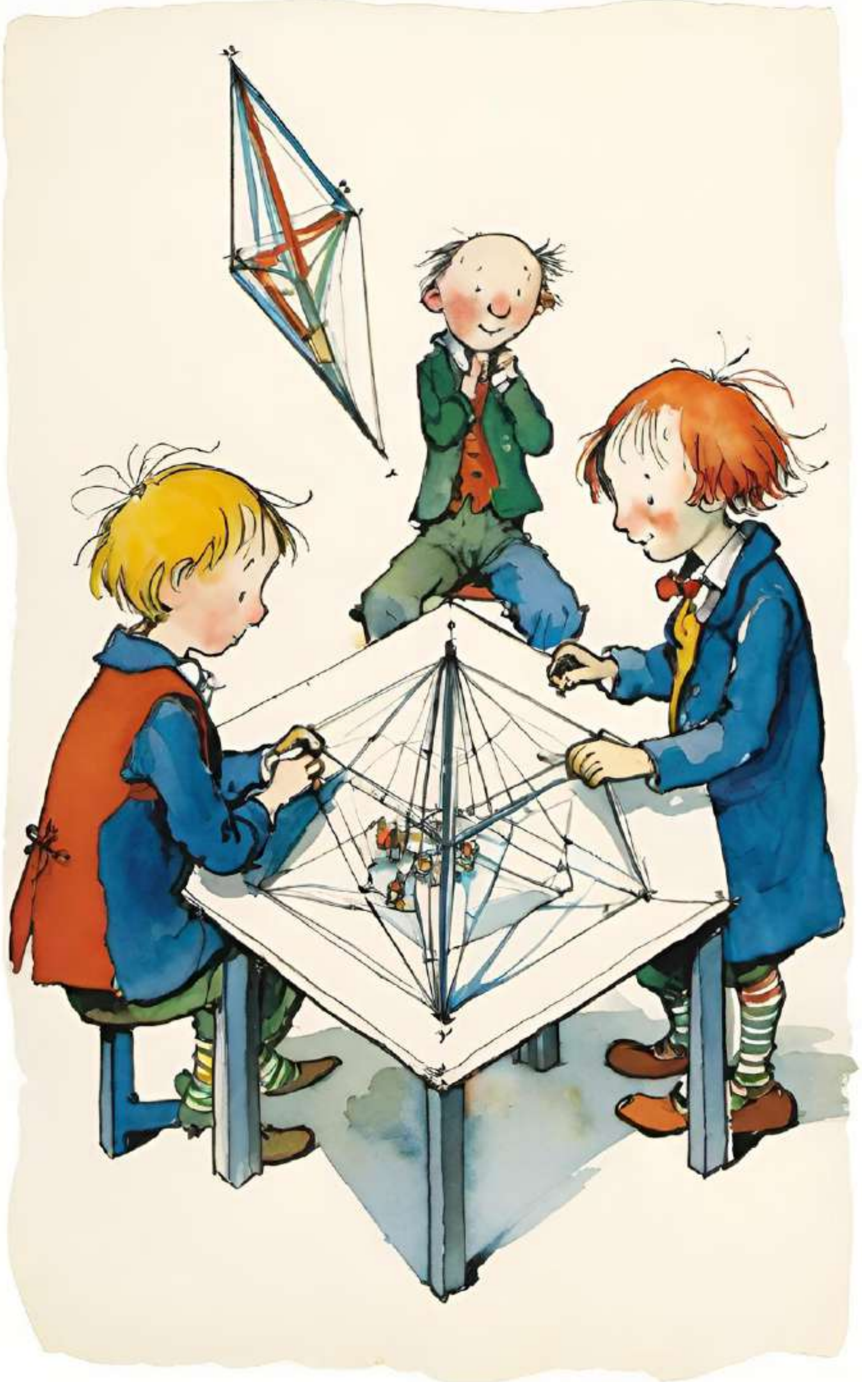
Les graphes, un jeu d'enfant ?

Frédéric Havet

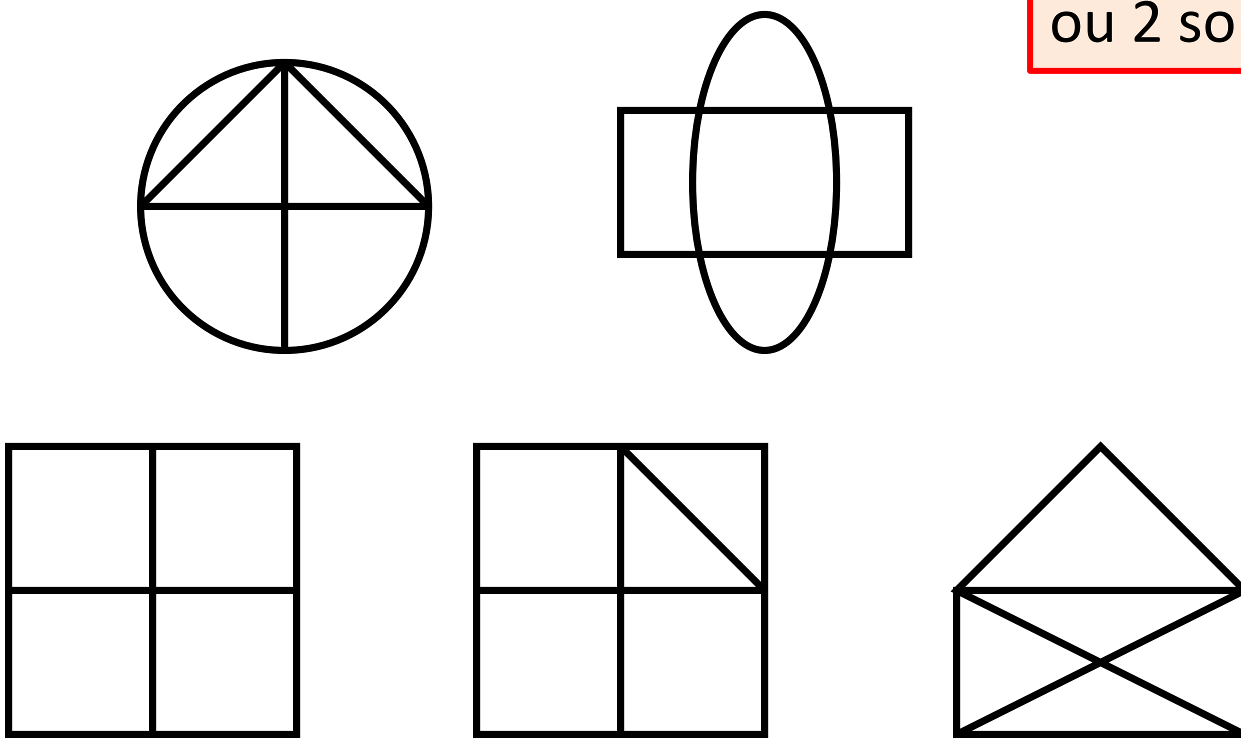


Dessin sans lever le crayon

Dessiner sans lever le crayon

Peut-on dessiner ces formes sans lever le crayon et sans repasser sur un trait ?

Oui
si et seulement si
tous les sommets sauf 0 ou 2 sont de degré pair.

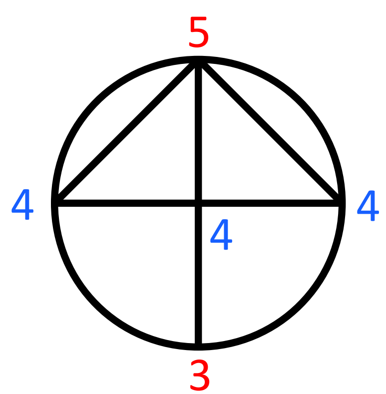


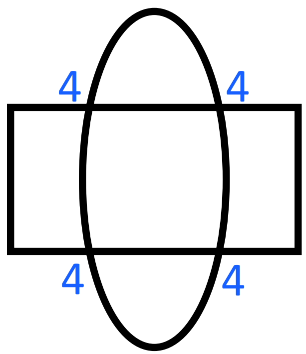
L. Euler
1707- 1783

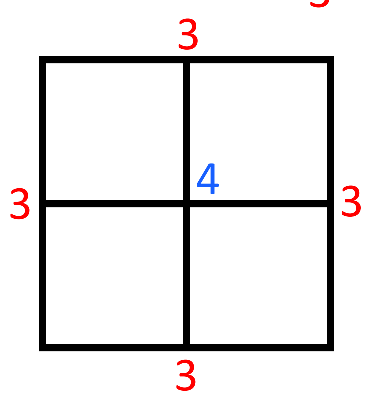
Dessiner sans lever le crayon

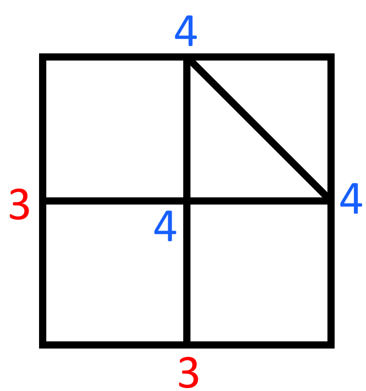
Peut-on dessiner ces formes sans lever le crayon et sans repasser sur un trait ?

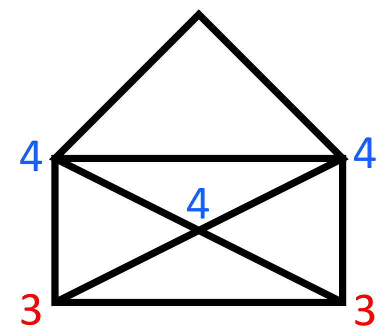
Oui
si et seulement si
tous les sommets sauf 0 ou 2 sont de degré pair.





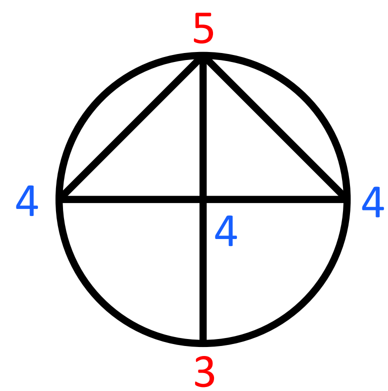


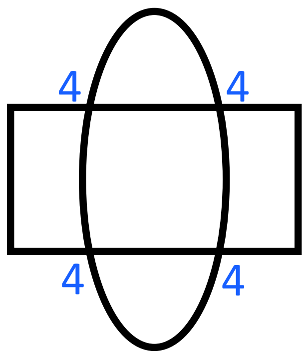




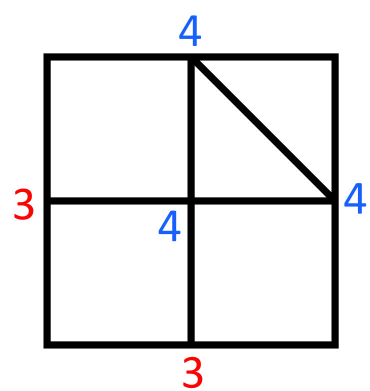
Dessiner sans lever le crayon

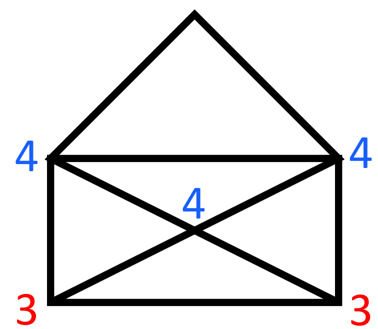
On peut dessiner les 4 formes ci-dessous sans lever le crayon et sans repasser sur un trait. **Oui, mais comment ?**





En appliquant un algorithme simple.

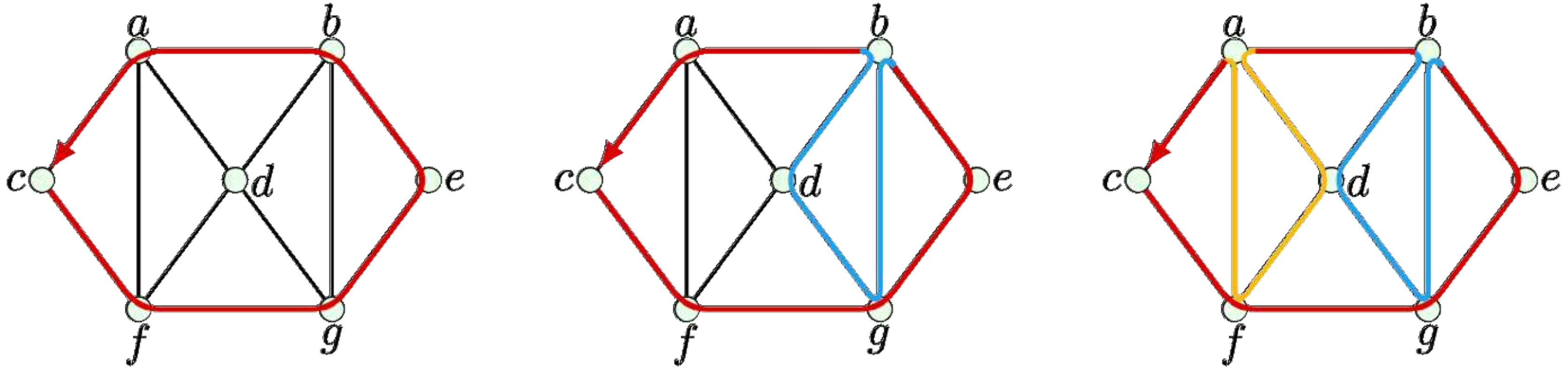




Trouver un parcours eulérien

Algorithme

1. Partir d'un sommet de degré impair. (ou de n'importe où s'il y en a pas).
2. Avancer tant qu'on peut.
3. Si on est bloqué,
   - Trouver un sommet où une arête est libre
   - Couper le chemin en ce sommet.
   - Repartir par une arête libre jusqu'à revenir au sommet.



Applications du parcours eulérien
et ses généralisations

- **Tournée de camions poubelles.**
  Trouver un ensemble de tours $T_1, . . . , T_p$ tel que chaque rue (= arête) est dans au moins un de ces tours. On veut un tel ensemble de longueur minimum.

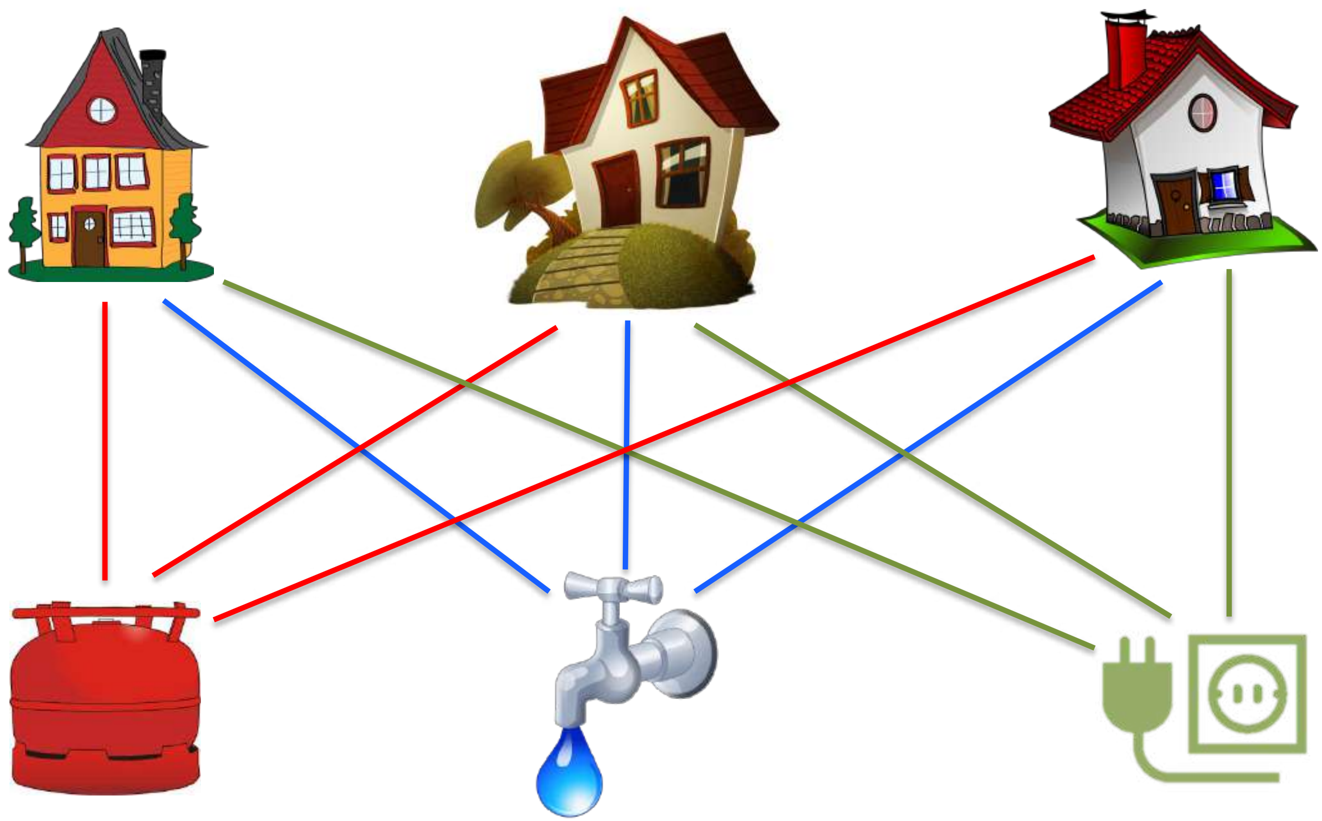
- **Diagnostic ou maintenance d'un réseau par un robot.**

- **Bioinformatique.** Reconstruction de séquences ADN à partir de fragments.

Dessin sans croisement

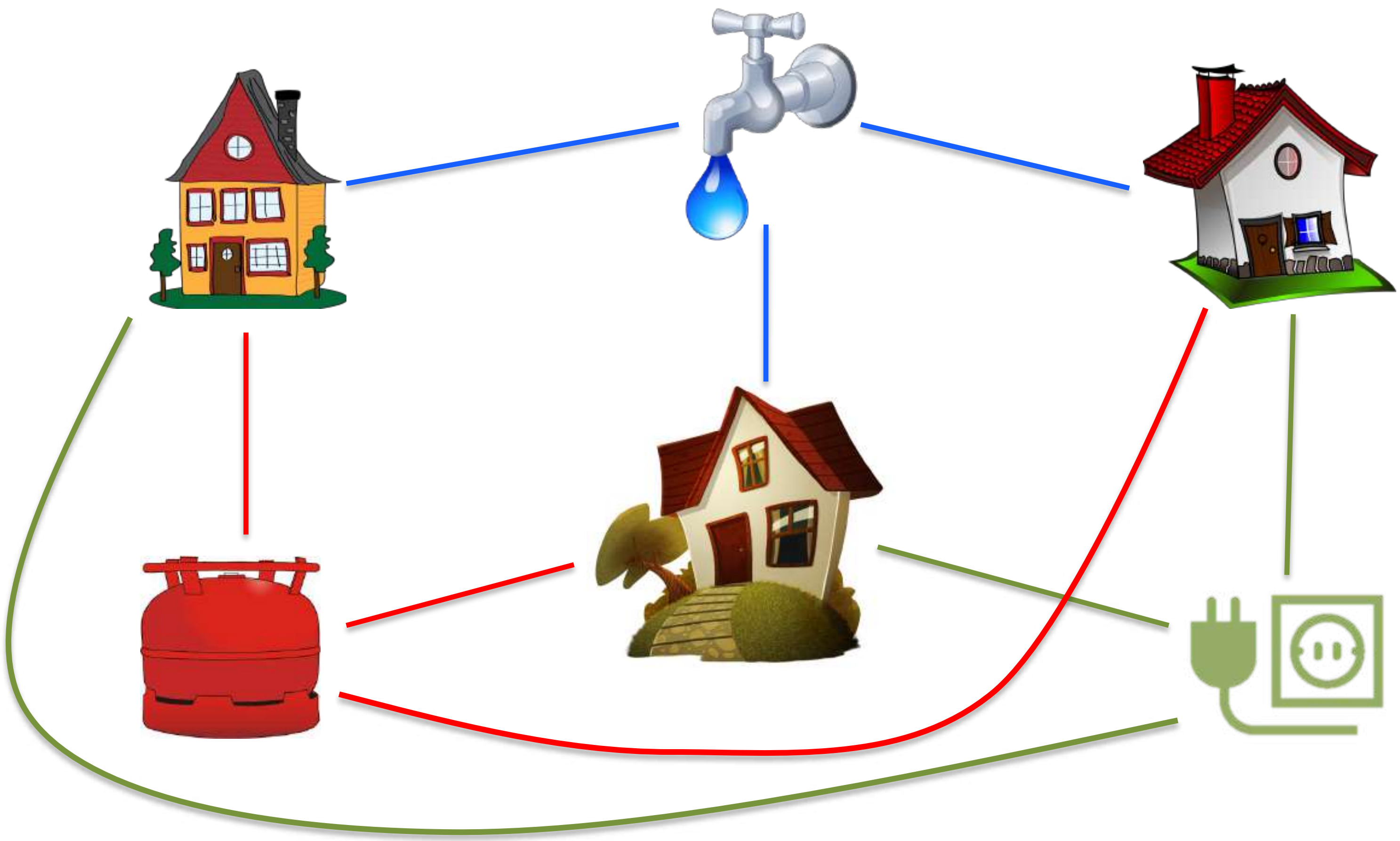
Le problème Gaz-Eau-Electricité

Peut-on relier trois maisons à l'eau, le gaz et l'électricité sans que les canalisations se croisent ?



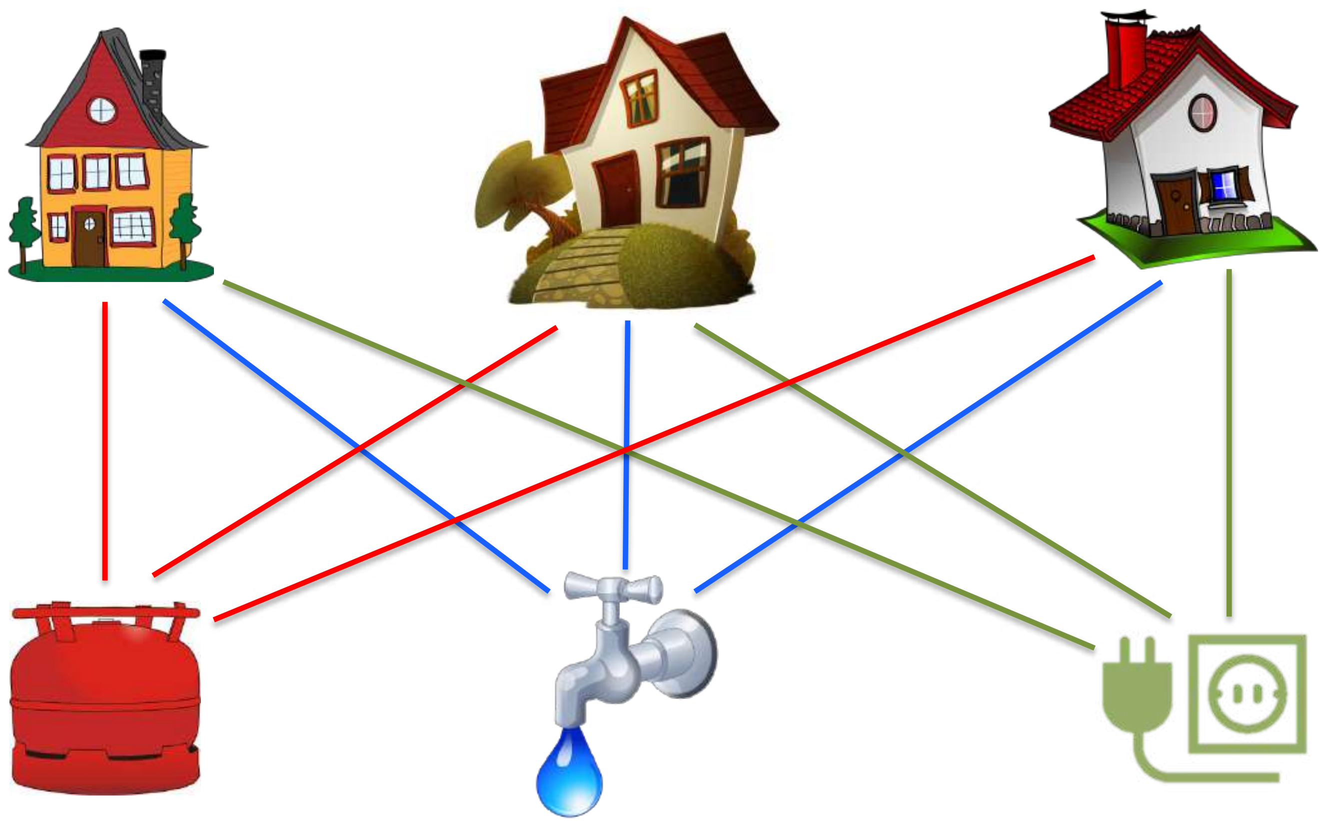
Le problème Gaz-Eau-Electricité

Peut-on relier trois maisons à l'eau, le gaz et l'électricité sans que les canalisations se croisent ?



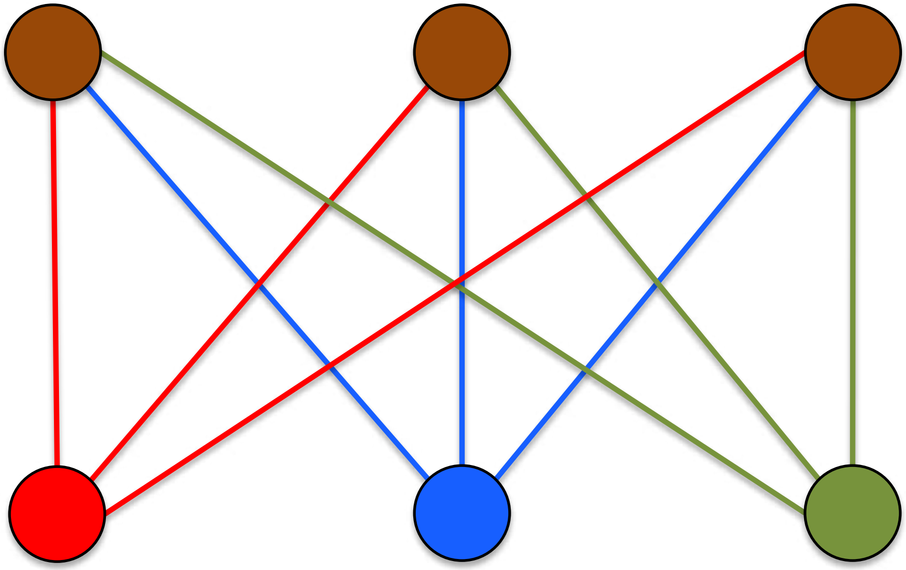
Le problème Gaz-Eau-Electricité

Peut-on relier trois maisons à l’eau, le gaz et l’électricité sans que les canalisations se croisent ?



Le problème Gaz-Eau-Electricité

Peut-on dessiner le graphe ci-dessous sans que les arêtes se croisent ? i.e. ce graphe est-il ***planaire*** ?



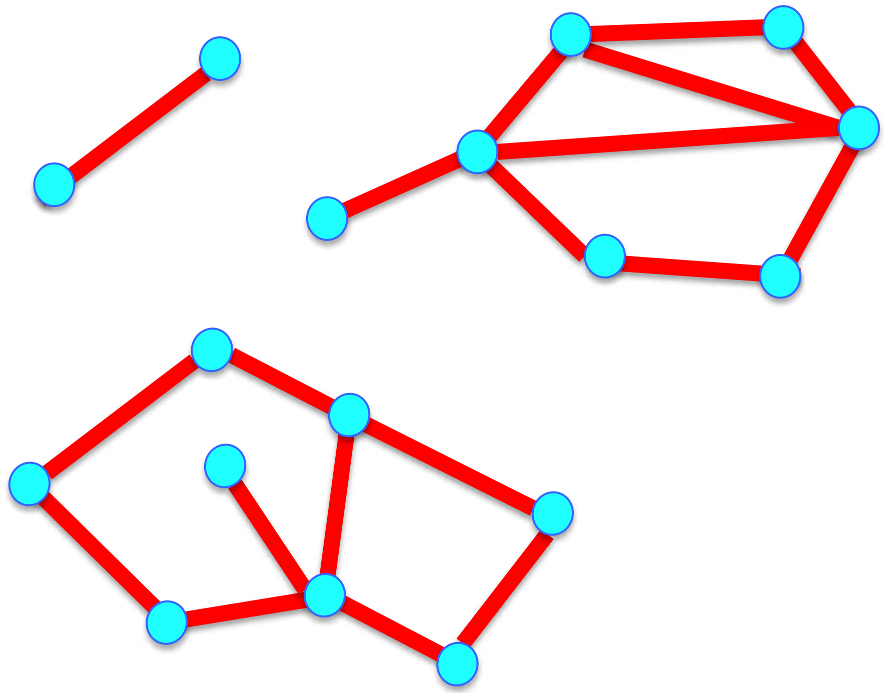
L. Euler
1707- 1783

Le problème Gaz-Eau-Electricité

Peut-on dessiner le graphe ci-dessous sans que les arêtes se croisent ? i.e. ce graphe est-il ***planaire*** ?

Formule d'Euler : Pour un graphe planaire,

$$\boxed{\text{nb de sommets + nb de faces = nb d'arêtes + nb de composantes +1}}$$



$S + F = A + C + 1$

$S = 17$

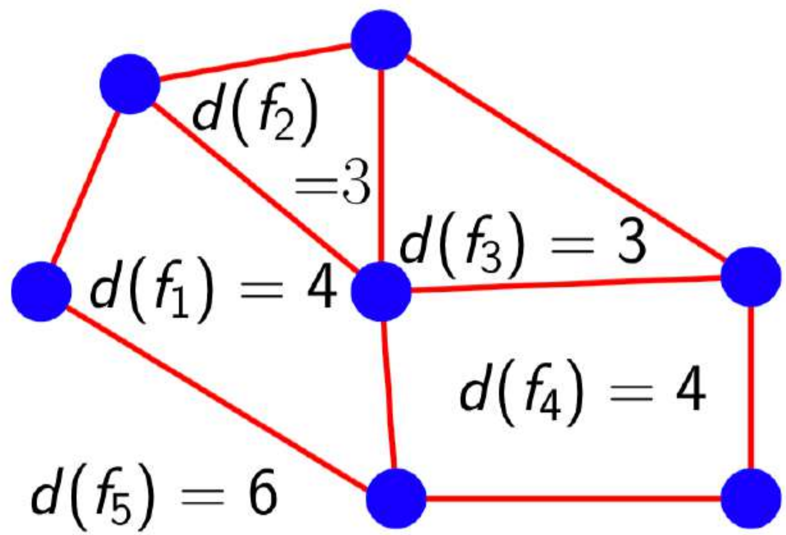
$A = 19$

$F = 6$

$C = 3$

Solution du problème Gaz-Eau-Electricité

degré d'une face f, $d(f)$: nombre d'arêtes "autour" de f.

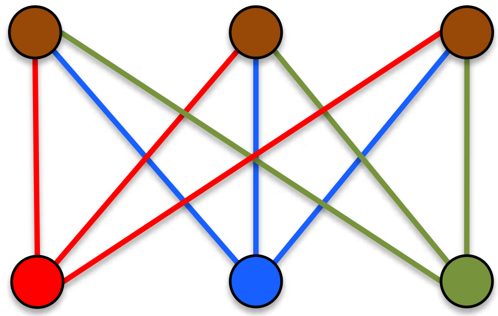


Une arête est autour de deux faces. Ainsi $\sum_{f \text{ face}} d(f) = 2 \times A$.

Ici: $d(f_1) + d(f_2) + d(f_3) + d(f_4) + d(f_5)$
$= 4 + 3 + 3 + 4 + 6 = 20 = 2 \times 10.$

Solution du problème Gaz-Eau-Electricité

Dans notre graphe, les faces seraient de degré au moins 4.



$$2A = \sum_{f \text{ face}} d(f) \geq 4F, \text{ soit } F \leq \frac{1}{2}A.$$

$$\begin{aligned} A &= S + F - 2 \\ &\leq S + \frac{1}{2}A - 2 \\ \frac{1}{2}A &\leq S - 2 \end{aligned}$$

Formule d'Euler

$$A \leq 2S - 4.$$

Or le graphe a 6 sommets et 9 arêtes.

$A = 2S - 3$.

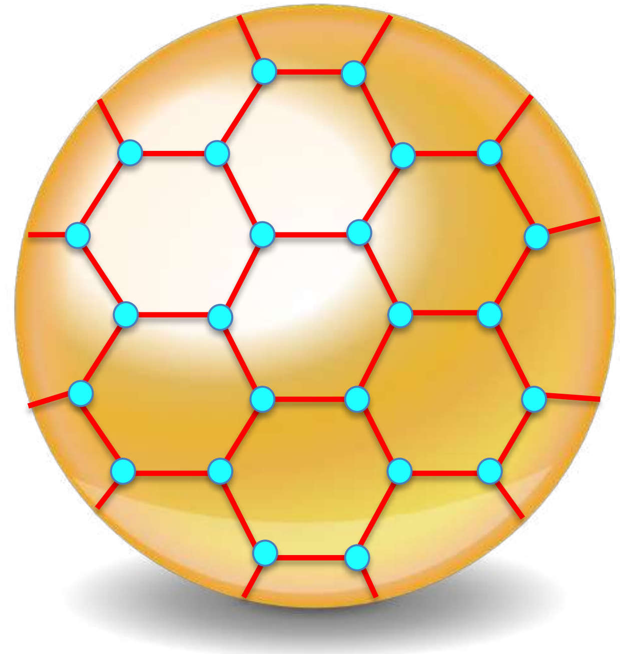
Il ne peut pas être planaire.

Application graphes planaires

- **Conception de circuit intégrés**
  sans ou avec le minimum de croisements.
  Combinaison de milliers de transistors sur une puce.

- **Planification de réseaux.**
  routiers, de télécommunications, …

Un ballon de foot avec que des hexagones ?



Supposons qu'il y ait **n faces hexagonales**.

Chaque arête est dans 2 faces.

il y a 6n/2 = **3n arêtes.**

Chaque sommet est dans 3 faces.

il y a 6n/3 = **2n sommets.**

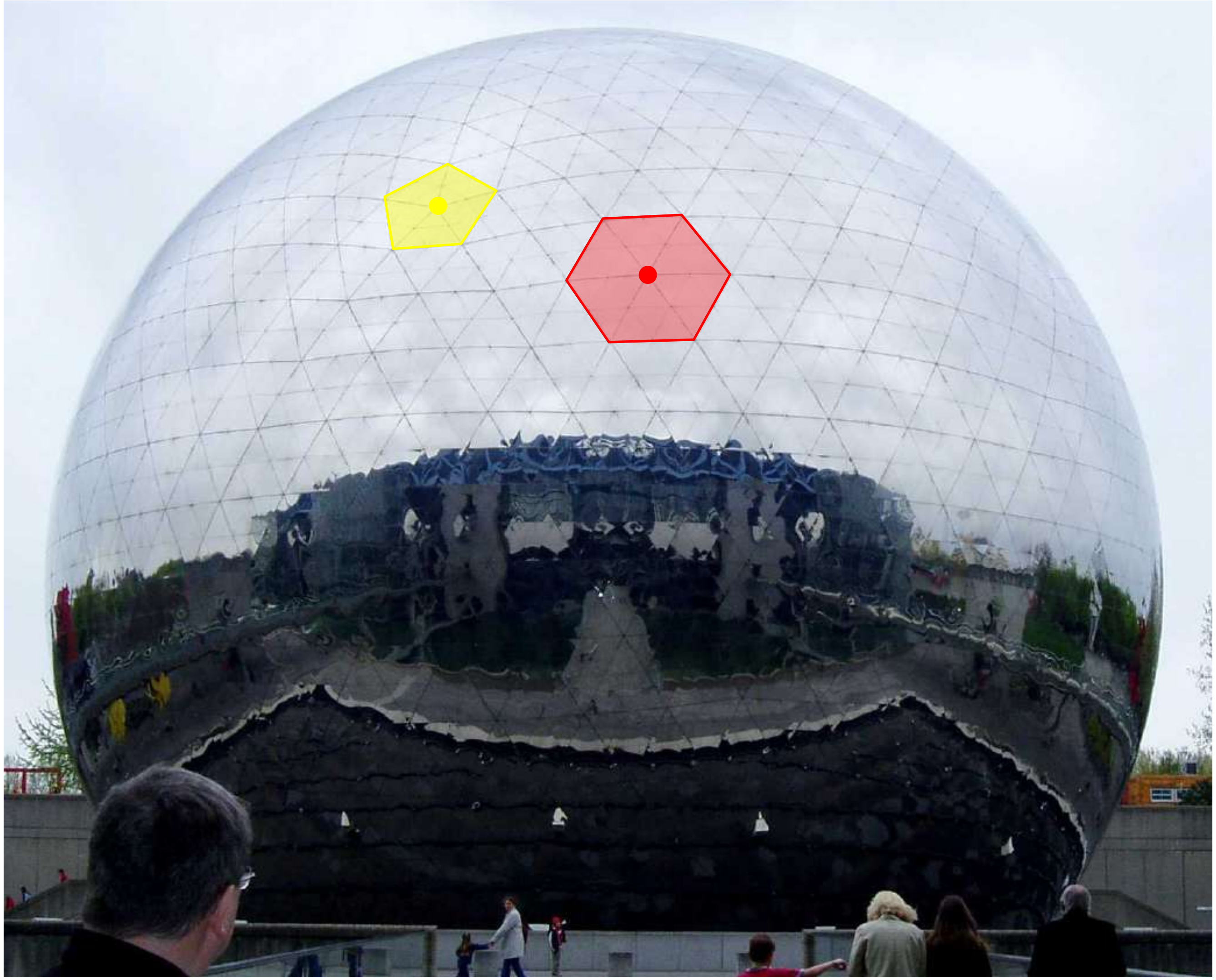
Formule d'Euler :

nombre de sommets **+** nombre de faces **=** nombre d'arêtes **+ 2**

$2n$ n $3n$ $3n + 2$

C'est **IMPOSSIBLE**

Les géodes



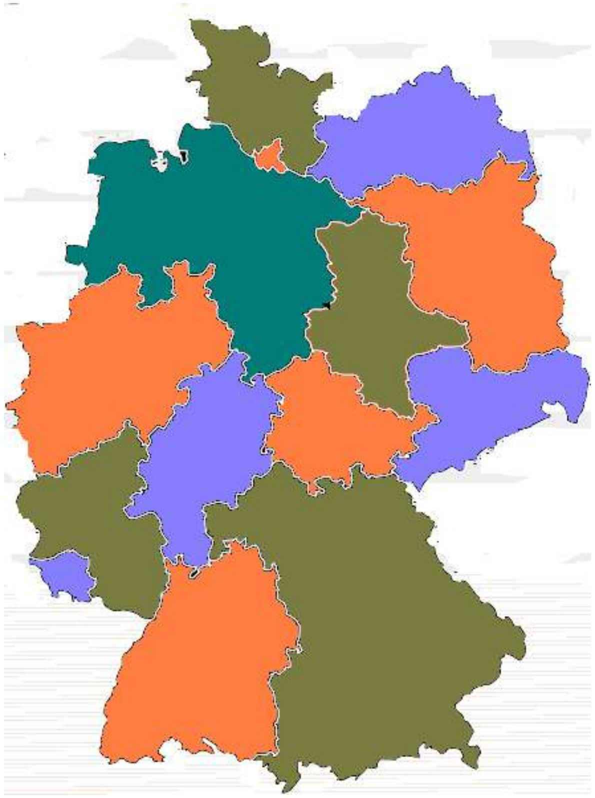
Géode, Cité des Sciences, Paris

Coloration de cartes

Problème des 4 couleurs

1852 : Francis Guthrie:

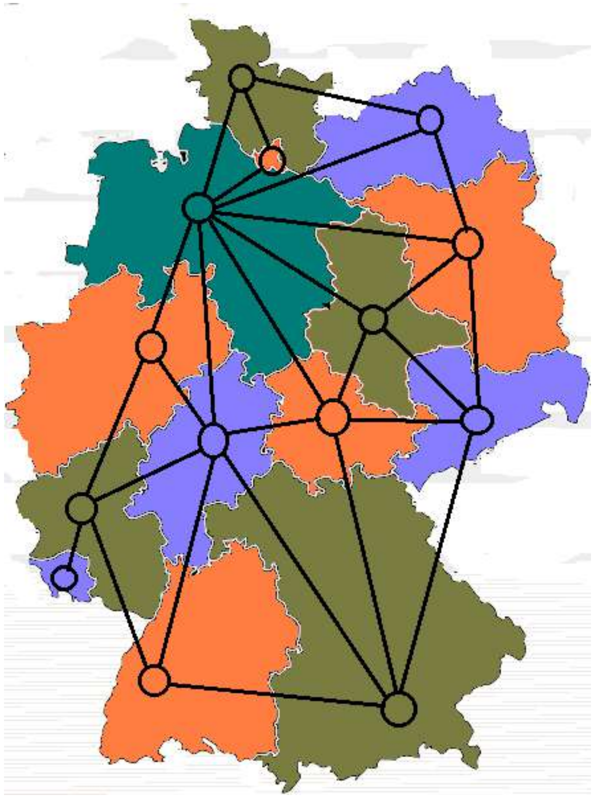
Peut-on colorer les régions (connexes) d'une carte avec 4 couleurs de telle sorte que deux régions voisines aient des couleurs différentes ?



Problème des 4 couleurs

1852 : Francis Guthrie:

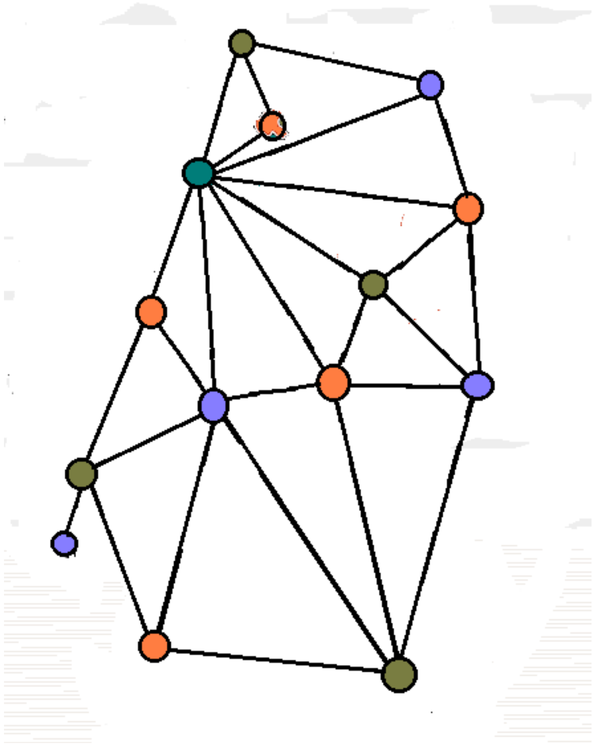
Peut-on colorer les régions (connexes) d’une carte avec 4 couleurs de telle sorte que deux régions voisines aient des couleurs différentes ?



Problème des 4 couleurs

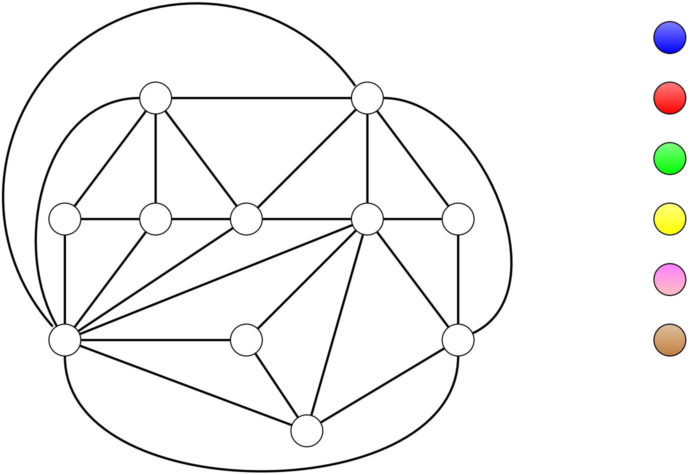
1852 : Francis Guthrie:

Peut-on colorer les sommets d'un graphe planaire avec 4 couleurs de telle sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes ?



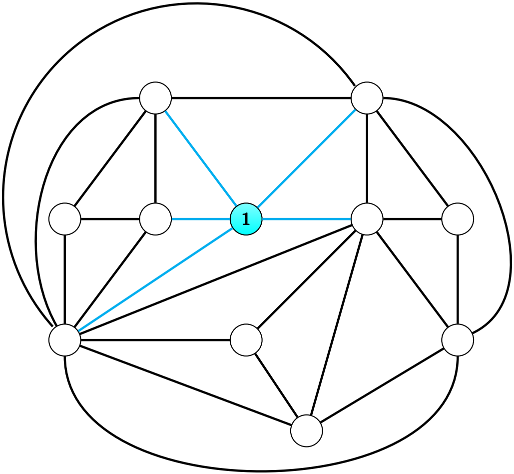
Théorème des 6 couleurs

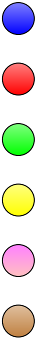
Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



Théorème des 6 couleurs

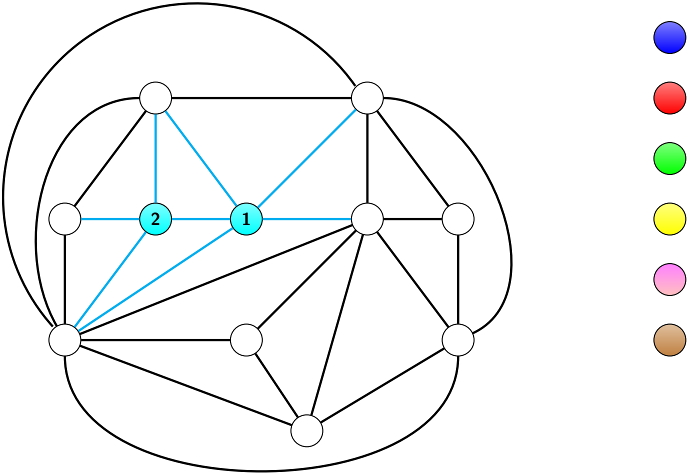
Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.





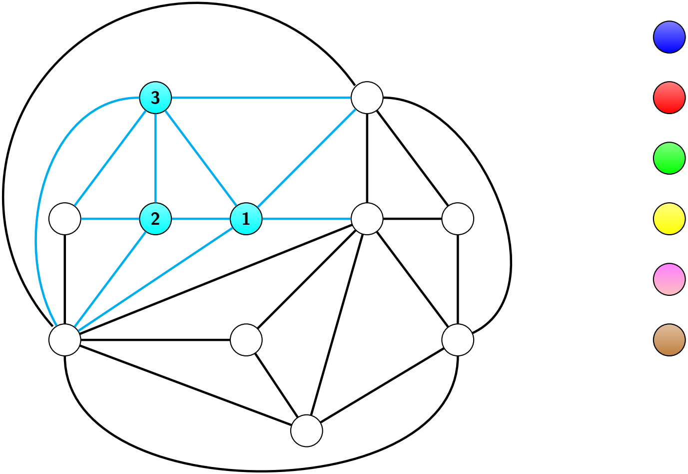
Théorème des 6 couleurs

Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



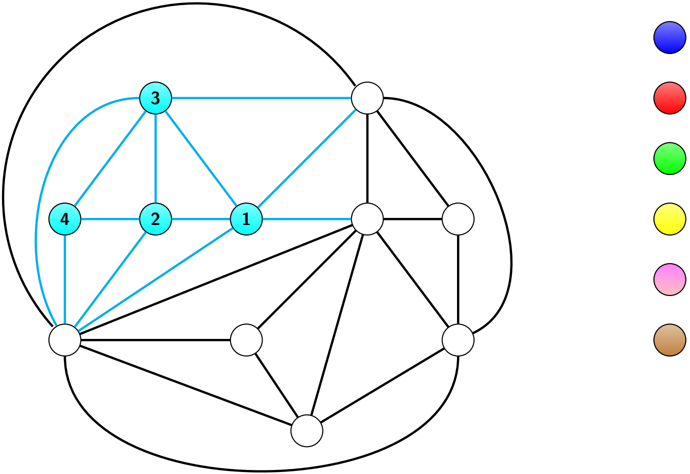
Théorème des 6 couleurs

Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



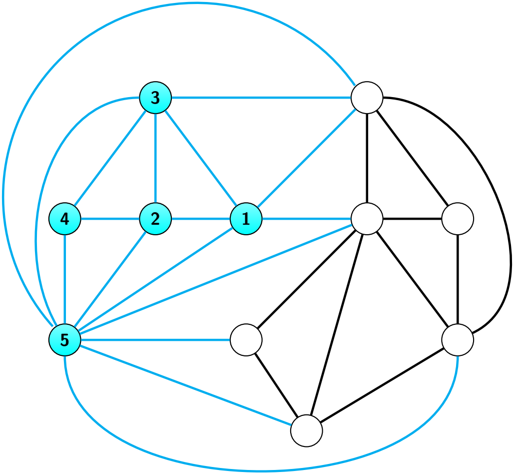
Théorème des 6 couleurs

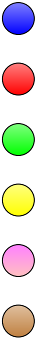
Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



Théorème des 6 couleurs

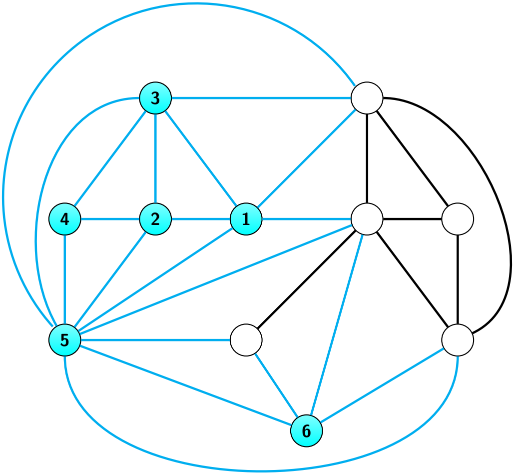
Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.

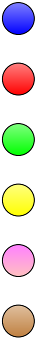




Théorème des 6 couleurs

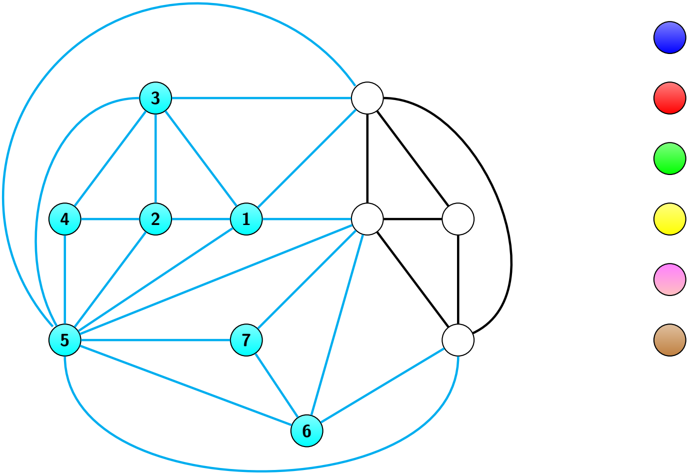
Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.





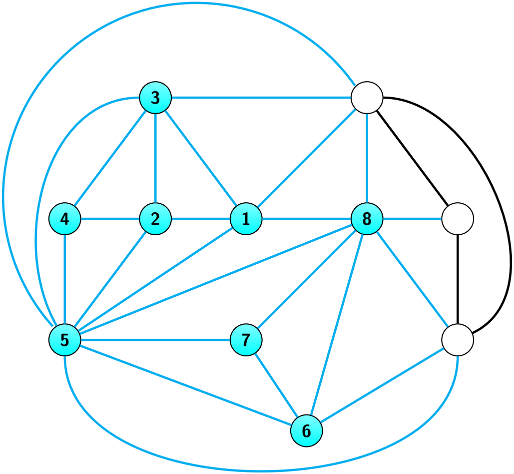
Théorème des 6 couleurs

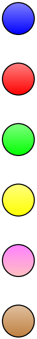
Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



Théorème des 6 couleurs

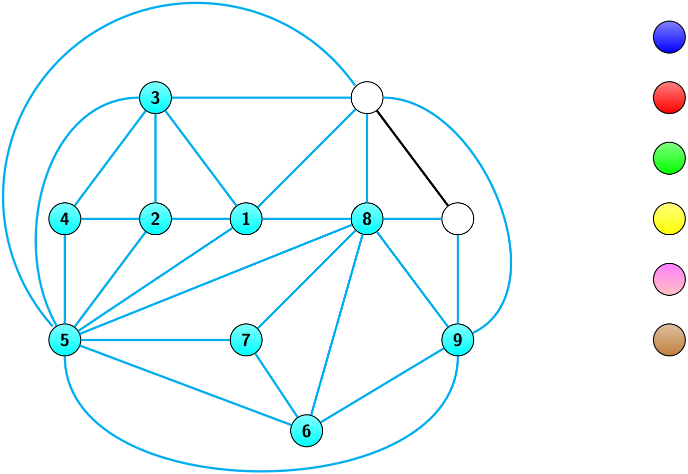
Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.





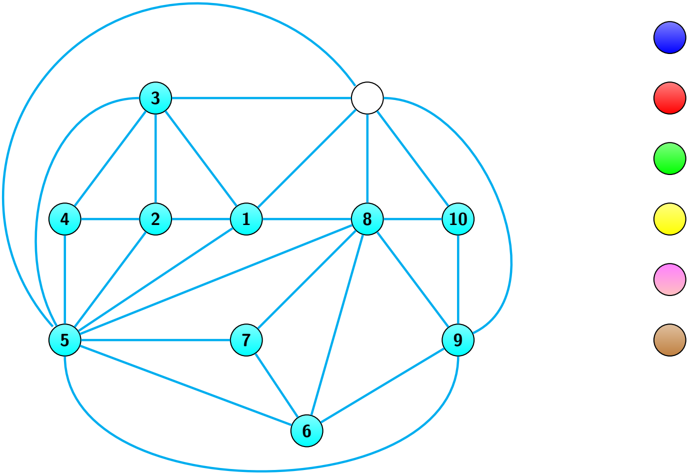
Théorème des 6 couleurs

Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



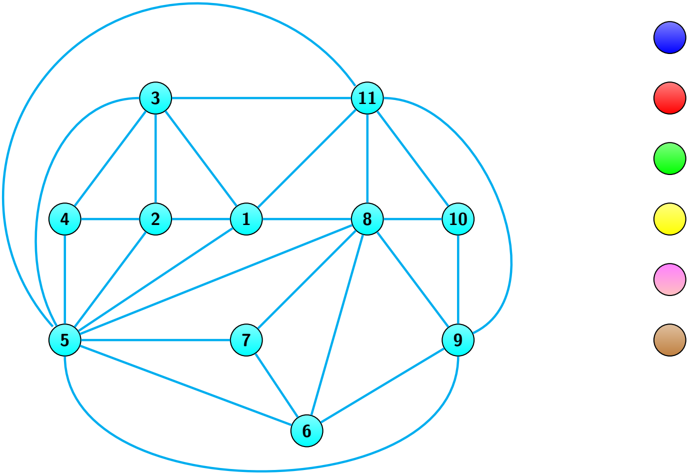
Théorème des 6 couleurs

Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



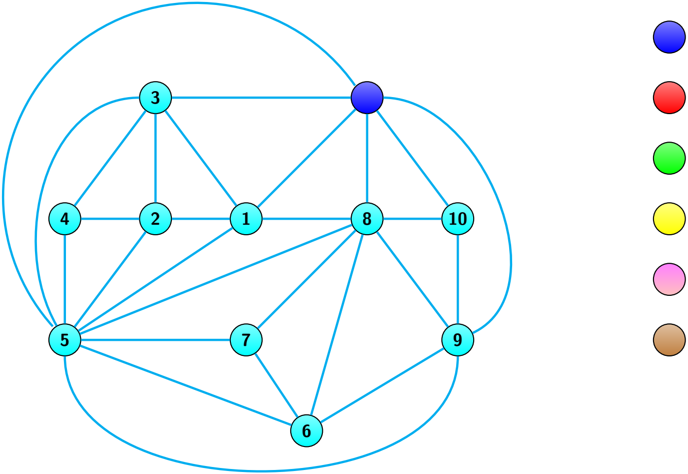
Théorème des 6 couleurs

Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



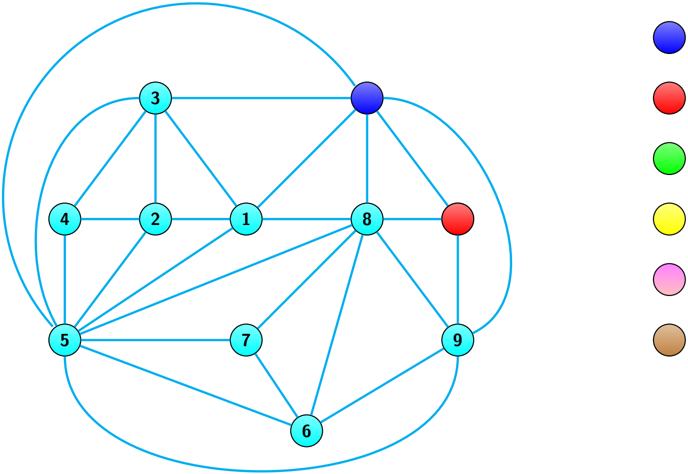
Théorème des 6 couleurs

Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



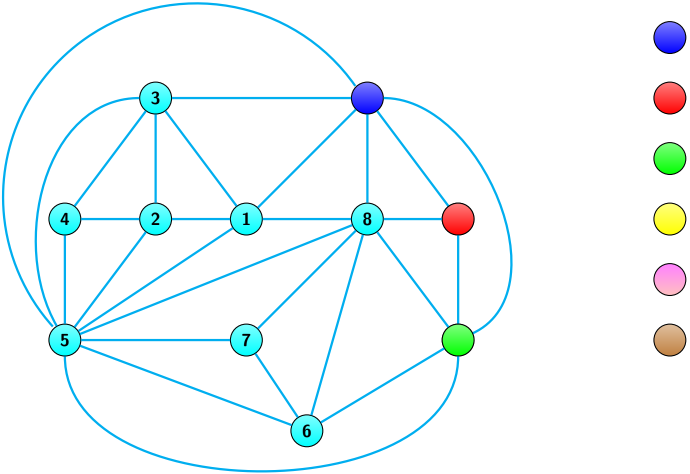
Théorème des 6 couleurs

Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



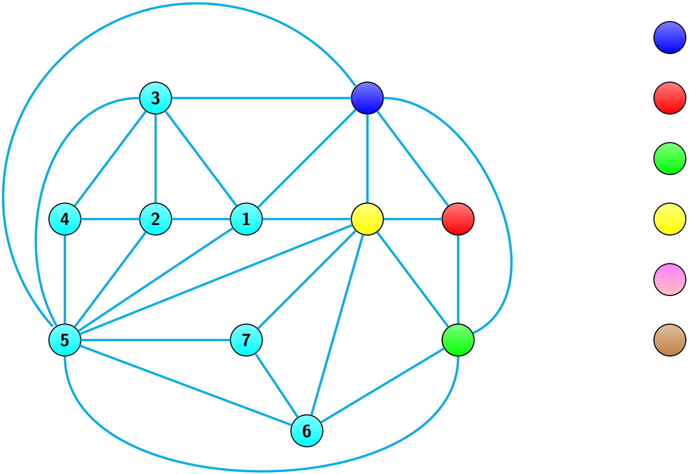
Théorème des 6 couleurs

Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



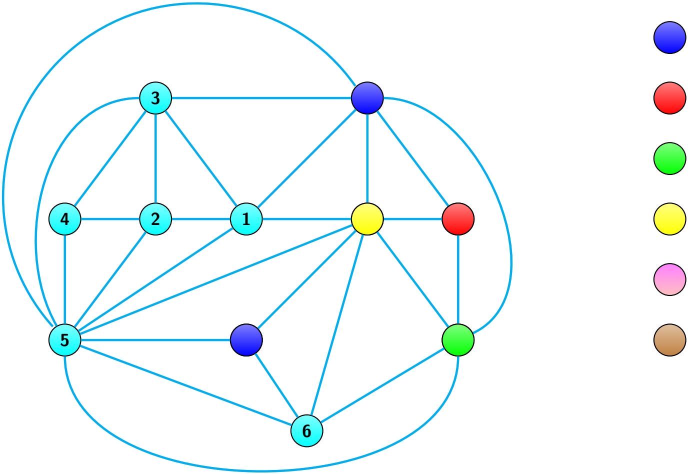
Théorème des 6 couleurs

Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



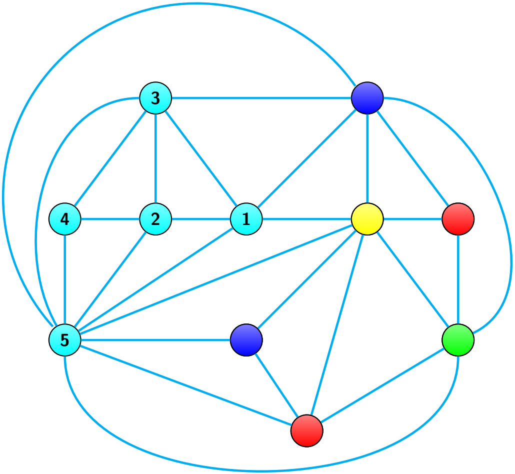
Théorème des 6 couleurs

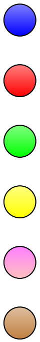
Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



Théorème des 6 couleurs

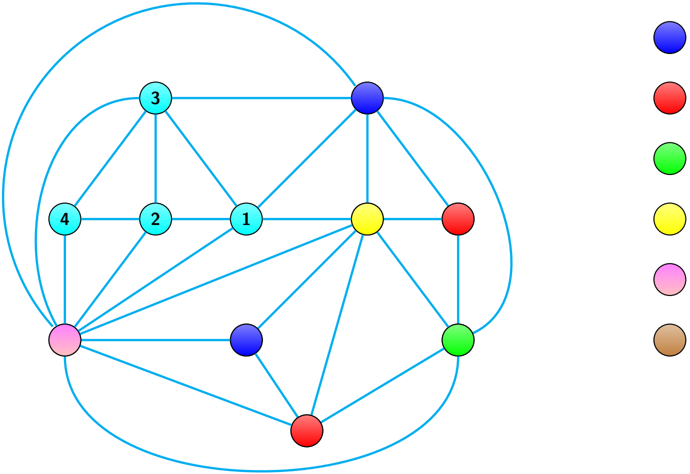
Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.





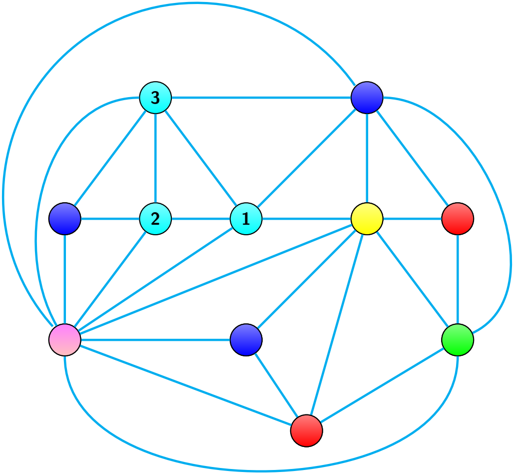
Théorème des 6 couleurs

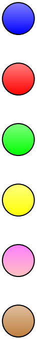
Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



Théorème des 6 couleurs

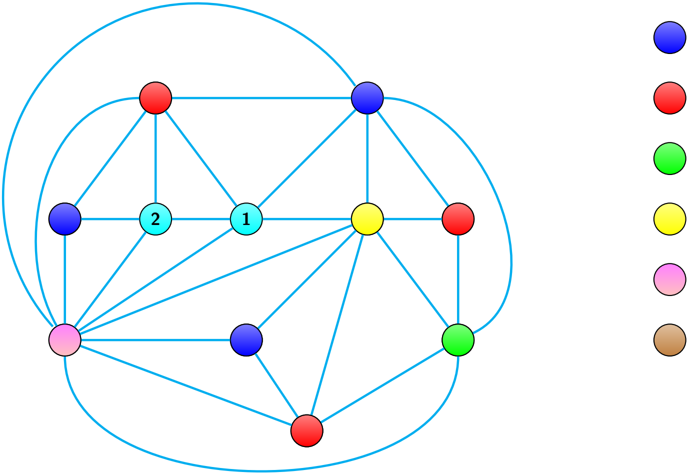
Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.





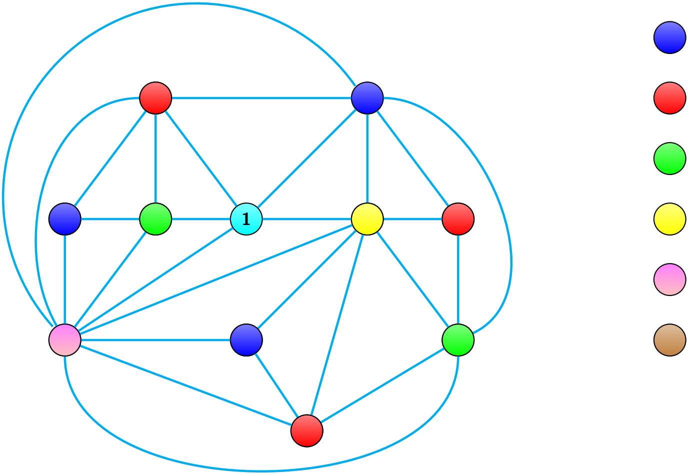
Théorème des 6 couleurs

Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



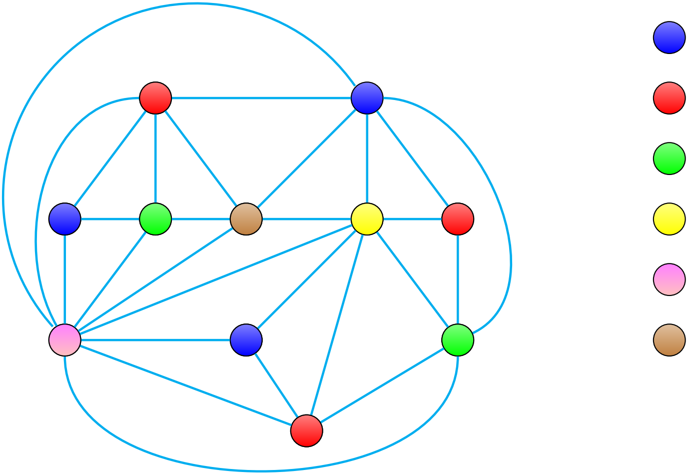
Théorème des 6 couleurs

Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.

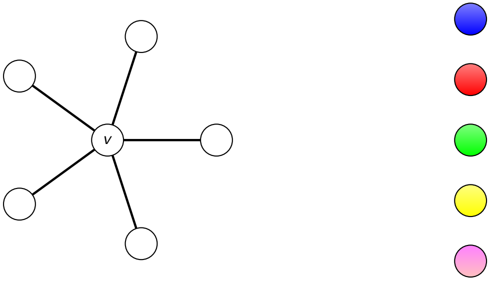


Théorème des 6 couleurs

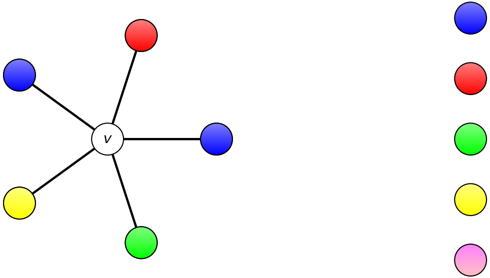
Formule d'Euler : tout graphe planaire a un sommet adjacent à au plus 5 autres.



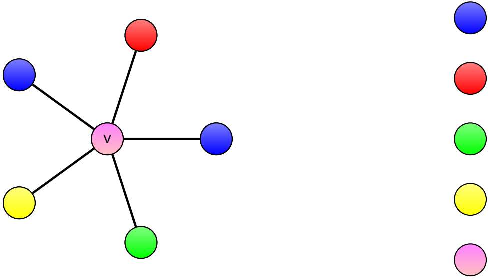
Théorème des 5 couleurs



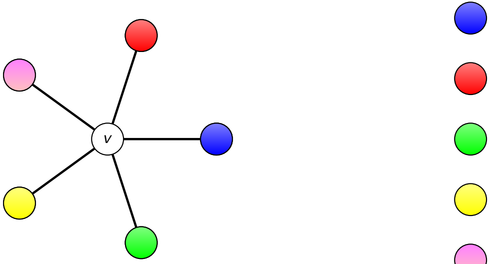
Théorème des 5 couleurs



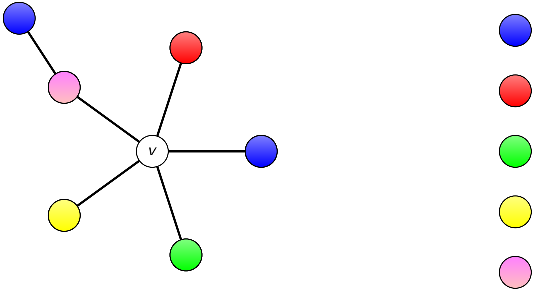
Théorème des 5 couleurs



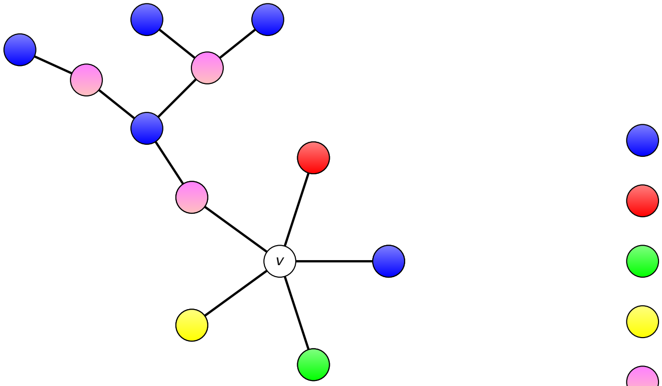
Théorème des 5 couleurs



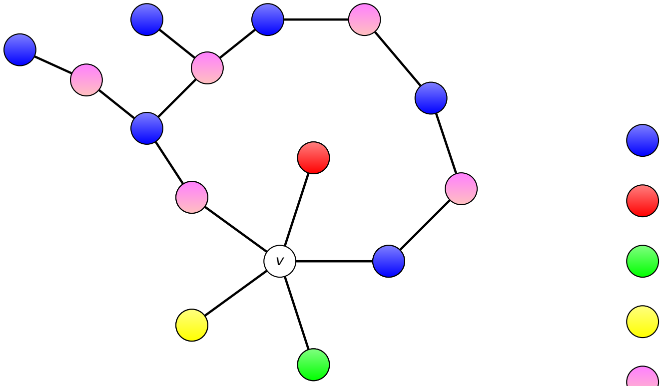
Théorème des 5 couleurs



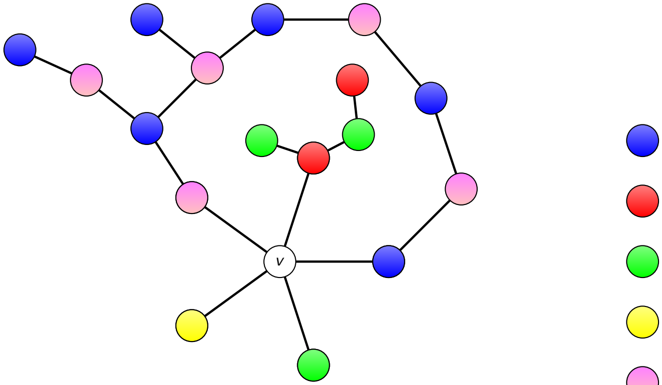
Théorème des 5 couleurs



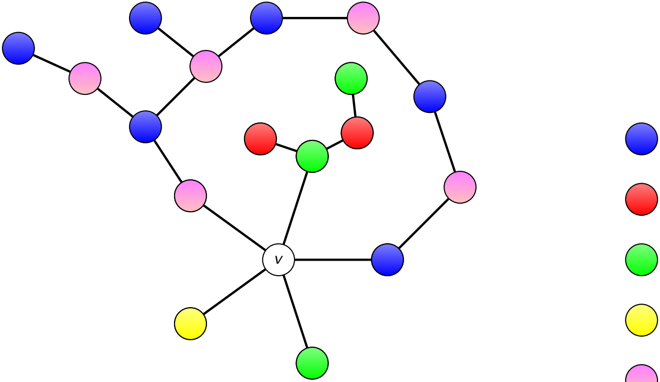
Théorème des 5 couleurs



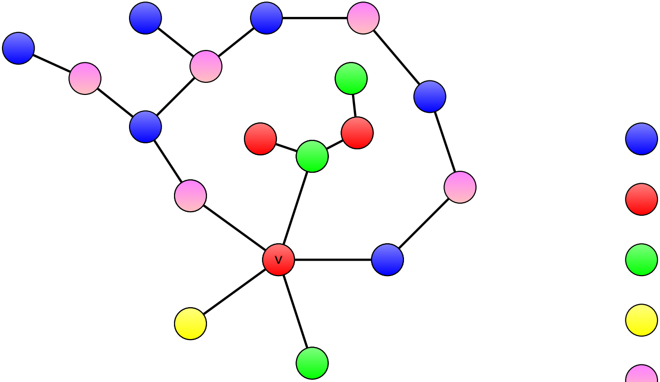
Théorème des 5 couleurs



Théorème des 5 couleurs



Théorème des 5 couleurs



Théorème des 4 couleurs

Tout graphe **planaire** est **4-colorable**.

Fausses preuves : Kempe (1879), Tait (1880).
Erreurs trouvées par Heawood (1890) et Petersen (1891).

1976 : Preuve par Appel et Haken.
Réduction à 1478 graphes critiques. **Utilisation de l'ordinateur** pour résoudre ces cas. Problème pour la validation:

- Vérification de l'algorithme.
- Vérification de l'implémentation.

1995 : Nouvelle preuve par Robertson, Sanders, Seymour et Thomas. Réduction à 633 cas.

2005: une version en Coq par Gonthier et Werner.

Vérification automatique par ordinateur.

Coloration avec 3 couleurs

Problème :
Entrée : un graphe planaire G.
Question : G est-il 3-colorable ?

Il y a 3^n affectations de couleurs possibles,
donc on peut le faire en temps $O^*(3^n)$.

Conjecture : c'est **impossible en temps polynomial**.

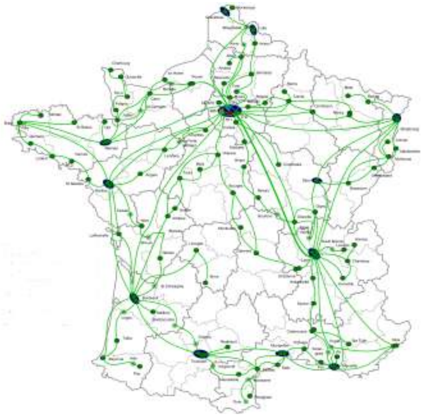
C'est **P ≠ NP**, une des conjectures du millénaire.
1 million de dollars est offert pour qui la montre ou la réfute.

Applications de la coloration

- **Ordonnancement.**
  Sommets = tâches.
  Arêtes entre des tâches concurrentes.
  Couleurs = intervalles de temps.
  Coloration du graphe = ordonnancement possible des tâches.
  Minimiser le nombre de couleurs = minimiser le temps pour effectuer toutes les tâches.

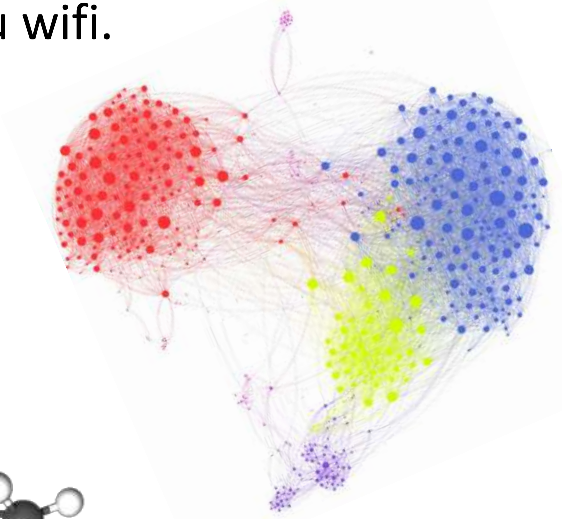
- **Allocation de fréquences.**
  Sommets = transmetteurs.
  Arêtes entre des transmetteurs dont les zones s'intersectent.
  Couleurs = fréquences.
  Coloration du graphe = allocation de fréquences sans interférences.
  Minimiser le nombre de couleurs = minimiser la largeur de bande nécessaire.

Graphe : un modèle naturel



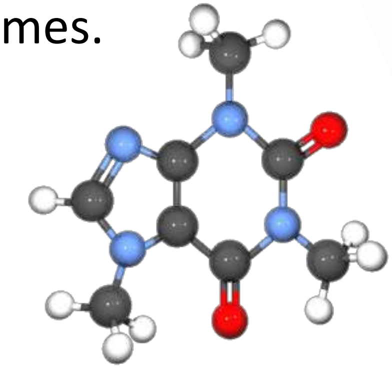
- **Réseaux routiers :** Sommets = villes.
  Arêtes = routes.

- **Réseaux d'ordinateurs :** Sommets = ordinateurs/ routeurs.
  Arêtes = liens physiques ou wifi.



- **Réseaux sociaux :** Sommets = personnes.
  Arêtes entre deux amis.

- **Molécules :** Sommets = atomes.
  Arêtes = liaisons entre atomes.



- **…**

Merci !