Vers l'infini …

TERRA NUMERICA

… et au delà.

Frédéric HAVET

David McCracken

COMPTER

1

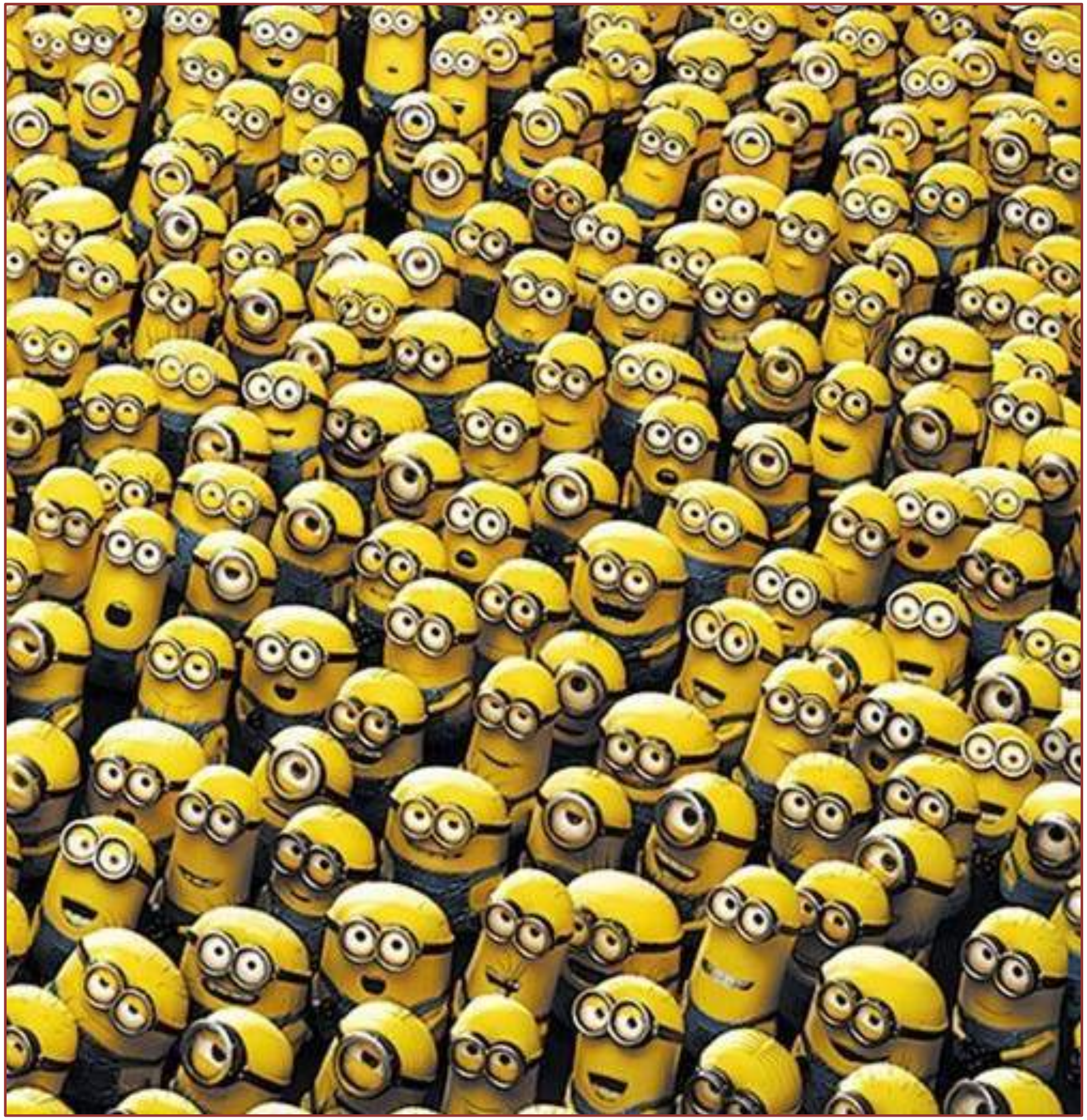
2

3

5

9

COMPTER



164

COMPTER …

MAIS JUSQU'OÙ ???

1 ,2 ,3, 4, 5 , … ,

123 456 789 , 123 456 790, …

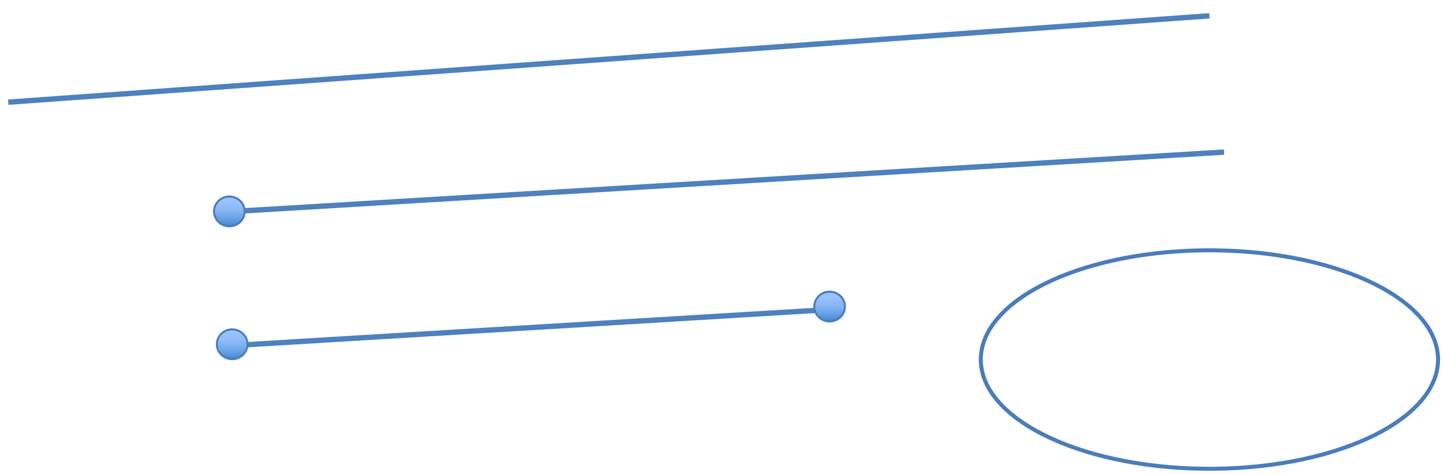
876543245678909876543456789098765434567899876543456789876547256663,
876543245678909876543456789098765434567899876543456789876547256664,

…

Il y a une infinité de nombres.

L'INFINI EN GÉOMÉTRIE …

Un **point** est **indivisible** ou **infiniment petit.**



Une droite, une demi-droite, ou un segment et plus généralement une courbe contient **une infinité de points.**

L'INFINI SELON ARISTOTE

infini en puissance ≠ infini en acte

La puissance, pour l'infini, n'est pas d'une nature telle que l'acte puisse jamais se réaliser.

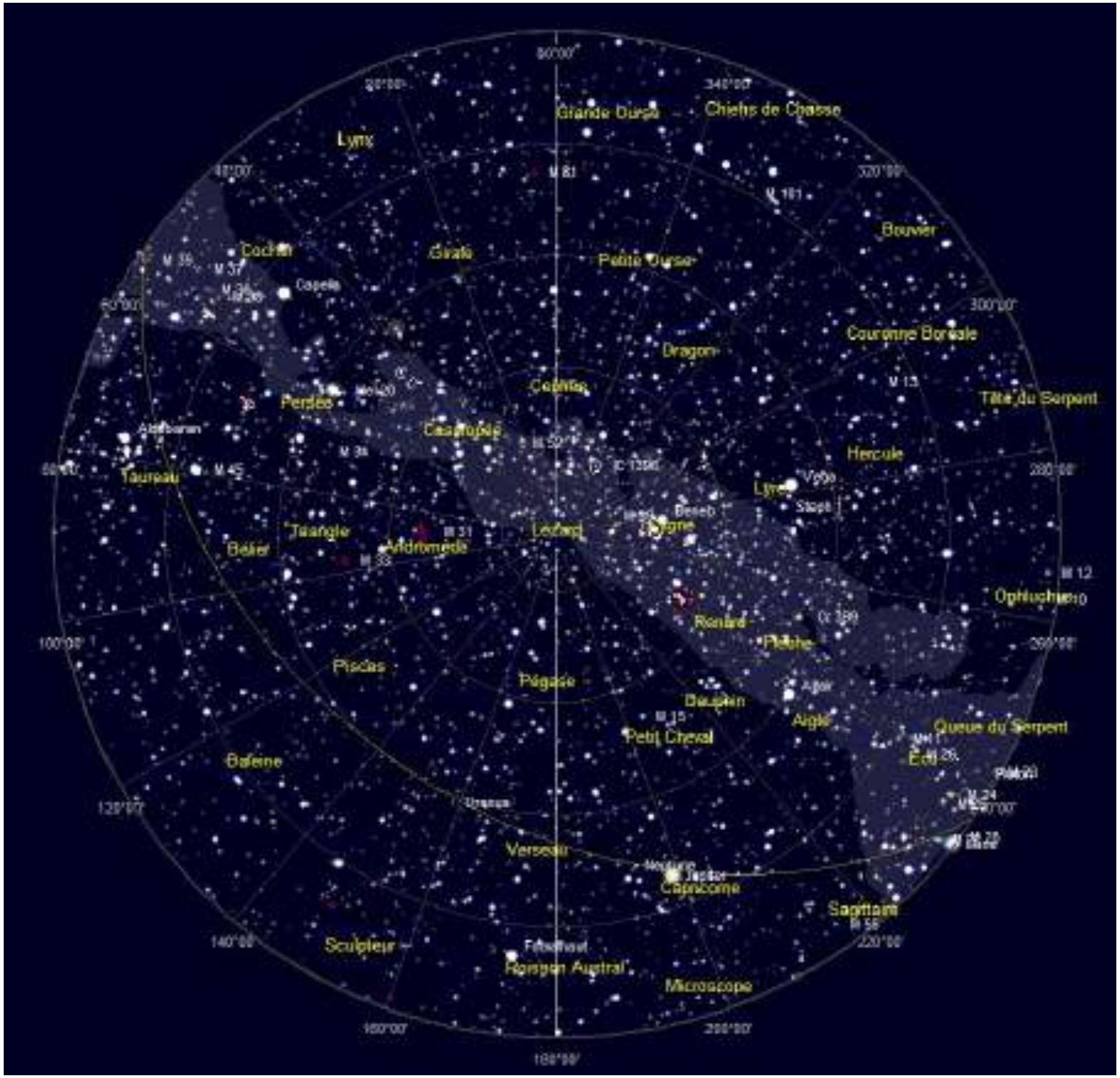
- **L'univers est fini.**

  Le nombre de grains de sable remplissant une sphère de la grandeur de notre cosmos est inférieur à 1 000 unités de nombres septièmes [$\leq 10^{51}$].

  Archimède

Aristote
384 - 322 av. J.-C.
par Raphaël

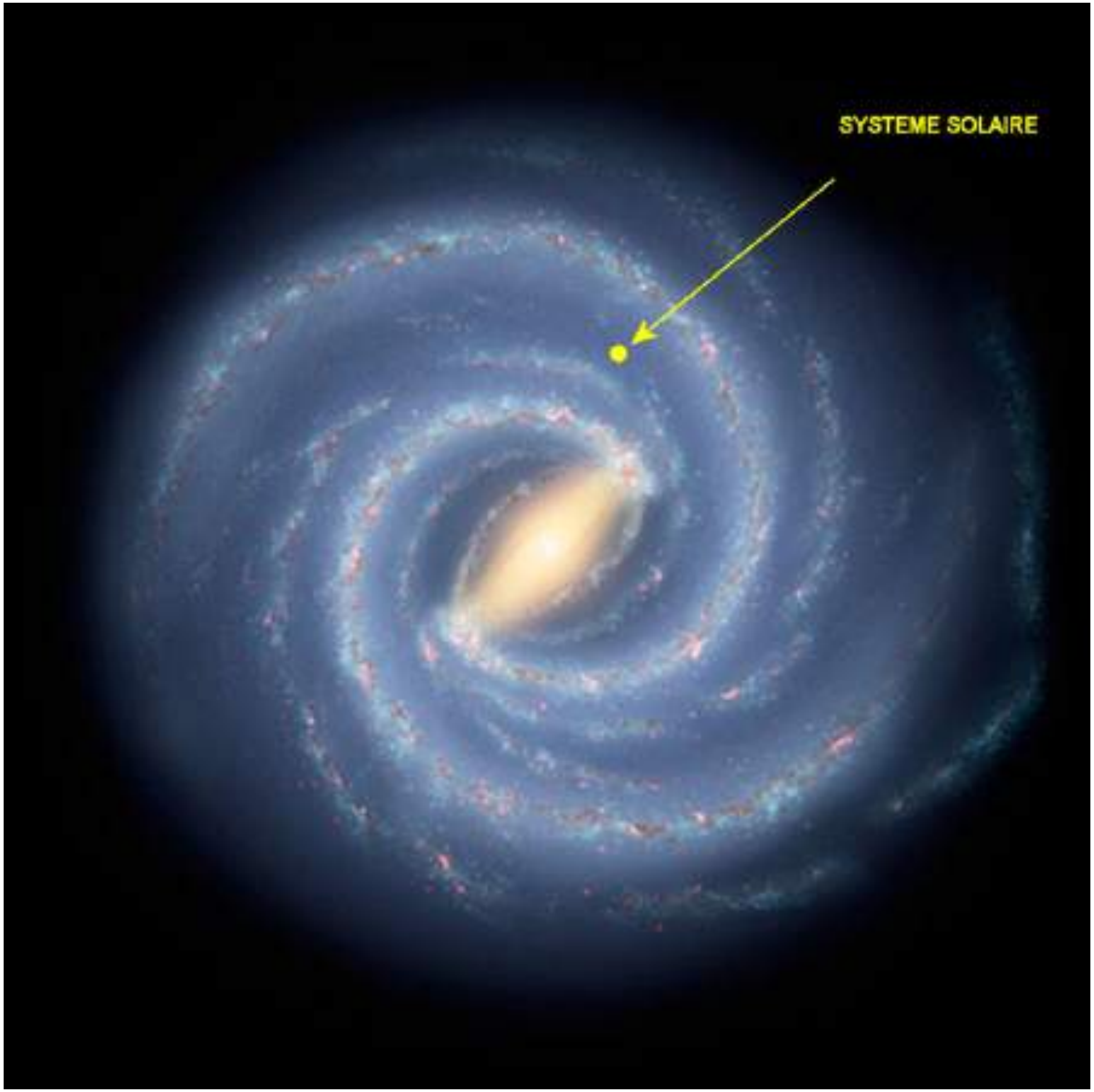
ÉTOILES VISIBLES



10 000 étoiles visibles à l'oeil nu,

3 000 seulement d'un point donné

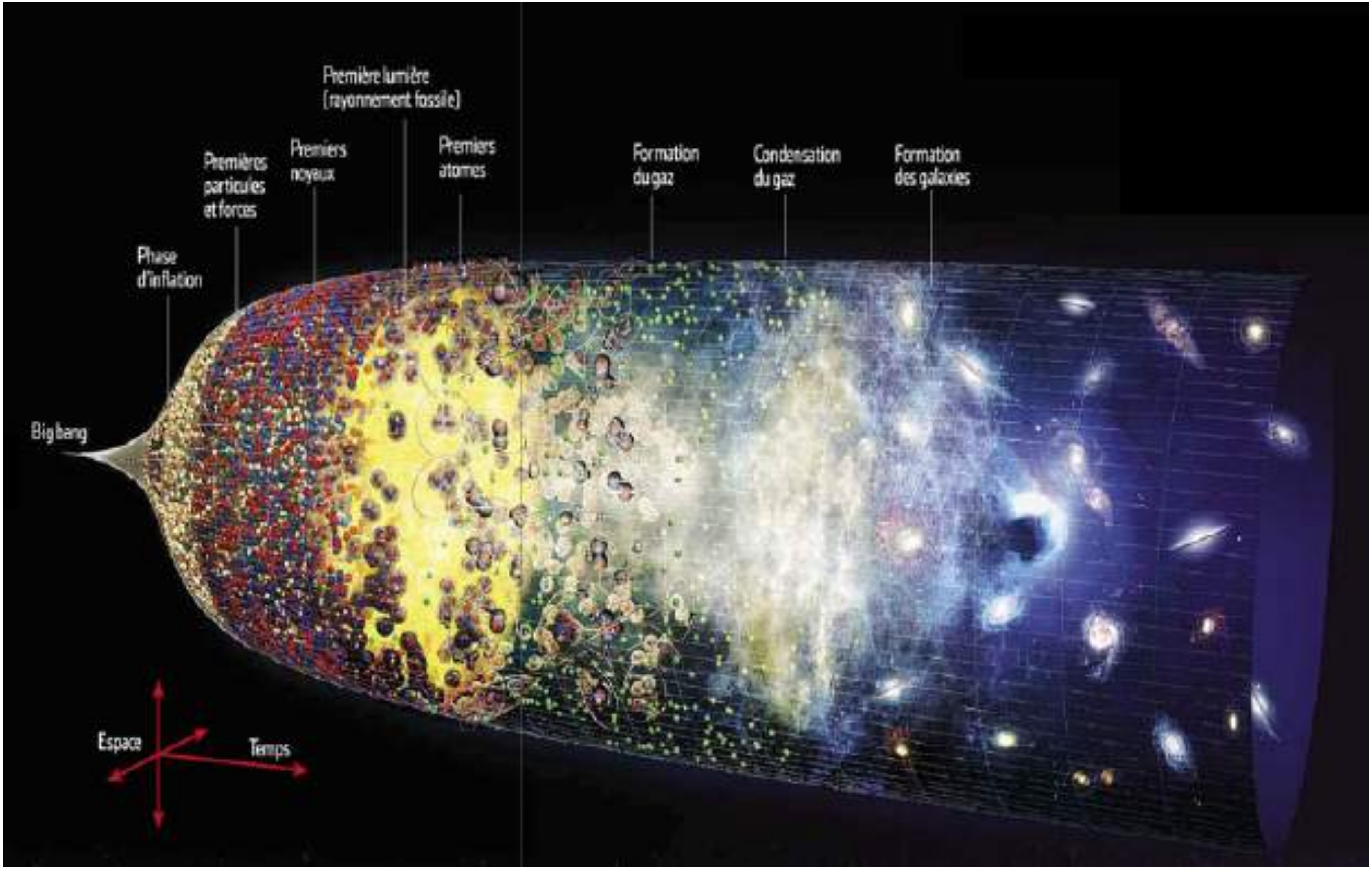
ÉTOILES D'UNE GALAXIE



100 000 000 000 = 10^{11} =
100 milliards d'étoiles
par galaxie

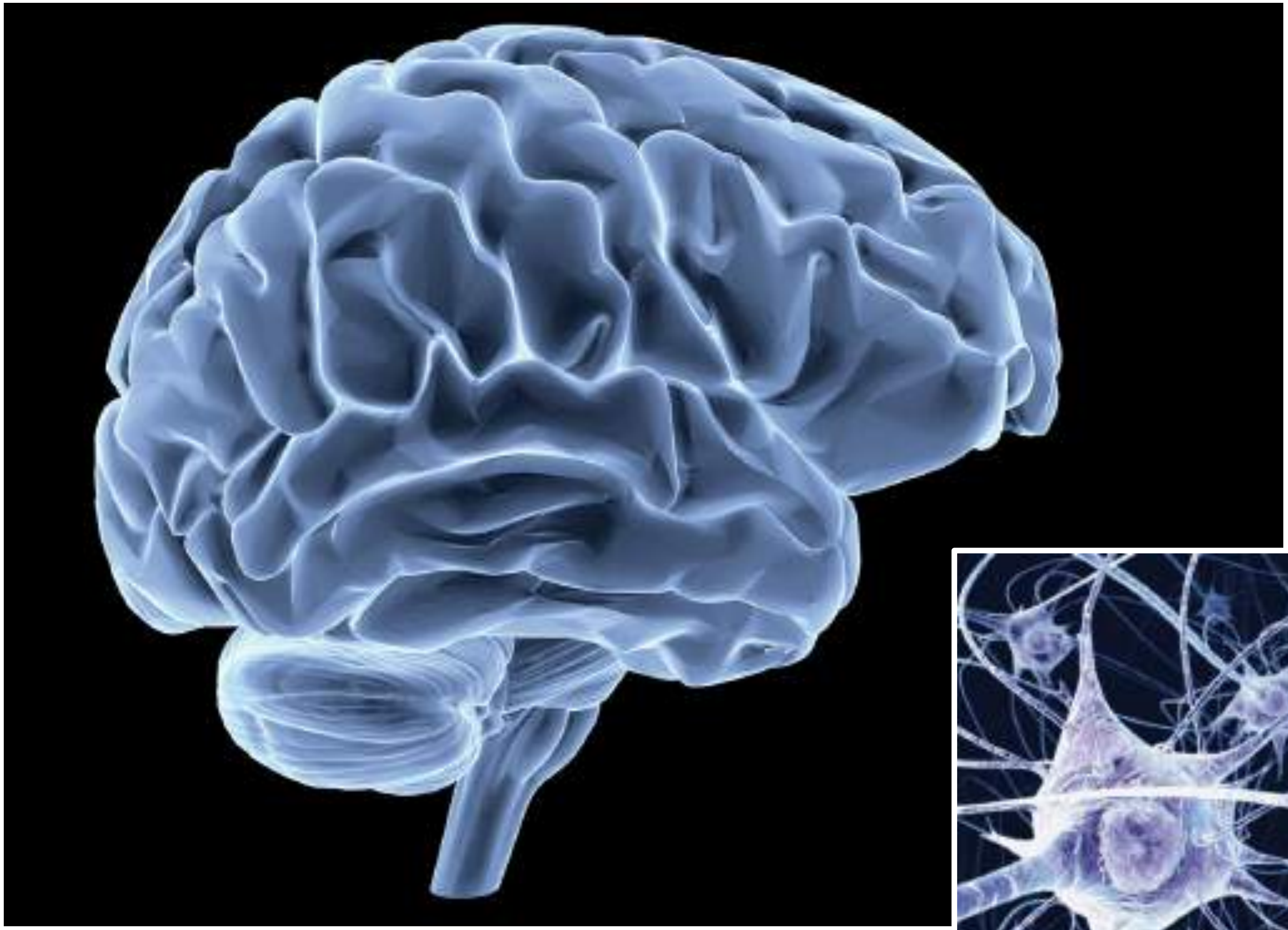
ÉTOILES DE L'UNIVERS (OBSERVABLE)

2 000 000 000 000 = 2×10^{12} = 2 000 milliards de galaxies dans l'univers donc 200 000 000 000 000 000 000 000 = 2×10^{23} étoiles.



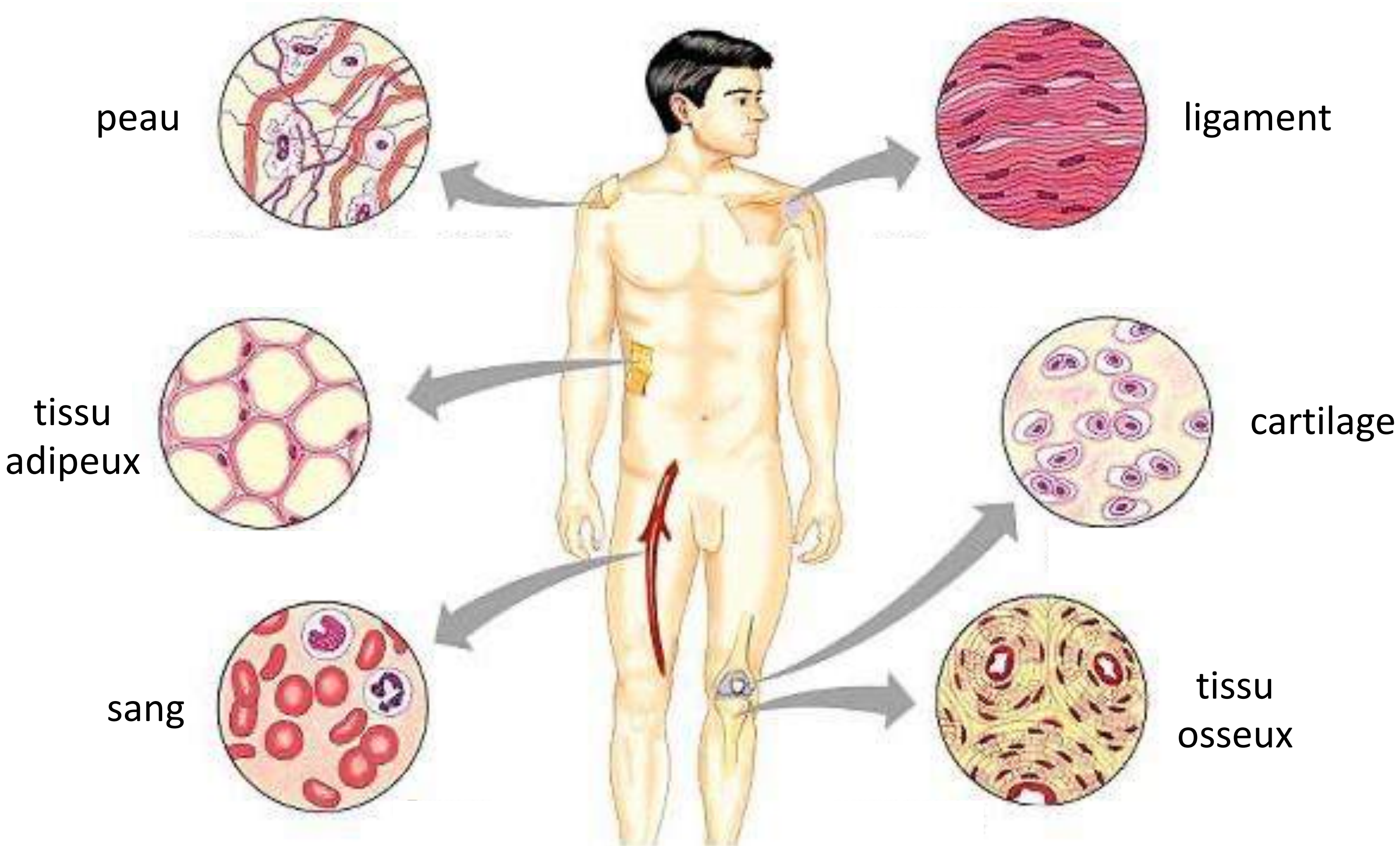
NEURONES DU CERVEAU

Le cerveau humain possède **100 milliards = 100 000 000 000 = 10^{11} neurones**.



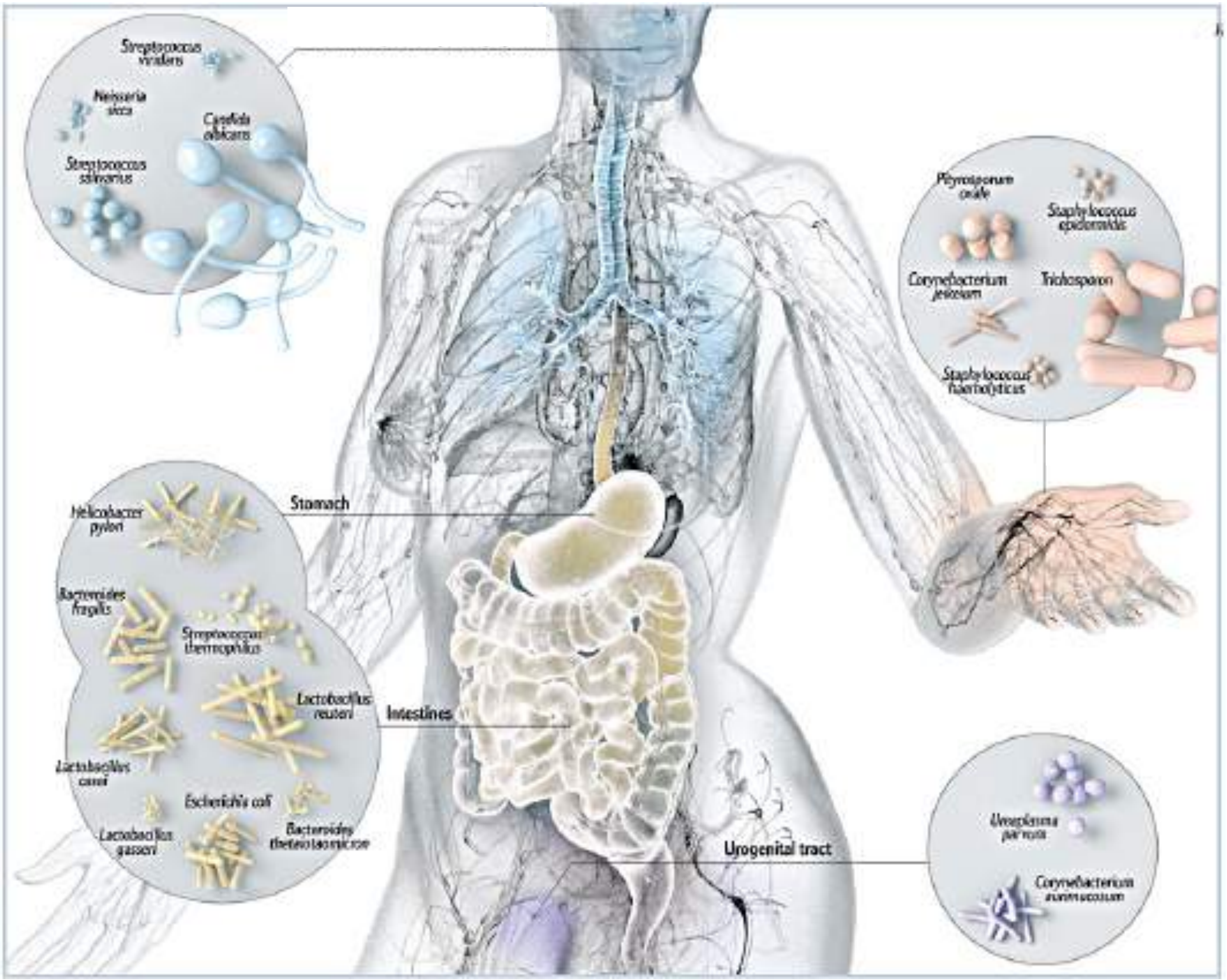
CELLULES

Le corps humain possède **30 000 milliards = 3×10^{14} de cellules**.



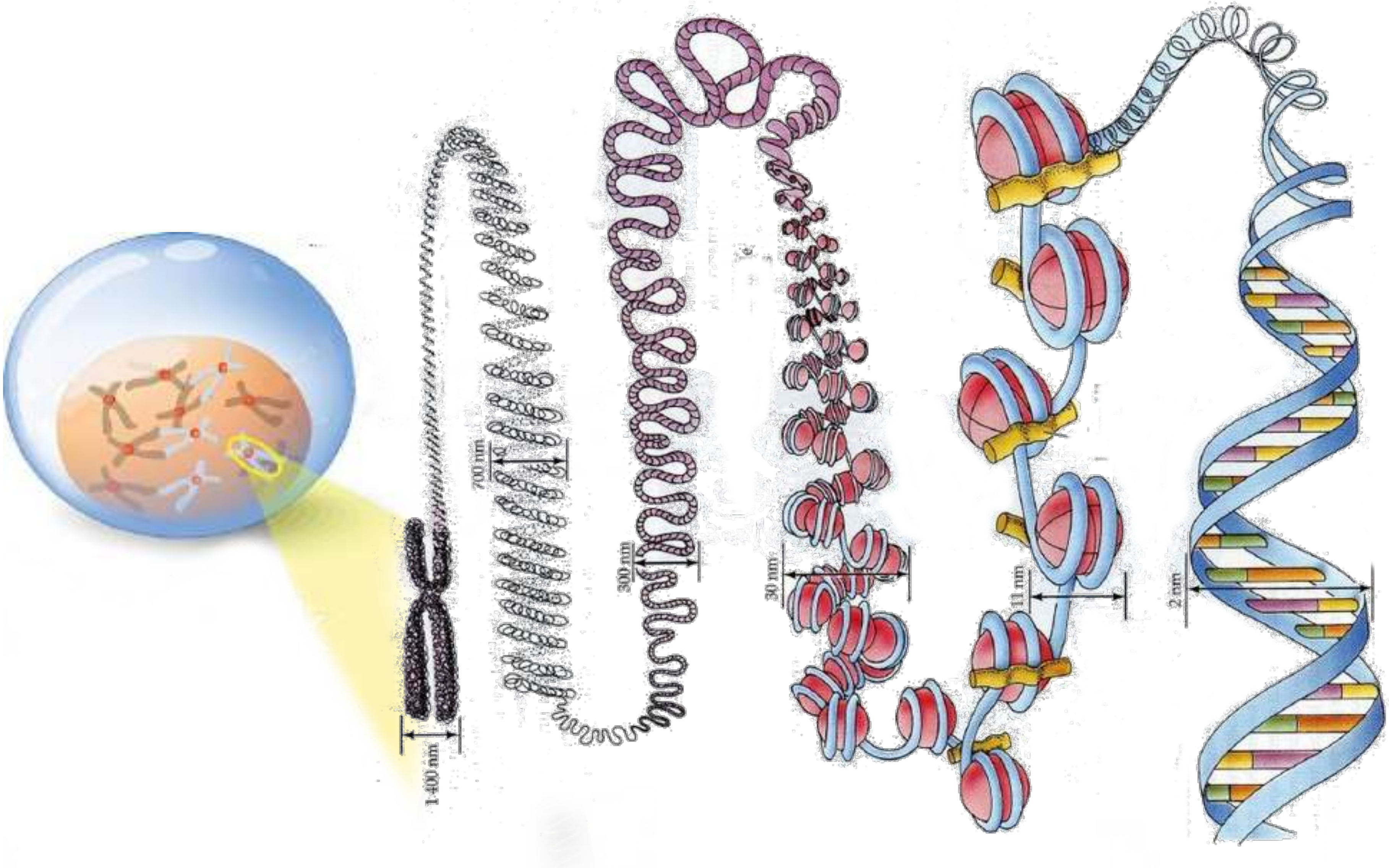
BACTÉRIES

Le corps humain possède **40 000 milliards = 4 × 10^{14} de bactéries**.



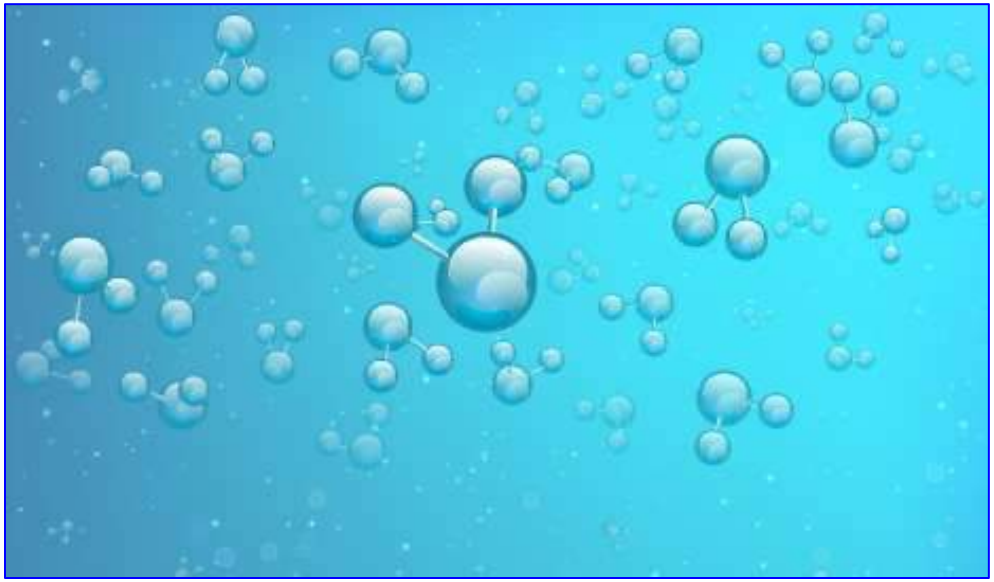
ADN

La taille du génome humain est de **3,2 milliards de paires de nucléotides.**
Il y a donc **6,4 milliards = $6{,}4 \times 10^9$ nucléotides** par cellule.



MOLÉCULES DANS UN VERRE D'EAU

Il y a **10^{24} molécules dans un verre d'eau**.



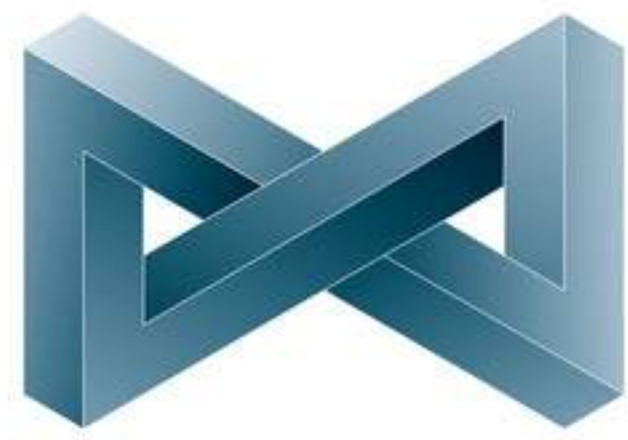
ATOMES DANS L'UNIVERS OBSERVABLE

On estime le nombre d'atomes dans l'univers à **10^{80}** .

- Notre Soleil est une étoile moyenne. Il pèse de 2×10^{33} grammes.
- Un gramme de matière contient $0,5 \times 10^{24}$ atomes.
- Une étoile a 10^{57}atomes.
- Il y a 10^{23} étoiles.

Deux choses sont infinies : l'Univers et la bêtise humaine. Mais, en ce qui concerne l'Univers, je n'en ai pas encore acquis la certitude absolue. *Albert Einstein*

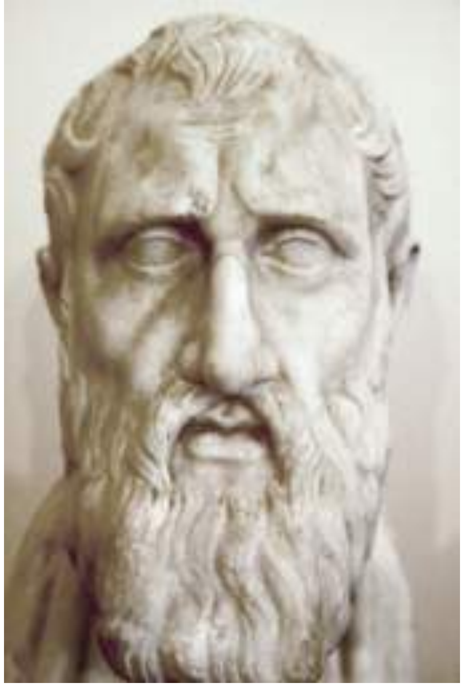
Les paradoxes de l'infini



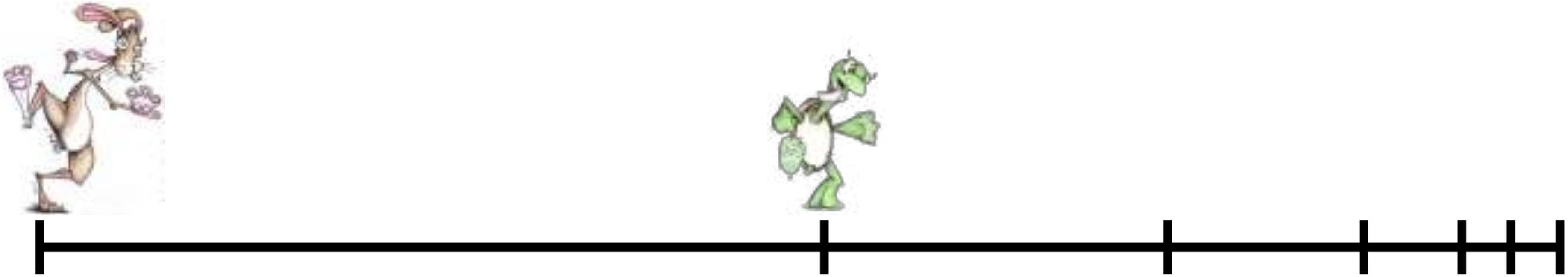
ACHILLE ET LA TORTUE

Achille ne rattrapera jamais la tortue.

- Le temps qu'Achille aille à l'endroit où est la tortue, celle-ci aura atteint un deuxième endroit.
- Le temps qu'Achille aille à ce deuxième point, alors la tortue en aura atteint un troisième.
- Et ainsi de suite, la tortue aura toujours un coup d'avance.



Zénon d'Élée
490 av. J.C. - 430 av. J.C.



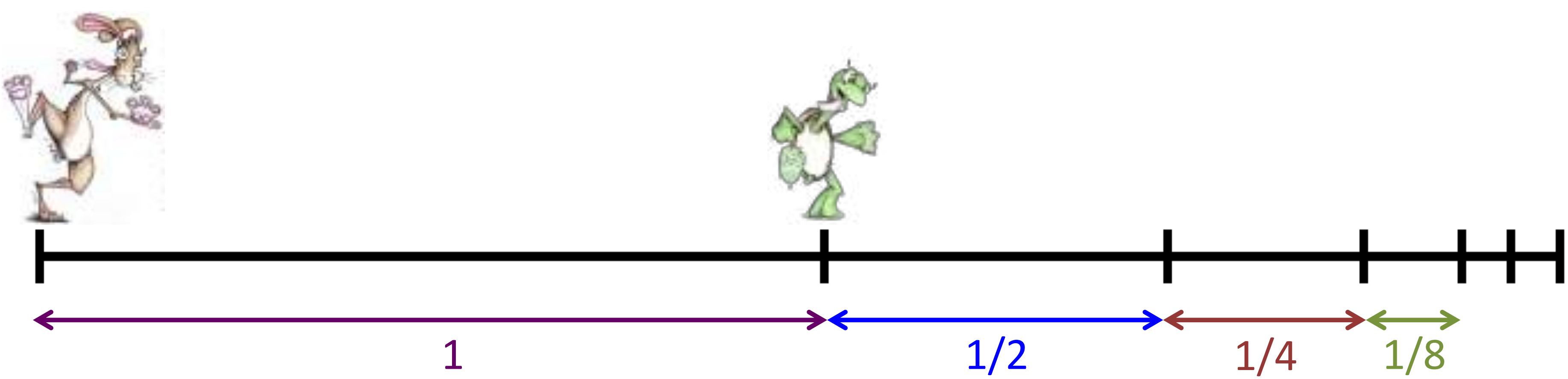
ACHILLE ET LA TORTUE

$u_{t:}$ Ecart entre le lièvre et la tortue après t déplacements.

$u_0 = 1$. $u_1 = 1/2$. $u_2 = 1/4$. $u_3 = 1/8$. $u_i = 1/2^i$.

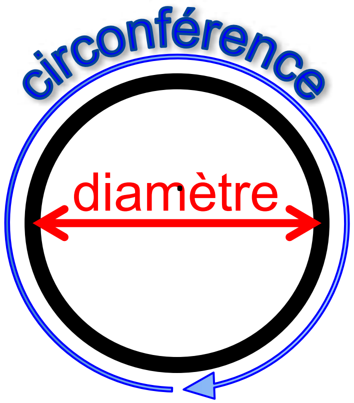
$p_{t:}$ Position de la tortue après t déplacements.

$$\boxed{p_t = u_0 + u_1 + \cdots + u_t = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^t} = 2 - \frac{1}{2^t}}$$

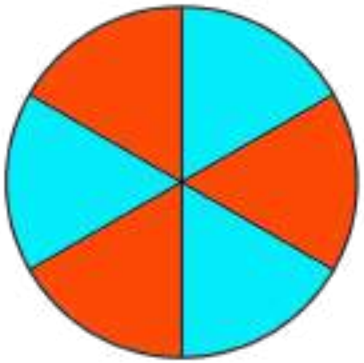


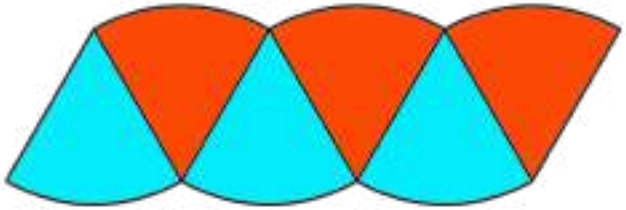
AIRE D'UN CERCLE

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$



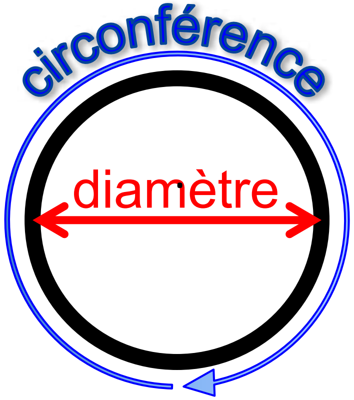
Archimède
287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.



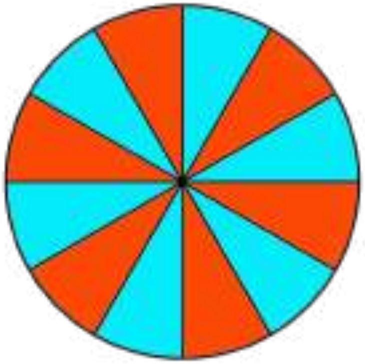


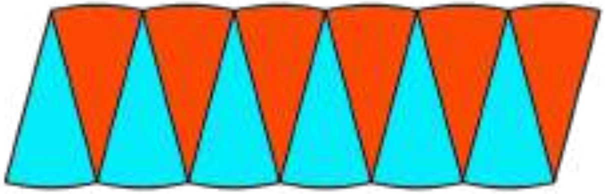
AIRE D'UN CERCLE

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$

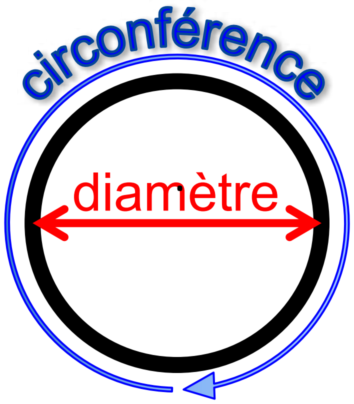


Archimède
287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.



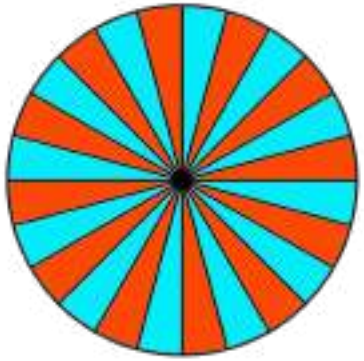


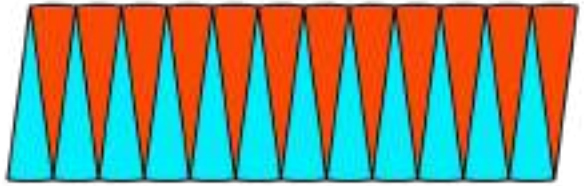
AIRE D'UN CERCLE



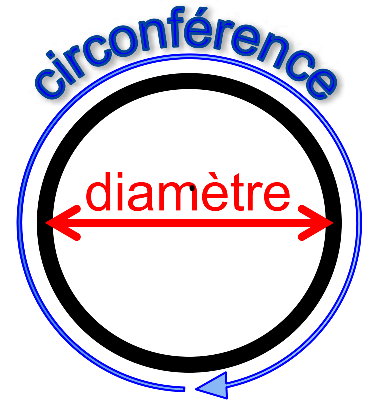
$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$

Archimède
287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.



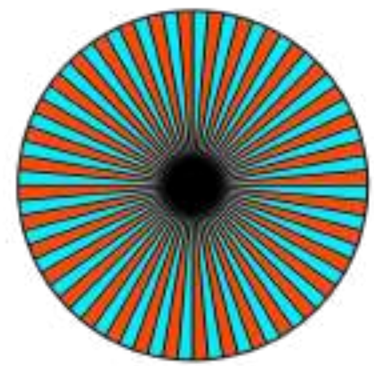


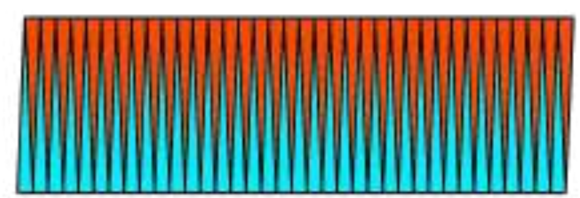
AIRE D'UN CERCLE



$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$

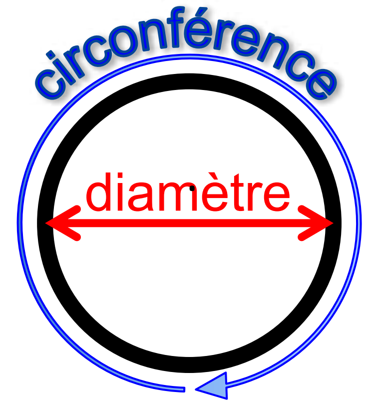
Archimède
287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.



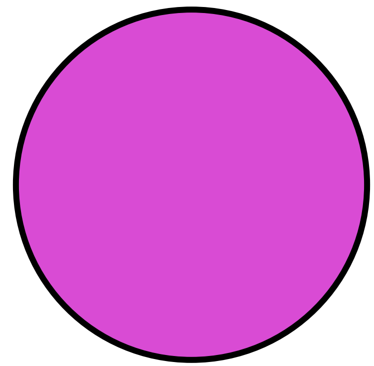


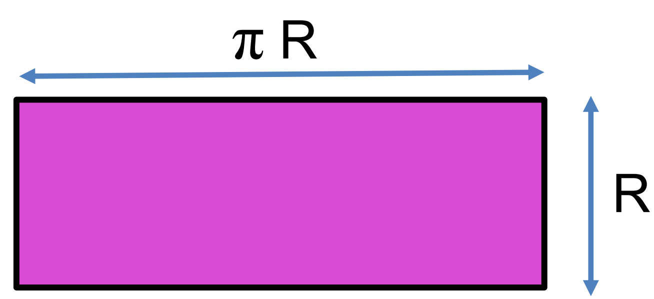
AIRE D'UN CERCLE

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$



Archimède
287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.



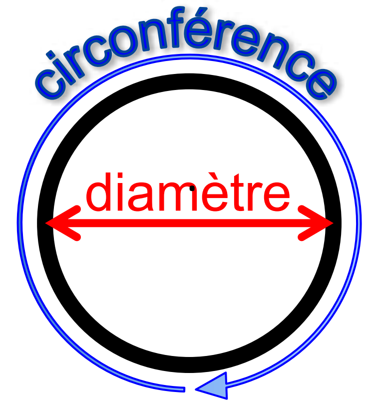


Aire du cercle = aire du rectangle

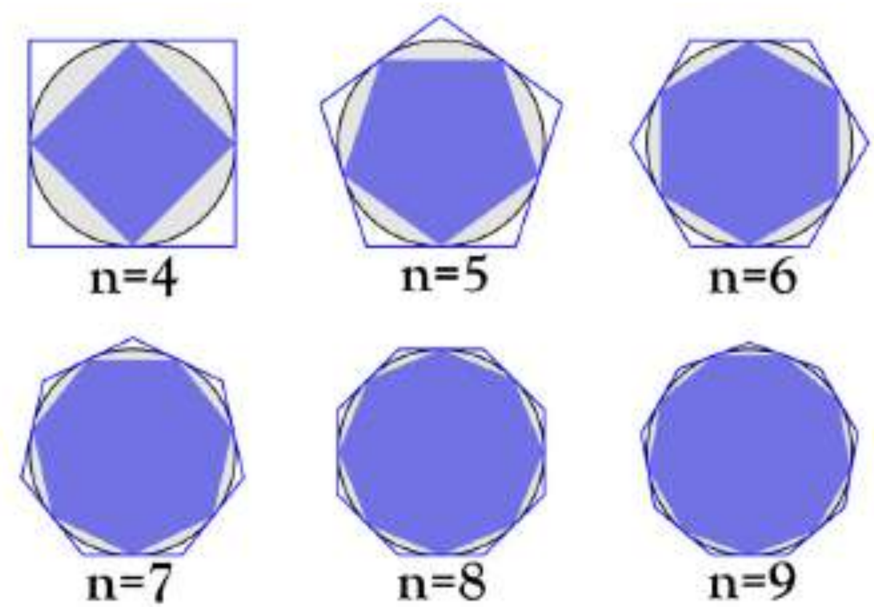
$= \pi R^2$

CALCUL DE π

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$



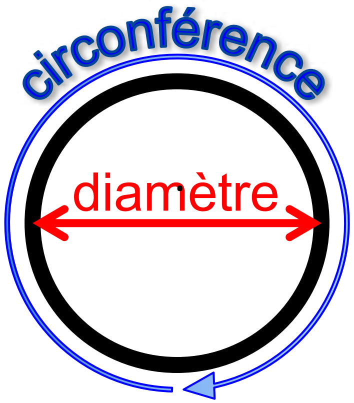
Archimède
287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.



Cercle = polygone régulier avec nombre infini de côtés.

CALCUL DE π

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$



n=3 : 2,598... ≤ π ≤ 5,196...

n=4 : 2,828... ≤ π ≤ 4

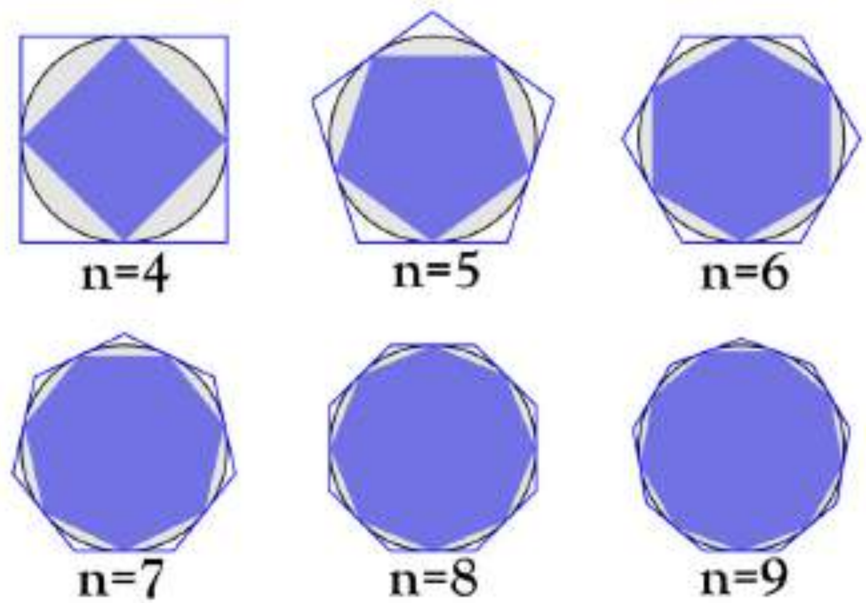
n=5 : 2,938... ≤ π ≤ 3,632...

n=6 : 3 ≤ π ≤ 3,464...

n=7 : 3,037... ≤ π ≤ 3,371...

n=8 : 3,061... ≤ π ≤ 3,313...

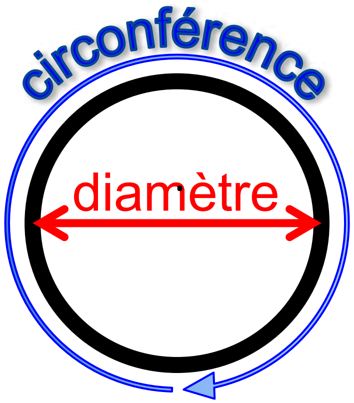
n=9 : 3,078... ≤ π ≤ 3,275...



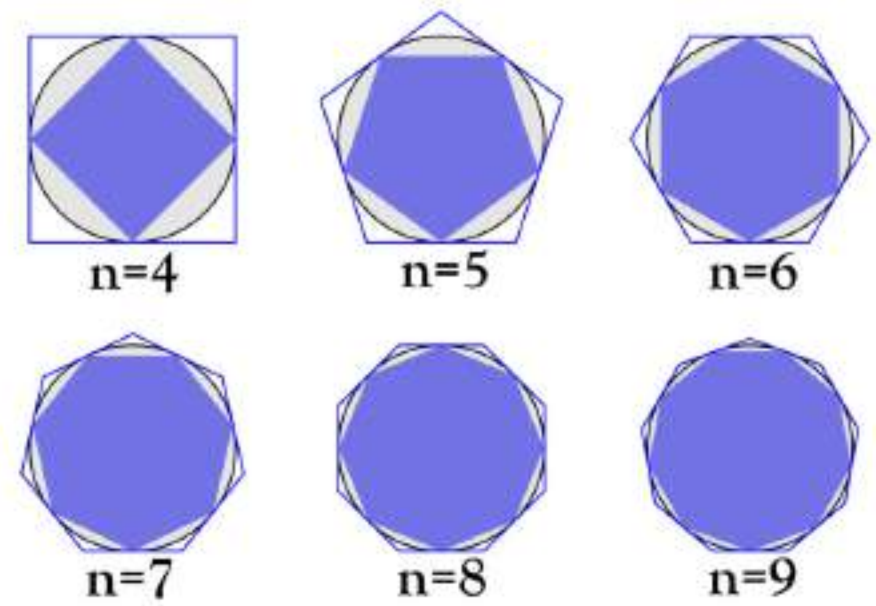
$n \sin(180/n) \leq \pi \leq n \tan(180/n)$

CALCUL DE π

$$\pi = \frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$$



Archimède
287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.

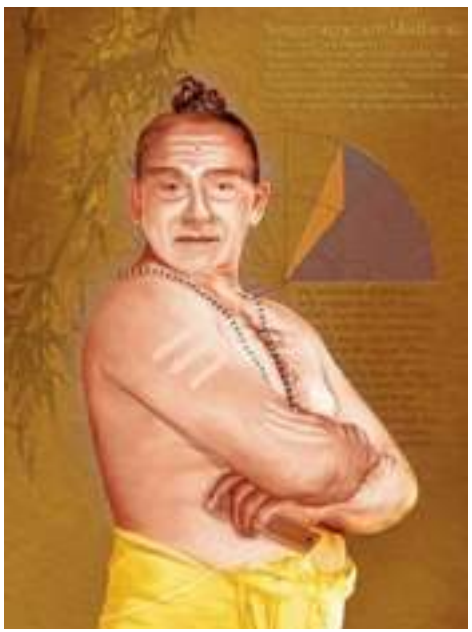


n=96 : 3,1408... ≤ π ≤ 3,1428...

CALCUL DE π

Formule de Madhava-Gregory-Leibniz

$$\boxed{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^k}{2k+1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}}$$



Madhava de Sangamagrama
1350 – 1425

James Gregory
1638 – 1675

Gootfried Wilhelm von Leibniz
1646 – 1716

CALCUL DE π

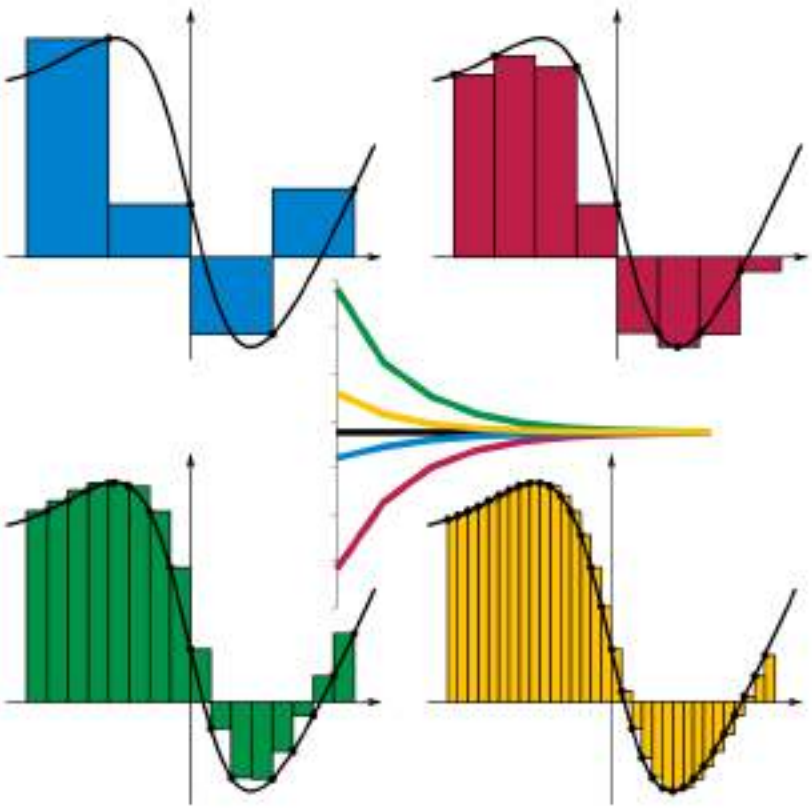
Formule de Ramanujan

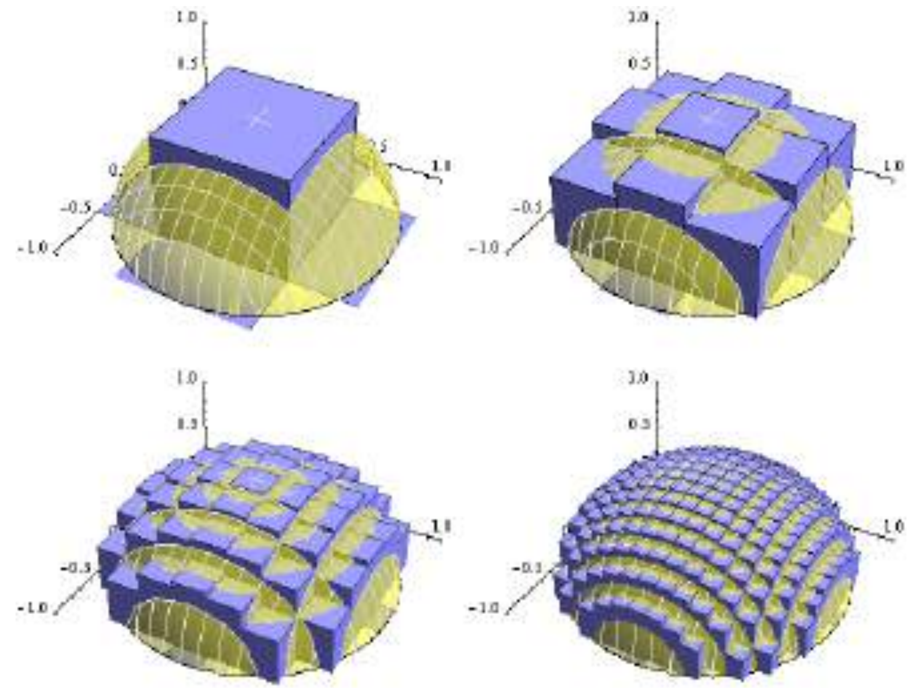
$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!\,(1103 + 26390k)}{(k!)^4\, 396^{4k}}$$

Converge rapidement.
8 nouvelles décimales à chaque terme

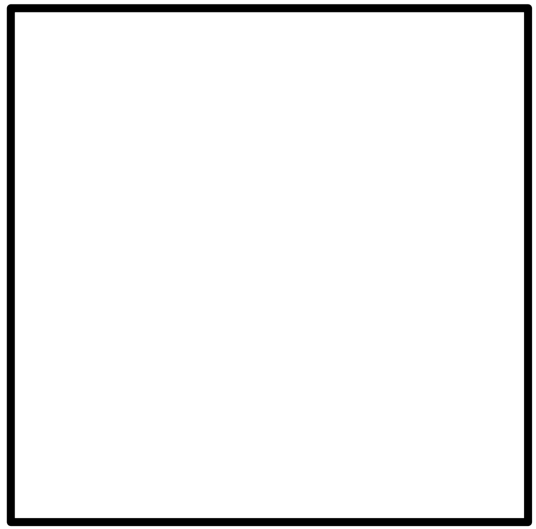
Srinivasa Ramanujan
1887 – 1920

CALCUL INFINITESIMAL





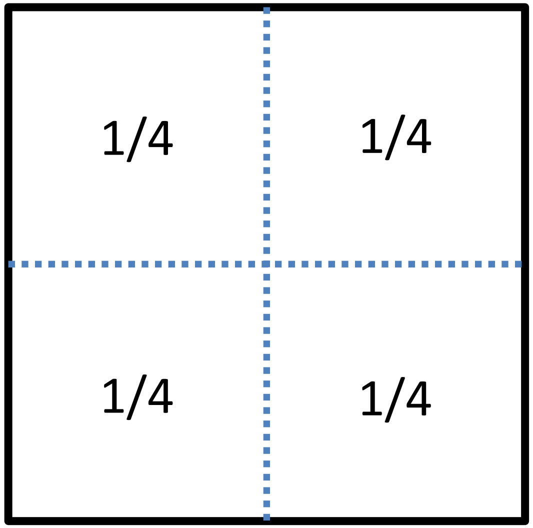
PARADOXE DU CARRÉ



Carré de côté = 1

Aire du carré = 1

PARADOXE DU CARRÉ

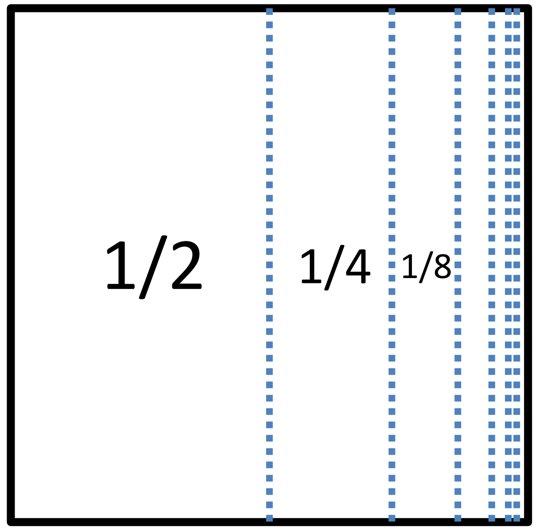


Carré de côté = 1

Aire du carré = 1

Aire du carré = 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = **1**

PARADOXE DU CARRÉ

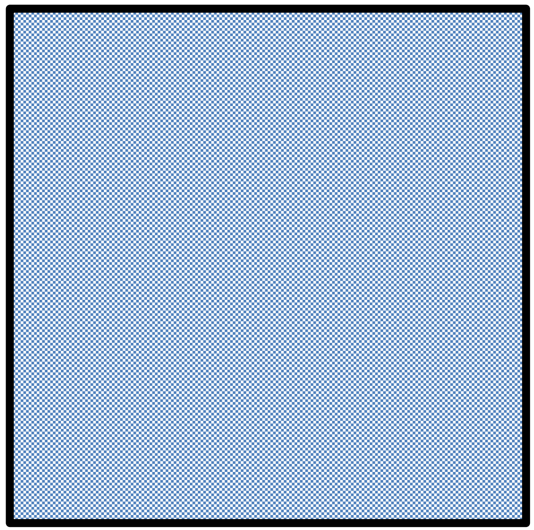


Carré de côté = 1

Aire du carré = 1

Aire du carré = 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + ……… = **1**

PARADOXE DU CARRÉ



Carré de côté = 1

Aire du carré = 1

Aire d'un point = 0

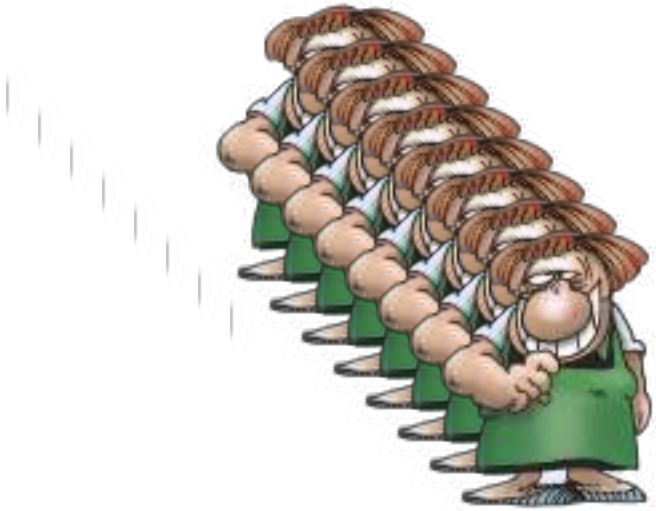
Aire du carré = 0 + 0 + 0 + 0 + ……… = **0**

LES POSTULATS D’EUCLIDE

- Deux choses égales à une troisième sont aussi égales entre elles.
- Si des grandeurs égales sont ajoutées à d'autres grandeurs également égales entre elles, leurs sommes sont égales.
- Si des grandeurs égales sont soustraites à d'autres grandeurs égales, leurs différences sont égales.
- **Des grandeurs qui coïncident sont égales entre elles.**
- **Le tout est plus grand que la partie.**

Euclide
~ 300 av. J.-C.

COMPARER DES ENSEMBLES



LE PARADOXE DE GALILÉE

Les nombres entiers sont **plus nombreux** que les nombres pairs.

Entiers		Pairs
1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	6
4	$\longleftrightarrow$	8
5	$\longleftrightarrow$	10
6	$\longleftrightarrow$	12

Galilée 1564-1642

Les nombres entiers sont **aussi nombreux** que les nombres pairs.

Les attributs ``égal'', ``supérieur'', ``inférieur'' n'ont pas lieu d'être dans les infinis, mais uniquement dans les quantités finies .

LE PARADOXE DE GALILÉE

« ***L'infini*** *est un tout et s'il n'est pas plus grand qu'une de ses parties, il* ***est quelque chose d'absurde***.»

Gootfried Wilhelm von Leibniz
1646 – 1716

LE POINT DE VUE DE BOLZANO

Deux ensembles en bijection sont de même taille.

Un ensemble est infini, si et seulement si, il est en bijection avec une de ses parties .

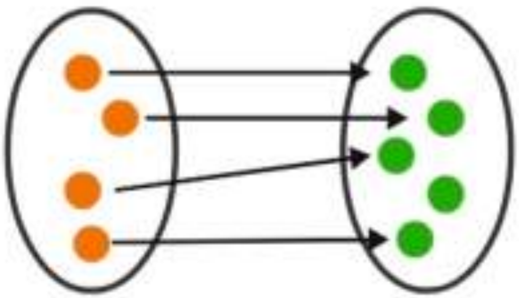
«***Le concept d'un calcul de l'infini semble***, *je l'avoue,* ***être une contradiction en soi***. *Car vouloir compter quelque chose, c'est essayer de le déterminer par des nombres. Or, l'infini est un ensemble plus grand que n'importe quel nombre. Comment veut-on alors tenter de déterminer l'infini par des nombres ?* »

Bernard Bolzano
1781 – 1848

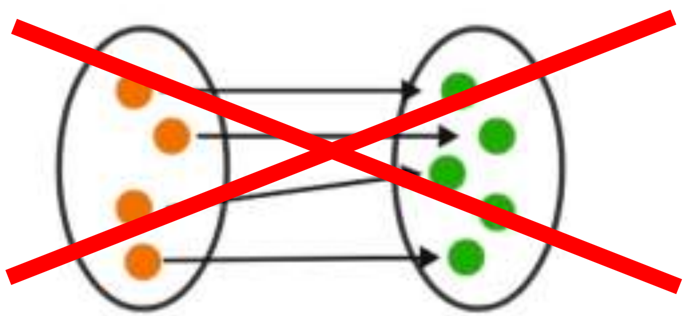
B. Bolzano 1851 – *Les paradoxes de l'infini*, trad., notes H. Sinaceur, Paris, Le Seuil, 1993.

L'INFINI EST UN NOMBRE COMME LES AUTRES

B est **au moins aussi grand** que A
si et seulement si
il existe une injection de B dans A.



A est **plus grand** que B
si et seulement si
il n'existe pas d'injection de A dans B.

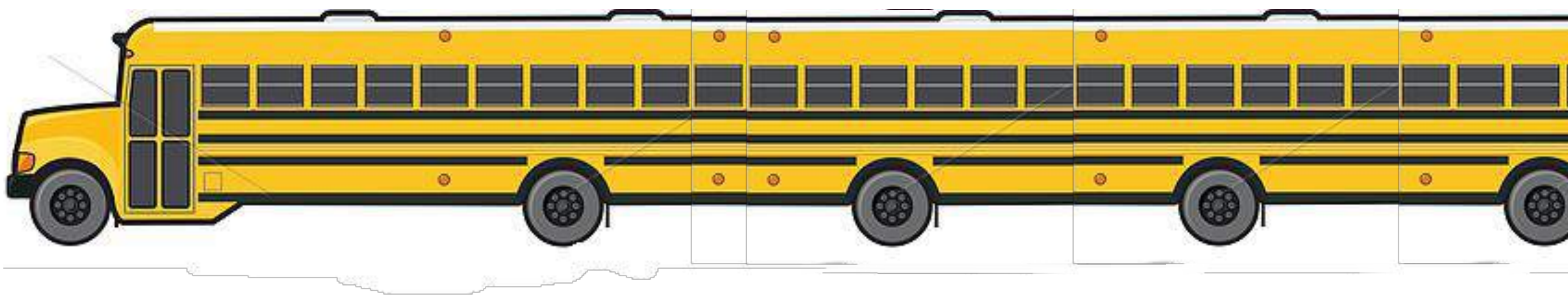


Georg Cantor 1845-1918

LE GRAND HOTEL OMEGA

$\omega + 1 = \omega.$

LE GRAND HOTEL OMEGA



$$\omega + \omega = 2 \times \omega = \omega.$$

LE GRAND HOTEL OMEGA

Il y a autant de rationnels que de nombres entiers.

On peut numéroter tous les rationnels avec les entiers.

	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1	$\cdots$
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2	$\cdots$
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3	$\cdots$
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4	$\cdots$
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5	$\cdots$
6	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

$$\omega^2 = \omega \times \omega = \omega.$$

PROCÉDÉ DIAGONAL DE CANTOR

Il y a (beaucoup) plus de nombres réels que de nombres entiers naturels.

On ne peut pas numéroter tous les réels avec les entiers.

Par l'absurde. Supposons qu'on puisse numéroter tous les réels avec les entiers.

$$R_1 = 0,\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1\ \ldots$$
$$R_2 = 0,\ 6\ 8\ 5\ 5\ 1\ 0\ \ldots$$
$$R_3 = 0,\ 1\ 8\ 1\ 5\ 7\ 2\ \ldots$$
$$R_4 = 0,\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ \ldots$$
$$R_5 = 0,\ 0\ 0\ 4\ 3\ 2\ 1\ \ldots$$
$$R_6 = 0,\ 9\ 6\ 4\ 9\ 4\ 5\ \ldots$$

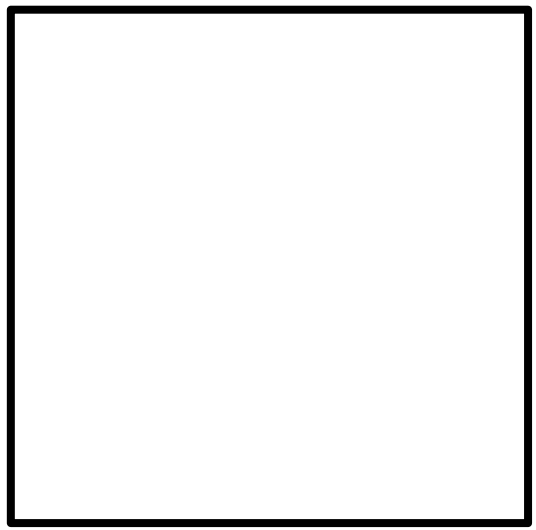
$$D = 0,\ 3\ 9\ 2\ 4\ 3\ 6\ \ldots$$

Le nombre ***D* diffère de chaque** R_i à la ième décimale.

D n'est pas numéroté.

Contradiction.

PARADOXE DU CARRÉ



Carré de côté = 1

Aire du carré = **1**

Aire d'un point = 0

Aire du carré = 0 + 0 + 0 + 0 + ……… = **0**

Ceci n'est vrai que si on fait une somme **dénombrable**.

Or on fait une somme sur un ensemble **non-dénombrable**.

DES NOMBRES RÉELS INDESCRIPTIBLES

Description : phrase, calcul, expression permettant de décrire le nombre sans ambiguité.

Exemples: **π** : rapport entre le périmètre et le diamètre d'un cercle.
nombre d'or : solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$.
sin(1,5)

L'ensemble des descriptions est en bijection avec l'ensemble des entiers naturels.

Il y a des nombres réels qu'on ne peut pas décrire.

Mais, **impossible d'en décrire un** !!!

L'HYPOTHÈSE DU CONTINU

Hypothèse du continu (Cantor) : Il n'existe aucun ensemble dont le cardinal est strictement compris entre le celui de l'ensemble des entiers naturels et celui de l'ensemble des nombres réels.

C'était **le premier des 23 problèmes de Hilbert** pour le congrès des mathématicien en 1900.

David Hilbert
1862-1943

Gödel, 1938 : L'hypothèse du continu n'est **pas réfutable** en théorie des ensembles (ZFC).

Cohen, 1963 : L'hypothèse du continu n'est **pas démontrable** en théorie des ensembles (ZFC).

Paul J. Cohen
1934-2007

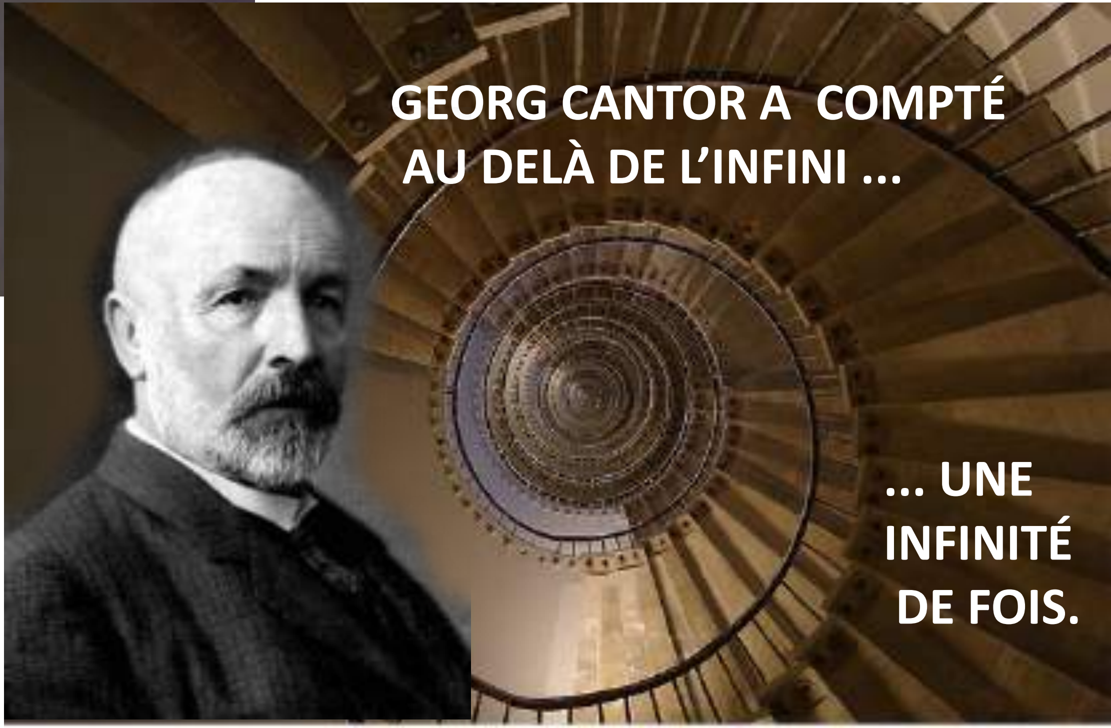
Kurt Gödel
1906-1978

UN PEU D’ORDRE

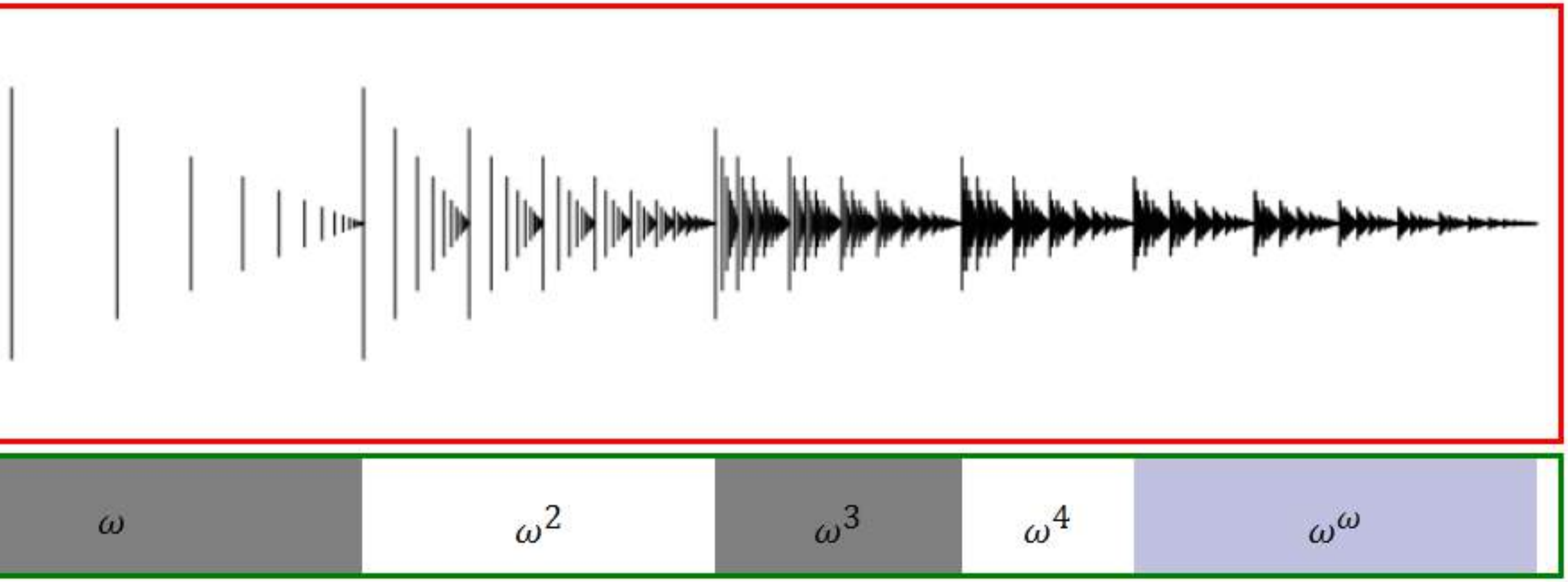
CARDINAL

ORDINAL


CHUCK NORRIS A
DÉJÀ COMPTÉ
JUSQU'À L'INFINI ...
... DEUX FOIS.


GEORG CANTOR A COMPTÉ
AU DELÀ DE L'INFINI ...
... UNE
INFINITÉ
DE FOIS.

LES ORDINAUX



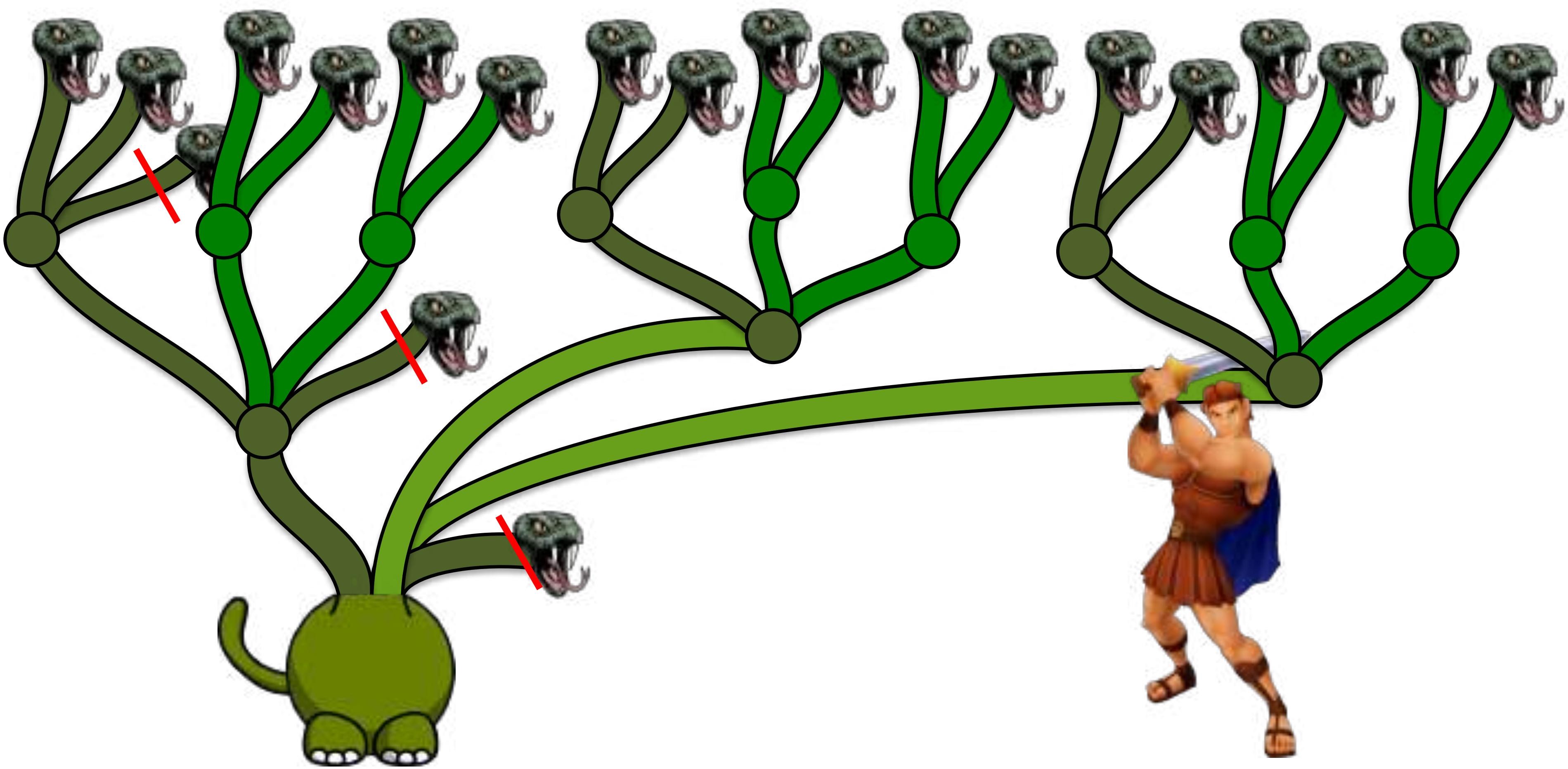
Toute sous-suite d'ordinaux **strictement décroissante** est **finie**.

HERCULE ET L’HYDRE

Hercule et l’Hydre, 1470
Antonio Pollaiuolo
Musée des Offices, Florence

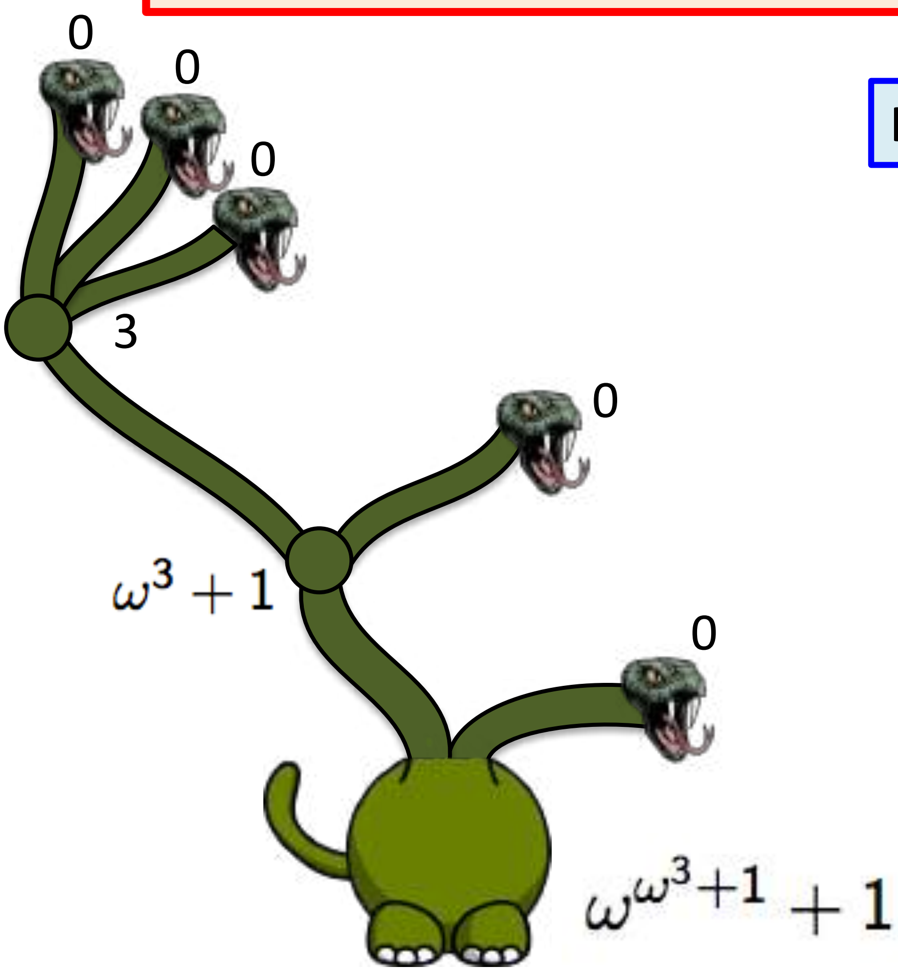
HERCULE ET L'HYDRE

Hercule ne peut couper que les têtes de l'hydre.
A chaque fois qu'il coupe une tête, deux copies de ce qui reste depuis le cou repoussent.



HERCULE ET L'HYDRE

Quel que soit l'ordre dans lequel il coupe les têtes, Hercule finit par gagner.

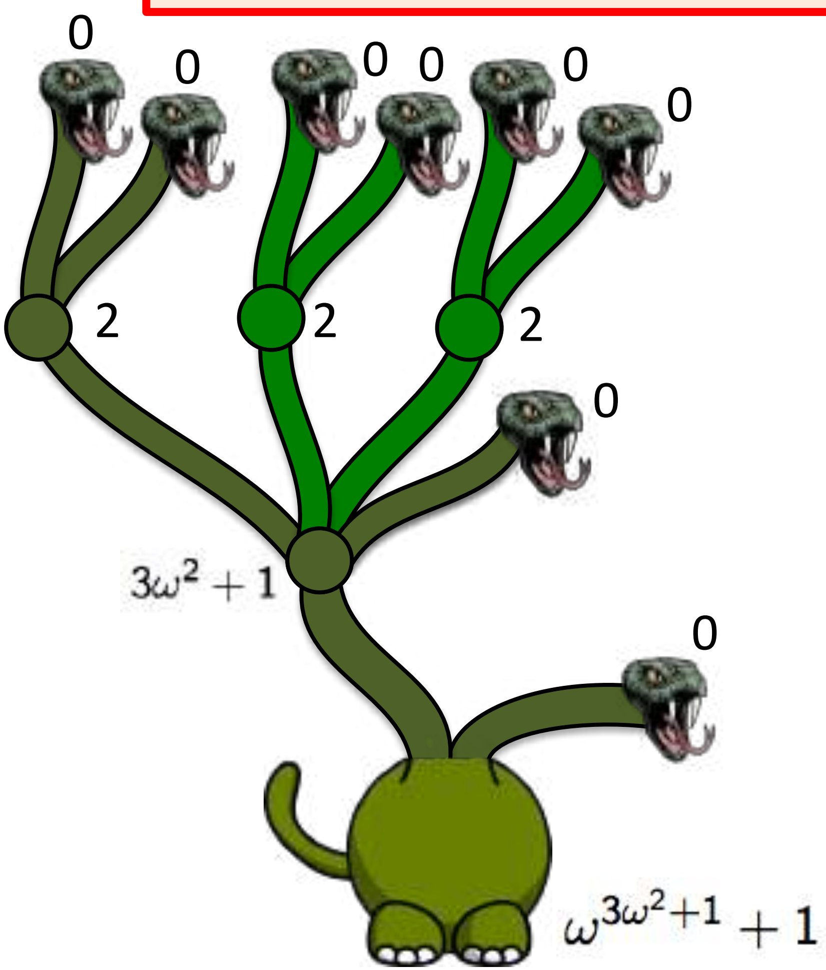


Idée : associer un ordinal à chaque hydre.

- Une tête recoit 0.
- Si le nœud *x* est départ des sous-hydres $H_1,\ldots,H_n$ d'ordinaux associés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On assigne $\omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$ à *x*.

HERCULE ET L'HYDRE

Quel que soit l'ordre dans lequel il coupe les têtes, Hercule finit par gagner.



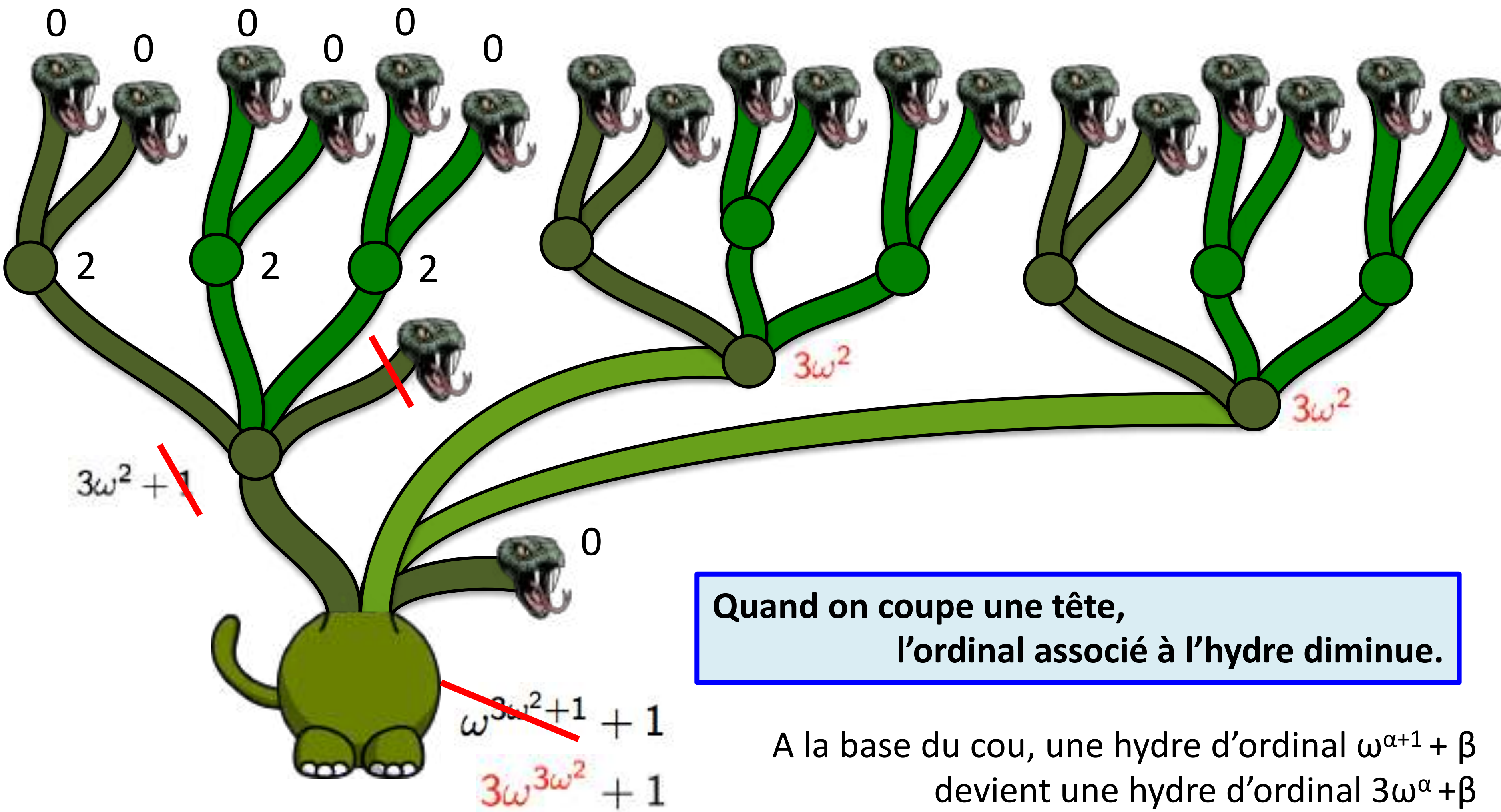
Idée : associer un ordinal à chaque hydre.

- Une tête recoit 0.
- Si le nœud x est départ des sous-hydres $H_1,\ldots,H_n$ d'ordinaux associés $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On assigne $\omega^{\alpha_1}+\cdots+\omega^{\alpha_n}$ à x.

Quand on coupe une tête, l'ordinal associé à l'hydre diminue.

A la base du cou, une hydre d'ordinal $\omega^{\alpha+1}+\beta$ devient une hydre d'ordinal $3\omega^{\alpha}+\beta$

HERCULE ET L'HYDRE



Quand on coupe une tête,
l'ordinal associé à l'hydre diminue.

A la base du cou, une hydre d'ordinal $\omega^{\alpha+1} + \beta$
devient une hydre d'ordinal $3\omega^{\alpha} + \beta$

HERCULE ET L'HYDRE

Quel que soit l'ordre dans lequel il coupe les têtes, Hercule finit par gagner.

PREUVE: Quand on coupe une tête, l'ordinal associé à l'hydre diminue.
Quelle que soit la stratégie d'Hercule, la suite des ordinaux correspondant à l'hydre est une suite strictement décroissante. **Elle est** donc **finie.**

Kirby & Paris, 1982 :

Pour montrer le théorème ci-dessus, il est obligatoire d'utiliser des ordinaux.

Laurie Kirby
1952 - ...

Jeff Paris
1944 - ...

« Nul paradis n’est promis à qui s’est rendu compte de l’existence de l’infini.»

Robert Desnos

« Personne ne pourra nous chasser du paradis que Cantor a créé pour nous. »

David Hilbert