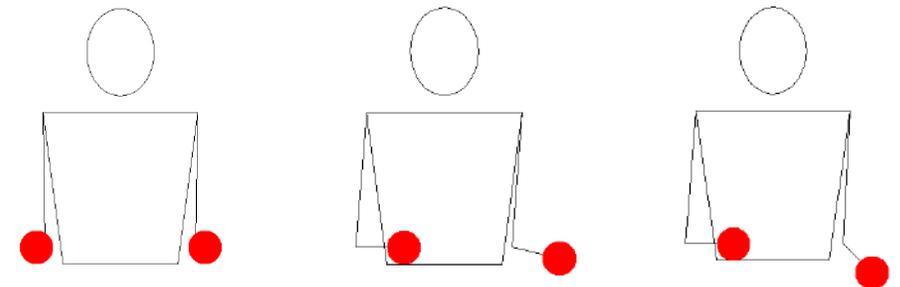


Trois états :

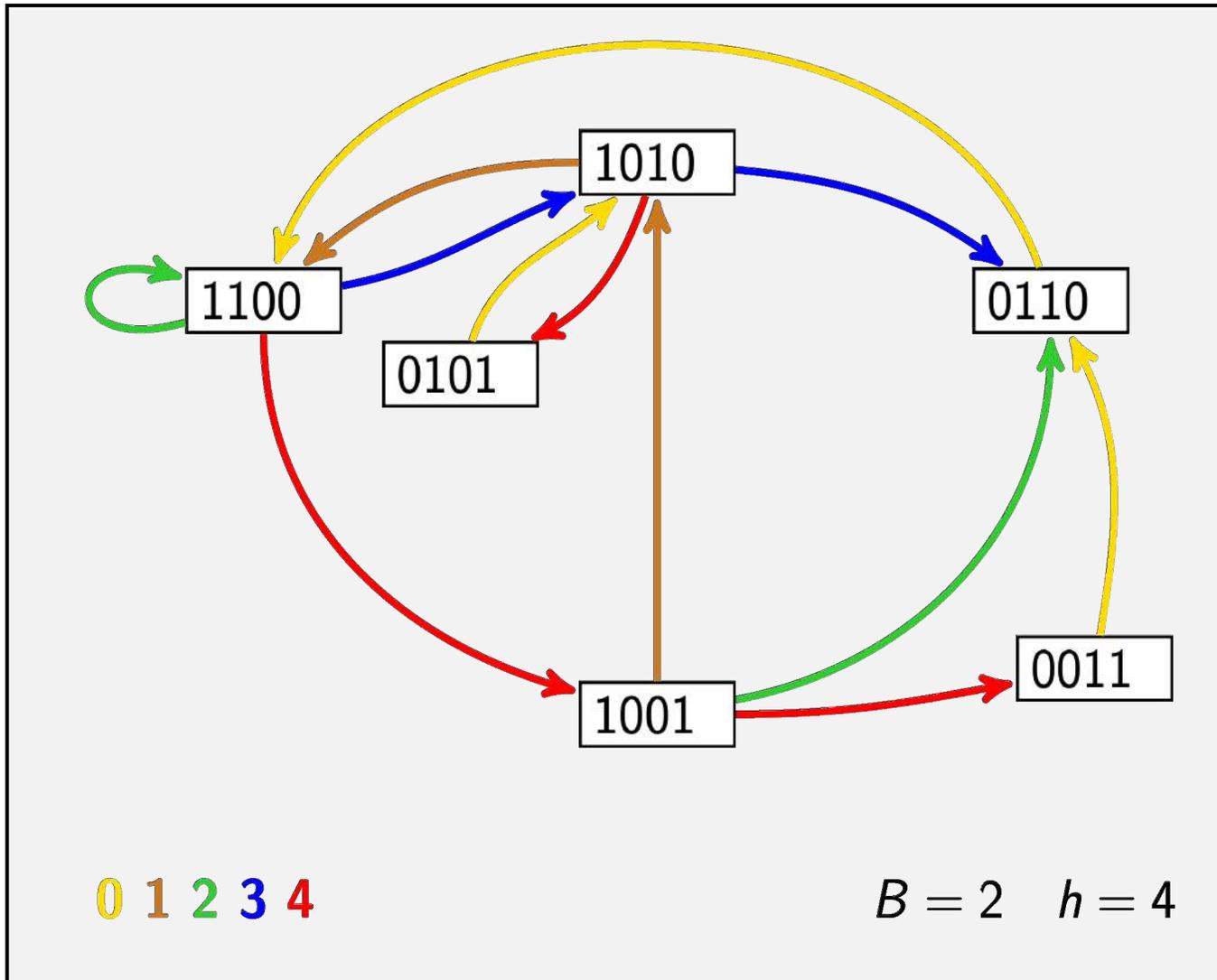
$\boxed{110}$, $\boxed{101}$ et $\boxed{011}$.

Trois cycles :

(2) , (31) et (330)



Graphe de transition : 2 balles hauteur 4

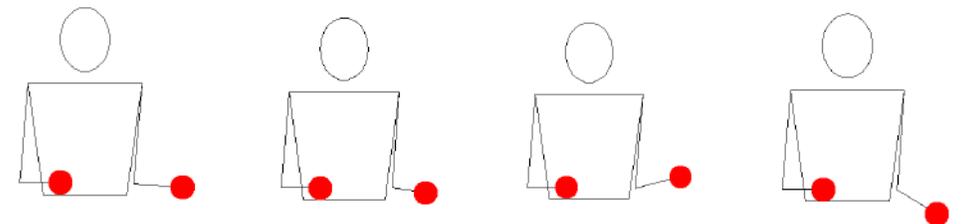
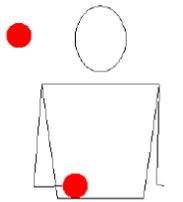


Six états :

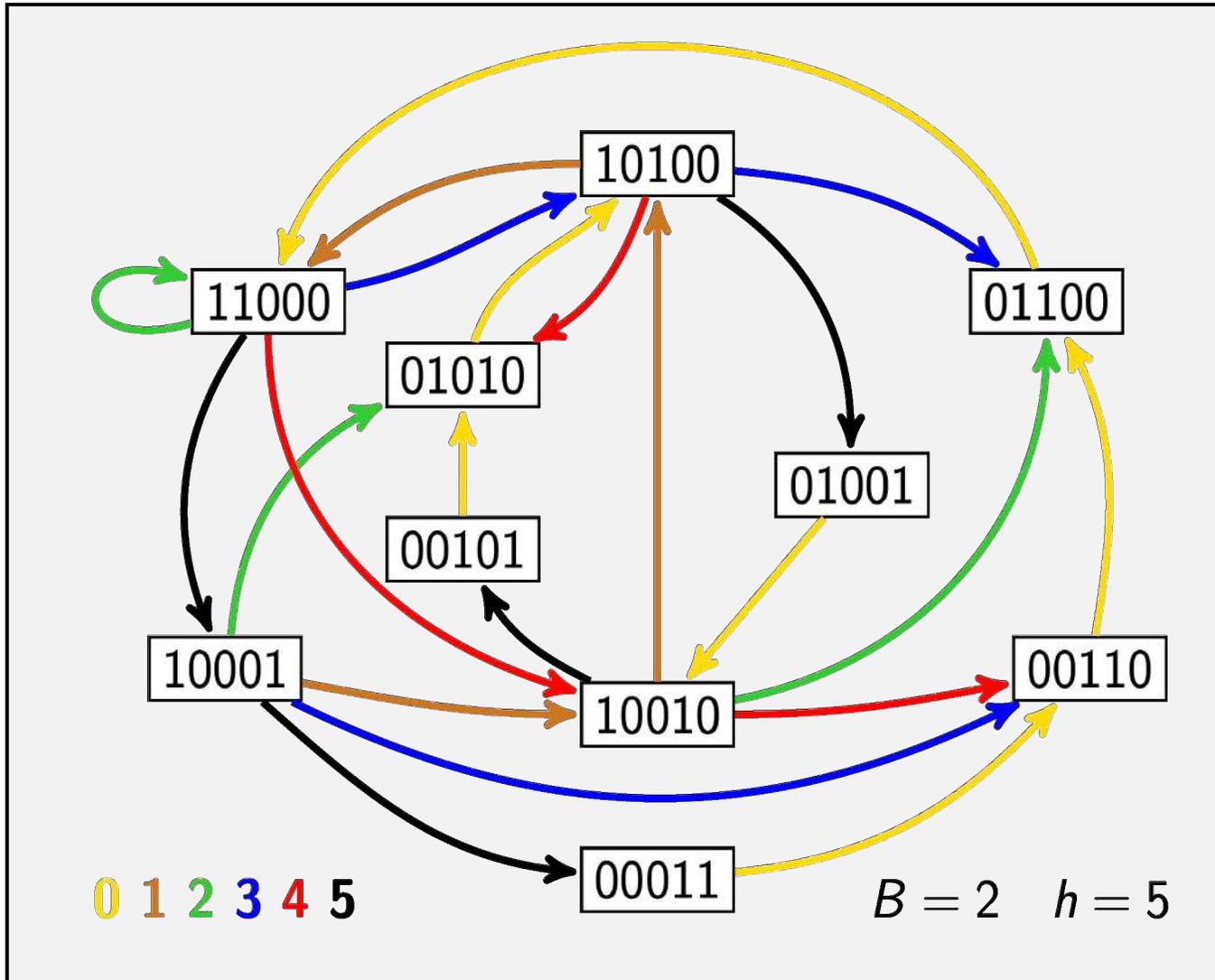
1100 , 1010 , 0110 ,
0011 , 0101 , 1001 .

Huit cycles :

(2) , (31) , (330) , (40) ,
(411) , (4130) , (420) , (4400)



Graphe de transition : 2 balles hauteur 5

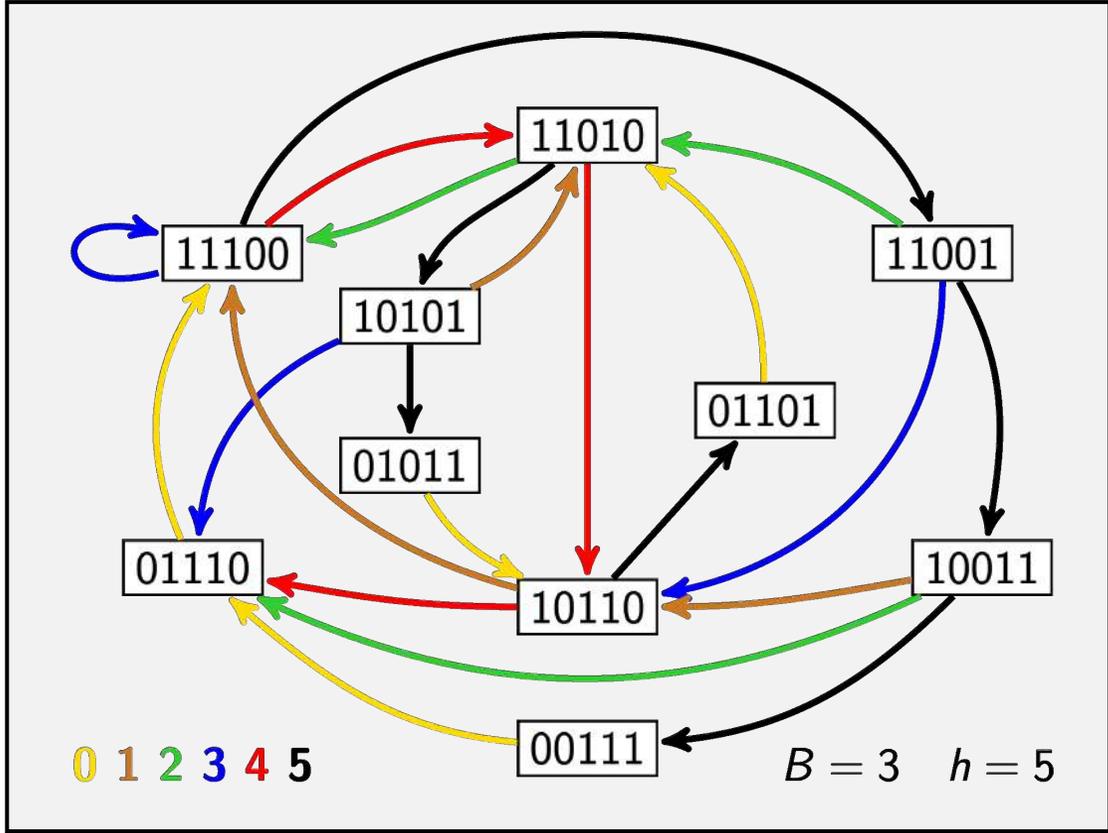
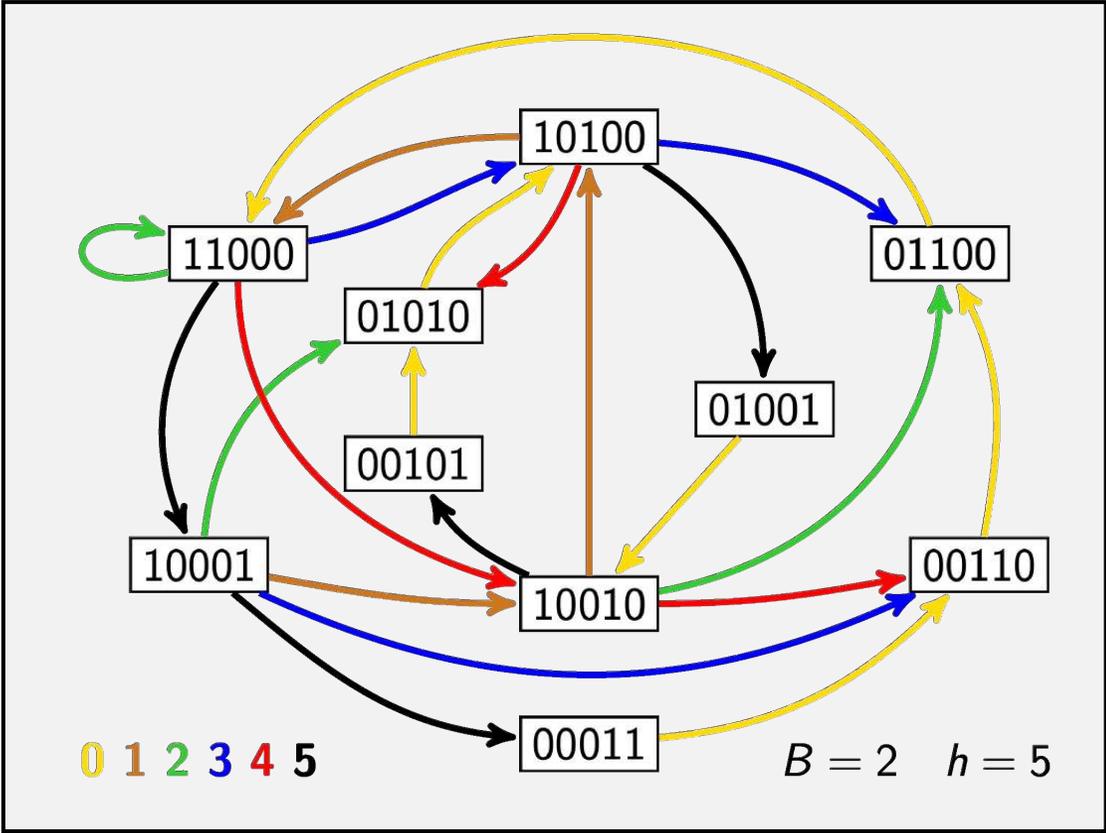


Dix états :

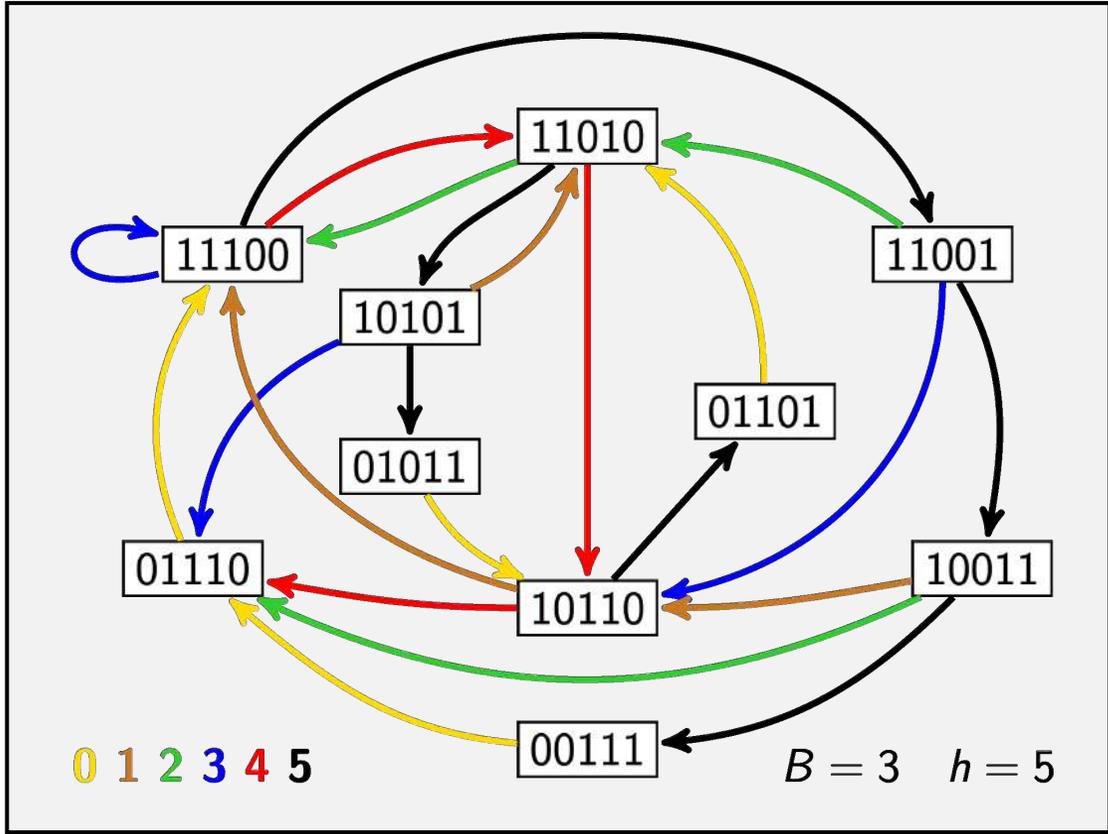
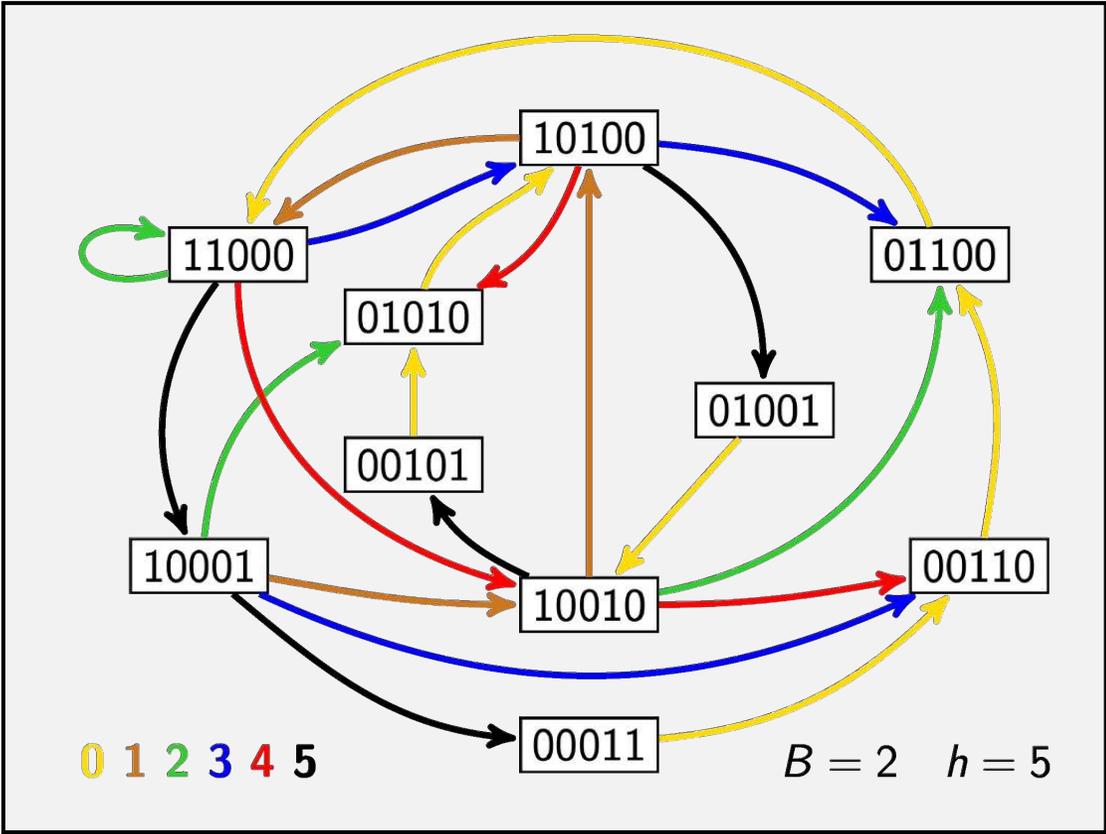
25 cycles :

(2), (31), (330),
(40), (411), (420), (4400),
(50014), (500304), (501),
(50203), (504003), (50500),
(5111), (51130), (5120),
(51400), (515001),
(5150030), (5201), (52030),
(5205120), (52051400),
(5300), (55000)

Graphes de transition duaux

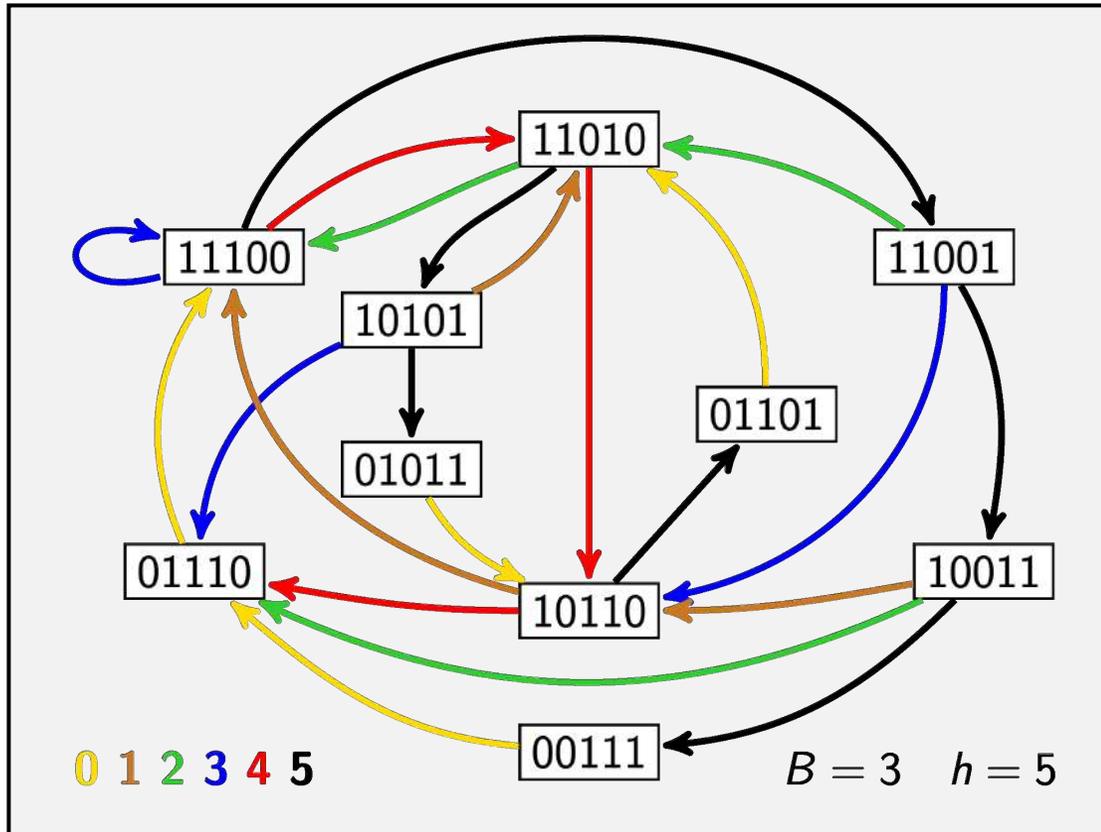


Graphes de transition duaux



Hauteur 5 : autant de siteswaps jonglables à 3 qu'à 2 balles.

D'une figure à l'autre



Passer de (3) à (42), (441) ou (55500) est facile, car ils passent tous par 11100.

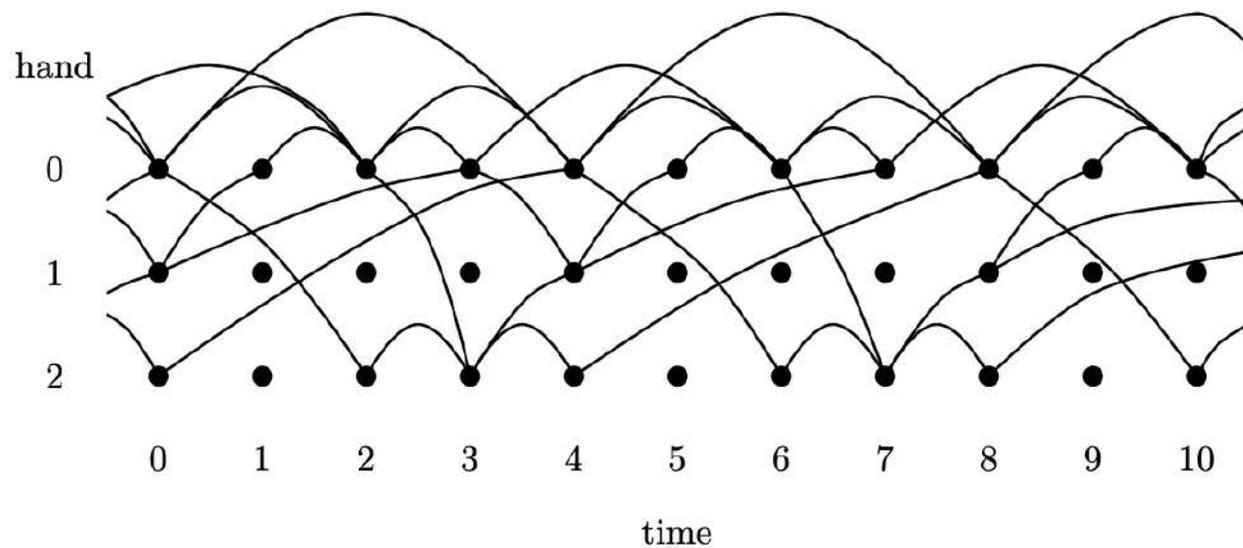
Passer de (3) à (51) est plus complexe, car ils n'ont **pas d'état en commun**.

Transitions nécessaires.

(3) 4 (51) 2 (3)
(3) 52 (51) 41 (3)

Avec plus de deux mains ?

$$\left(\begin{array}{ccc} [42]_0 2_2 & 1_0 & [21]_0 1_2 & 3_0 1_1 \\ [31]_0 & 0 & 0 & 0 \\ 4_0 & 0 & 1_2 & 1_1 1_2 \end{array} \right)$$





Références

- <http://www.jonglage.net/>
- <https://jugglinglab.org/>
- <http://prof.pantaloni.free.fr/spip.php?article165>