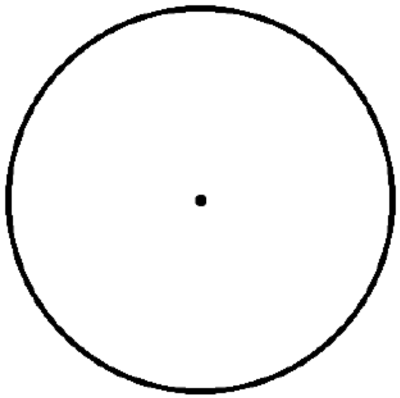
Les formes de largeur constante

Frédéric Havet

TERRA NUMERICA

Institut Esope 21

Formes de largeur constante



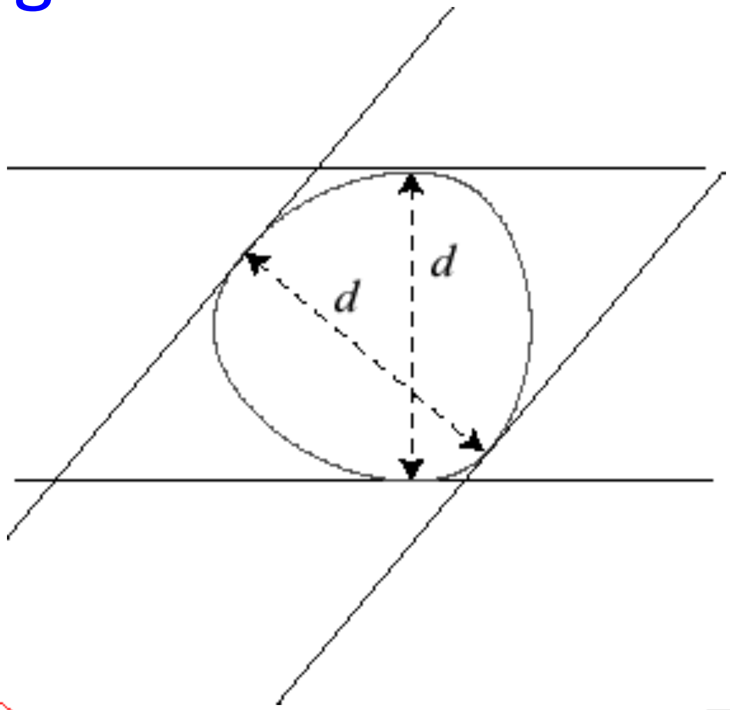
Cathédrale Notre-Dame, Bruges

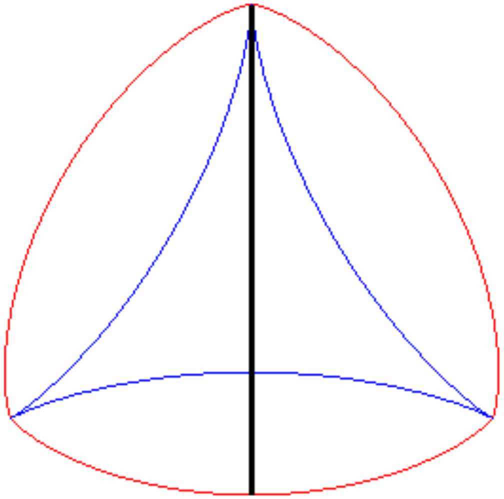
Bermudes

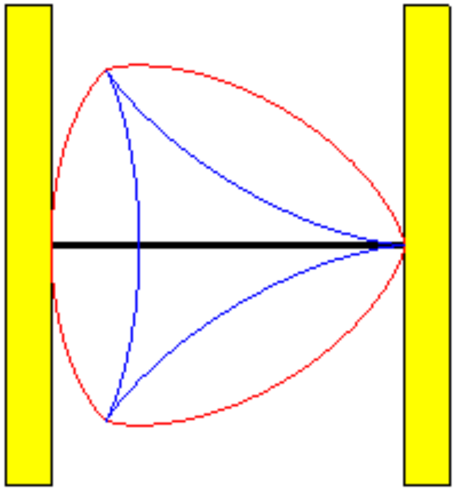
Royaume-Uni

Canada

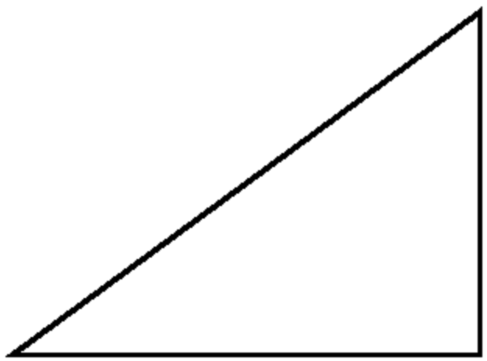
Formes de largeur constante



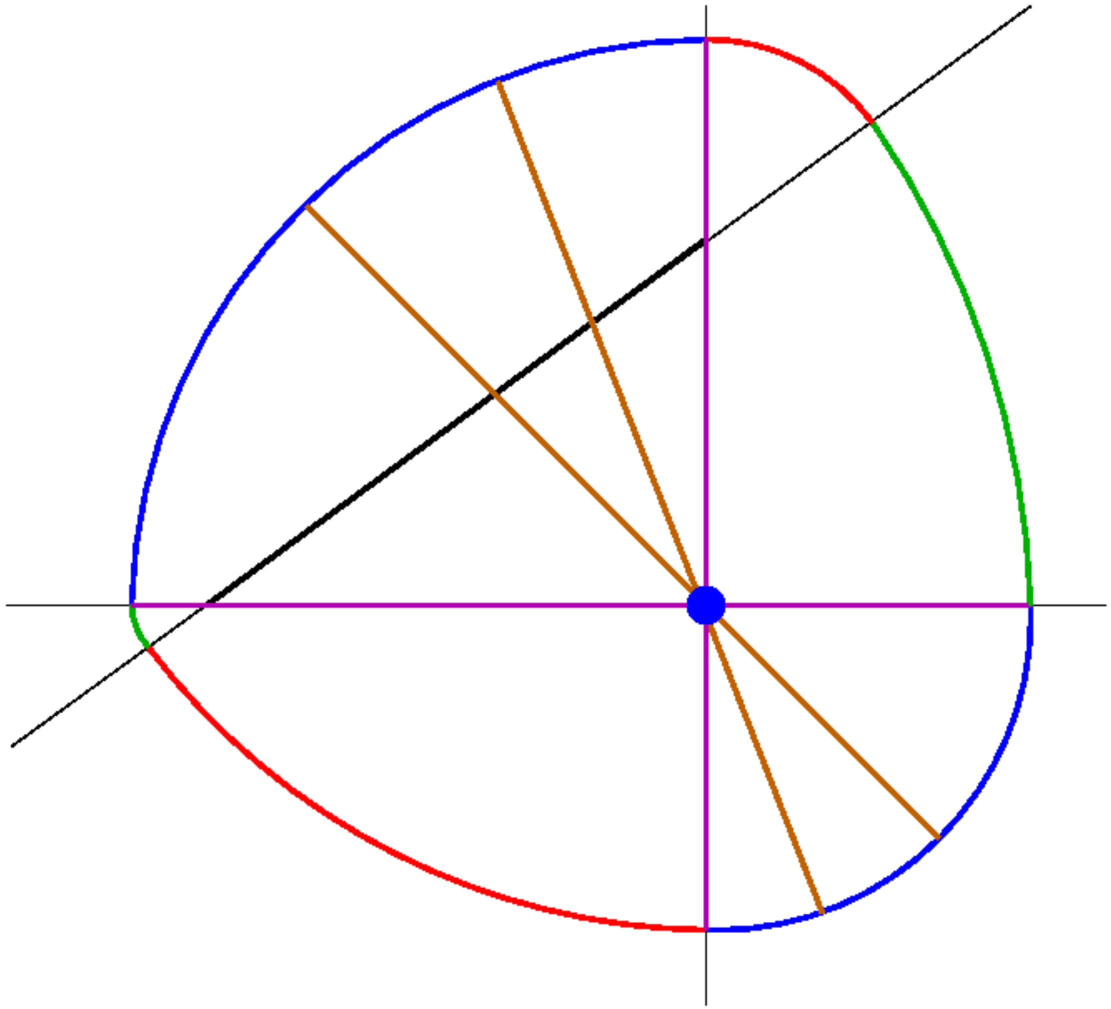




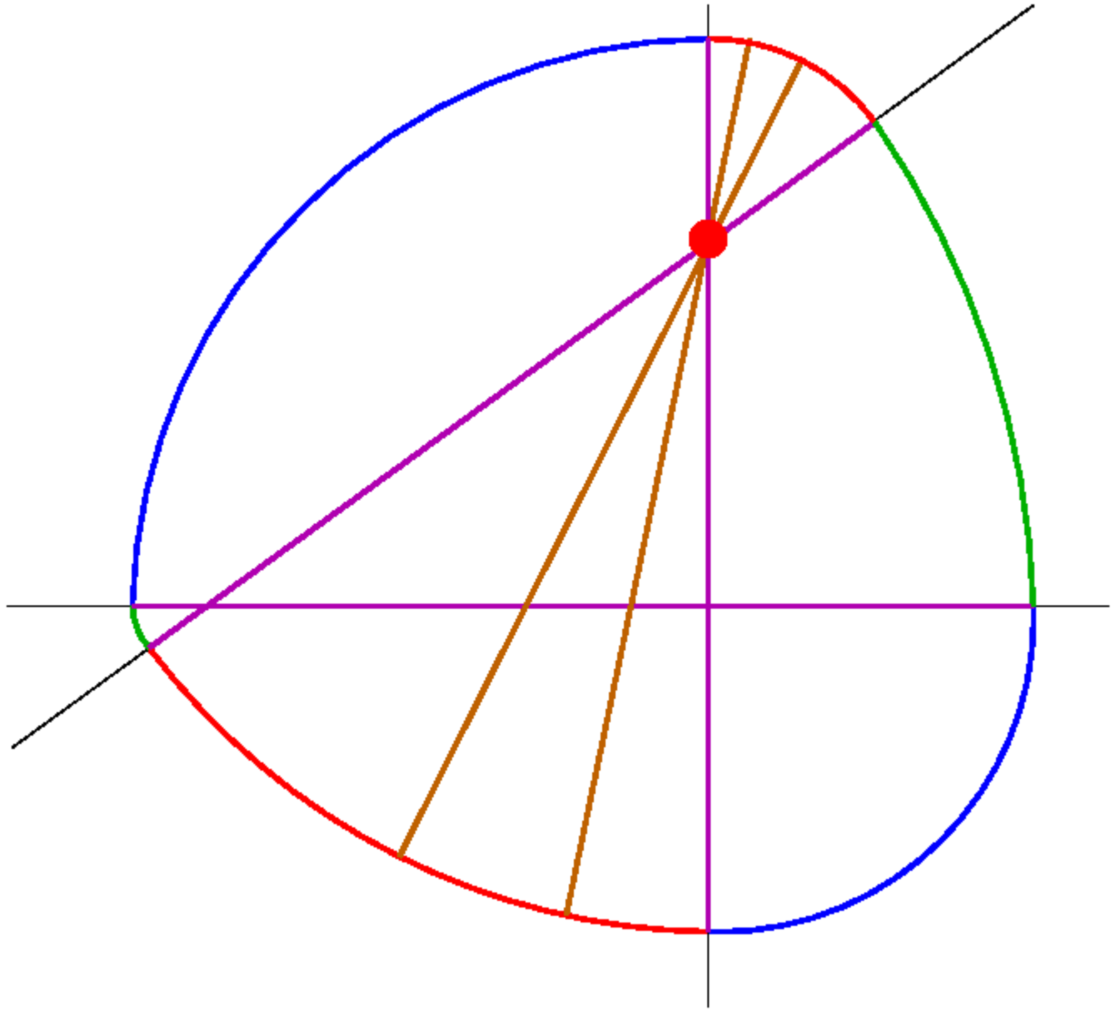
Construire des formes de largeur constante



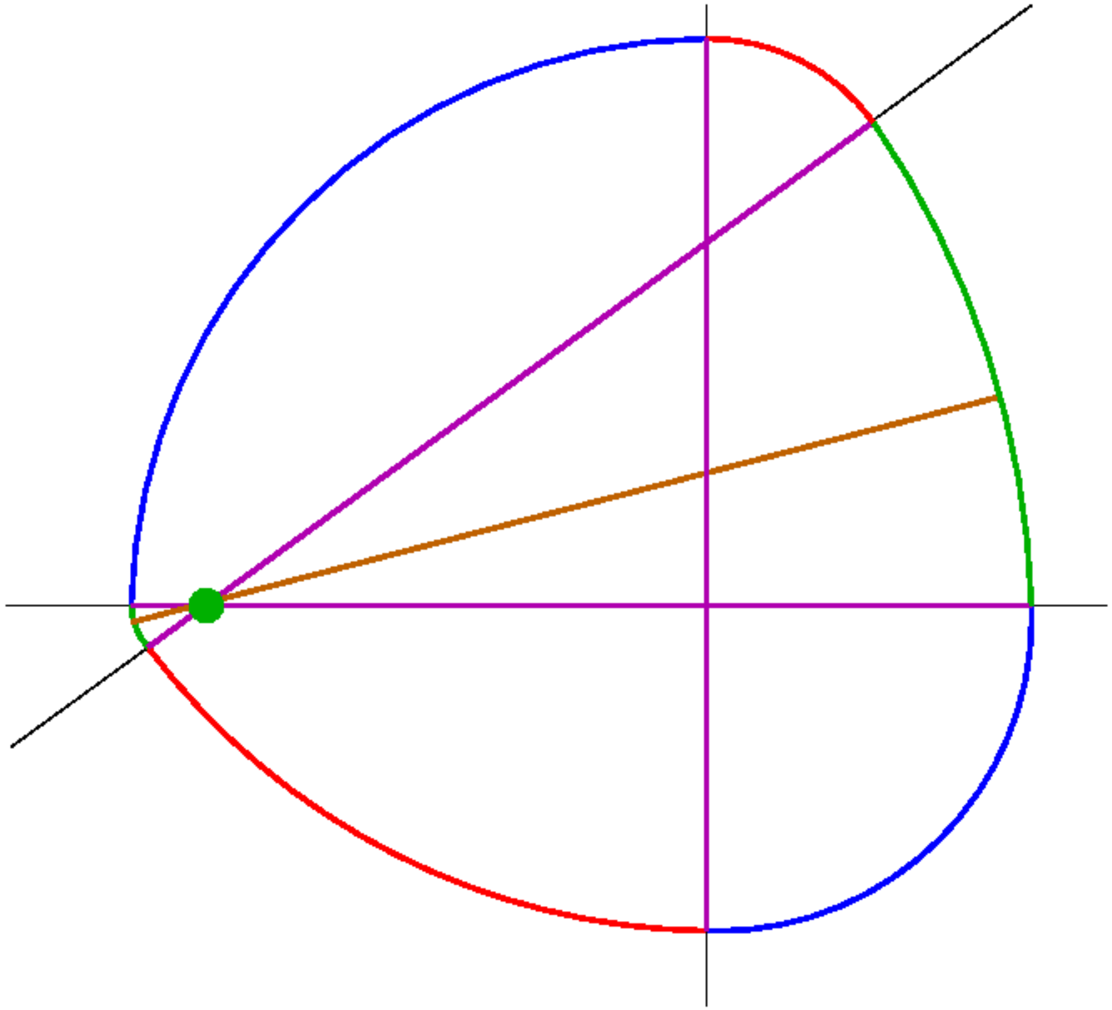
Construire des formes de largeur constante



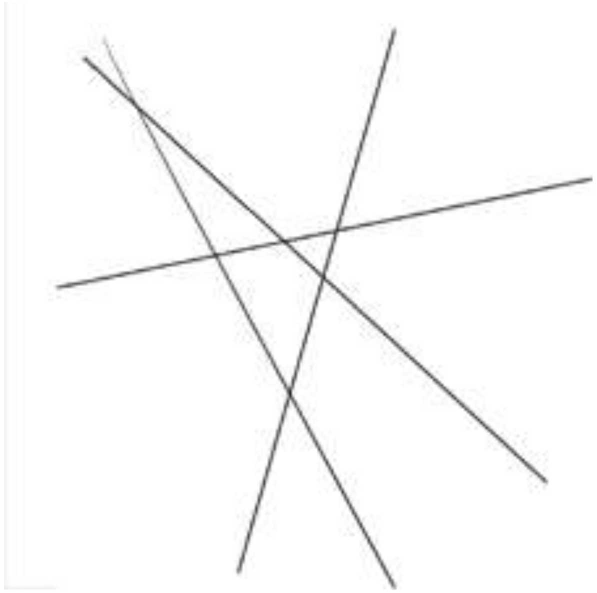
Construire des formes de largeur constante



Construire des formes de largeur constante

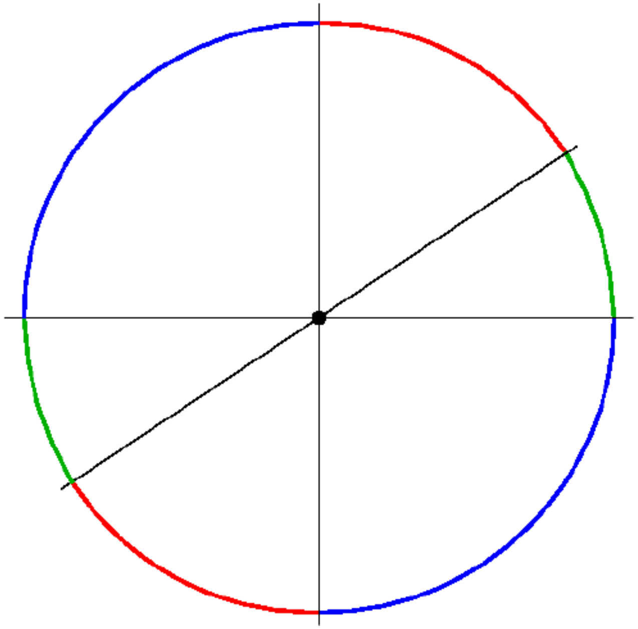


Construire des formes de largeur constante

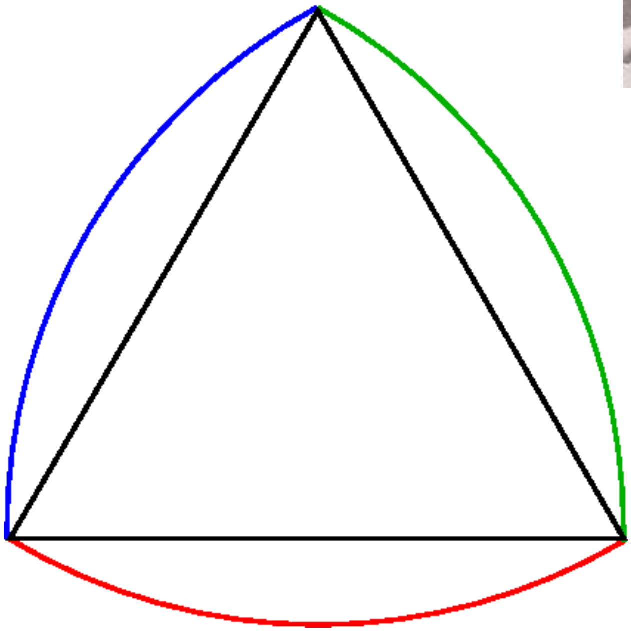


Quelques formes de largeur constante particulières

Franz Reuleaux
(1829-1905)

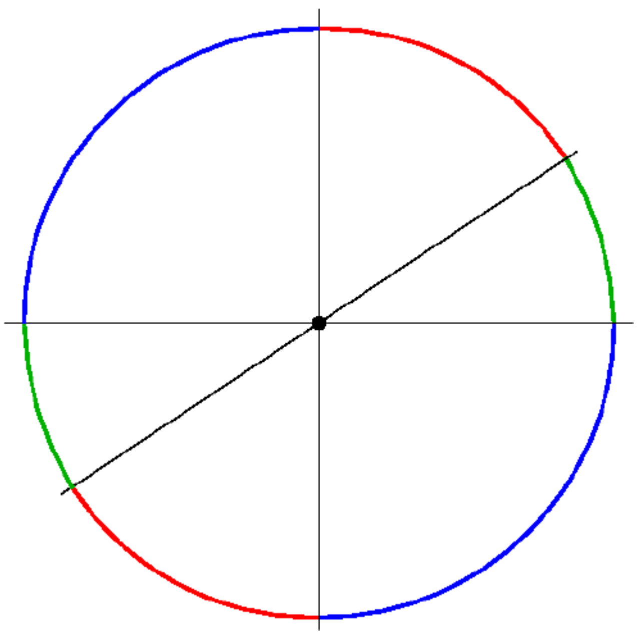


Cercle

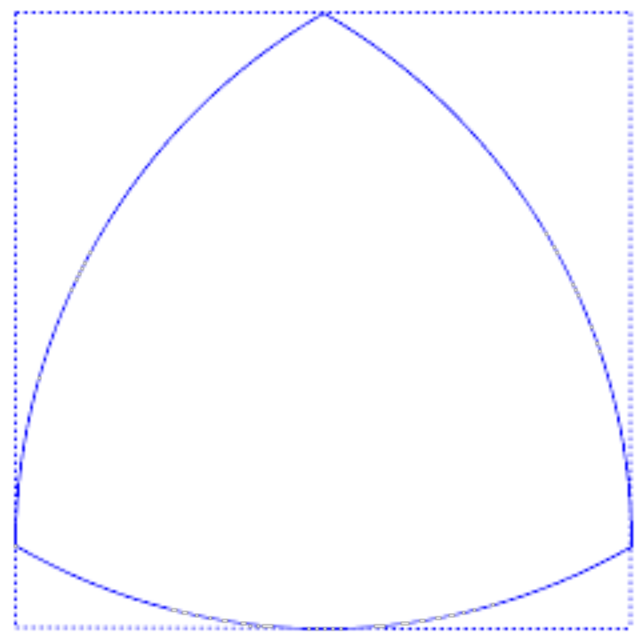


Triangle de Reuleaux

Quelques formes de largeur constante particulières



Cercle



Triangle de Reuleaux

Application : faire des trous carrés

Application : plaques d'égout

circulaire

Aire : $\dfrac{1}{4}\pi \times D^2 \approx 0{,}786 \times D^2$

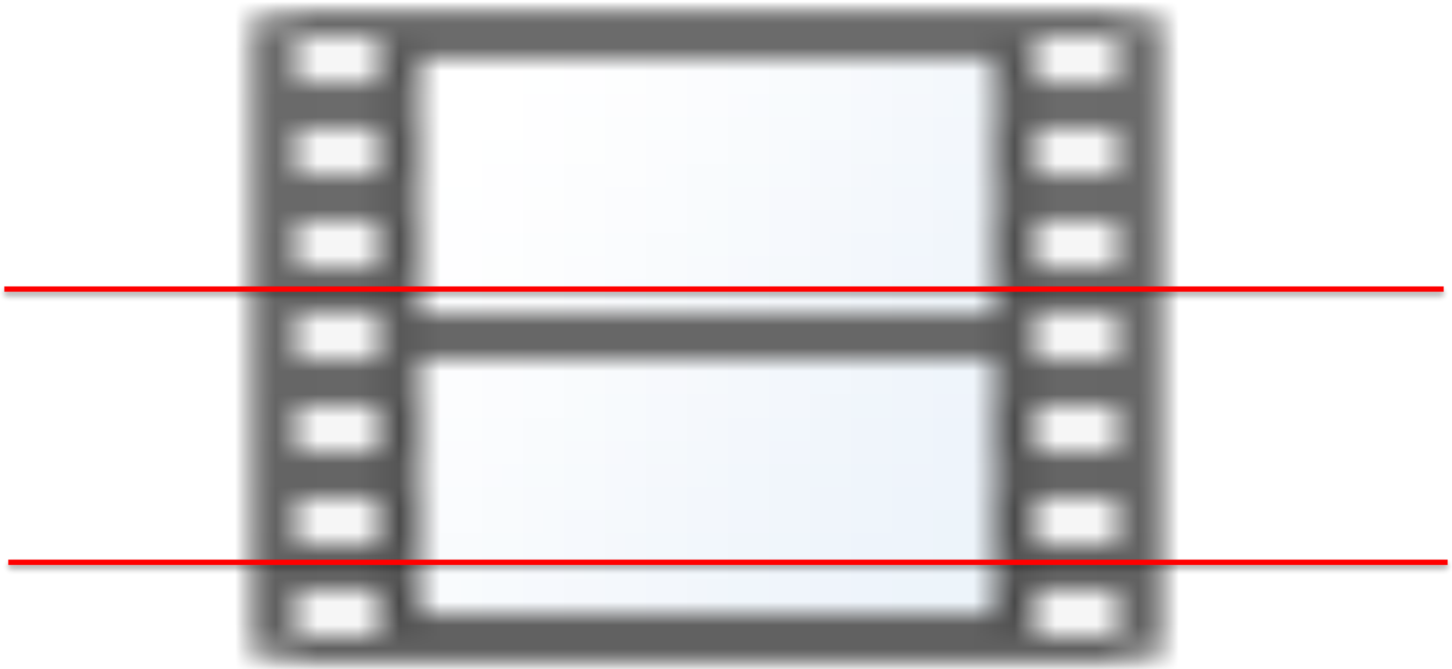
en triangle de Reuleaux

Aire : $\dfrac{1}{2}(\pi - \sqrt{3}) \times D^2 \approx 0{,}704 \times D^2$

Théorème : De toutes les formes de largeur constante D,

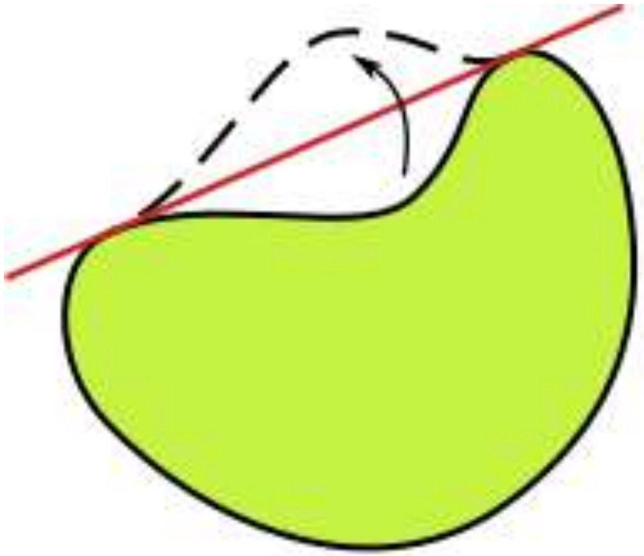
- **le triangle de Reuleaux a la plus petite surface** (Blaschke-Lebesgue 1914-15)
- **le cercle a la plus grande surface** (Inégalité isopérimétrique + Théorème de Barbier)

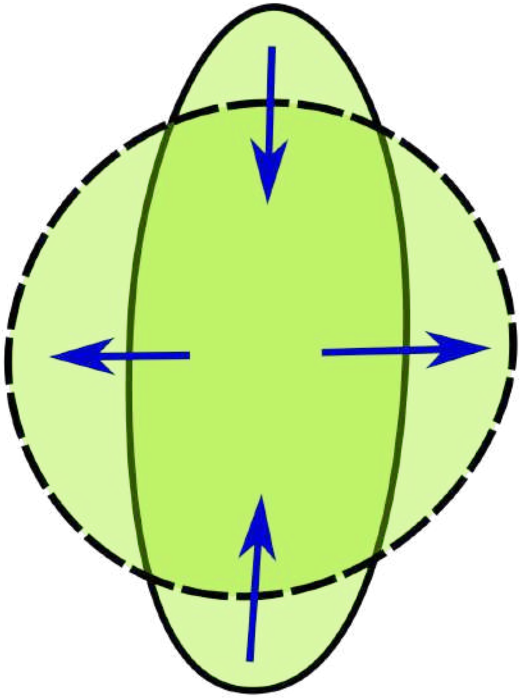
Application : pièces de monnaie



Inégalité isopérimétrique

Théorème : **De toutes les formes de même périmètre, le cercle a la plus grande surface.**





Théorème de Barbier

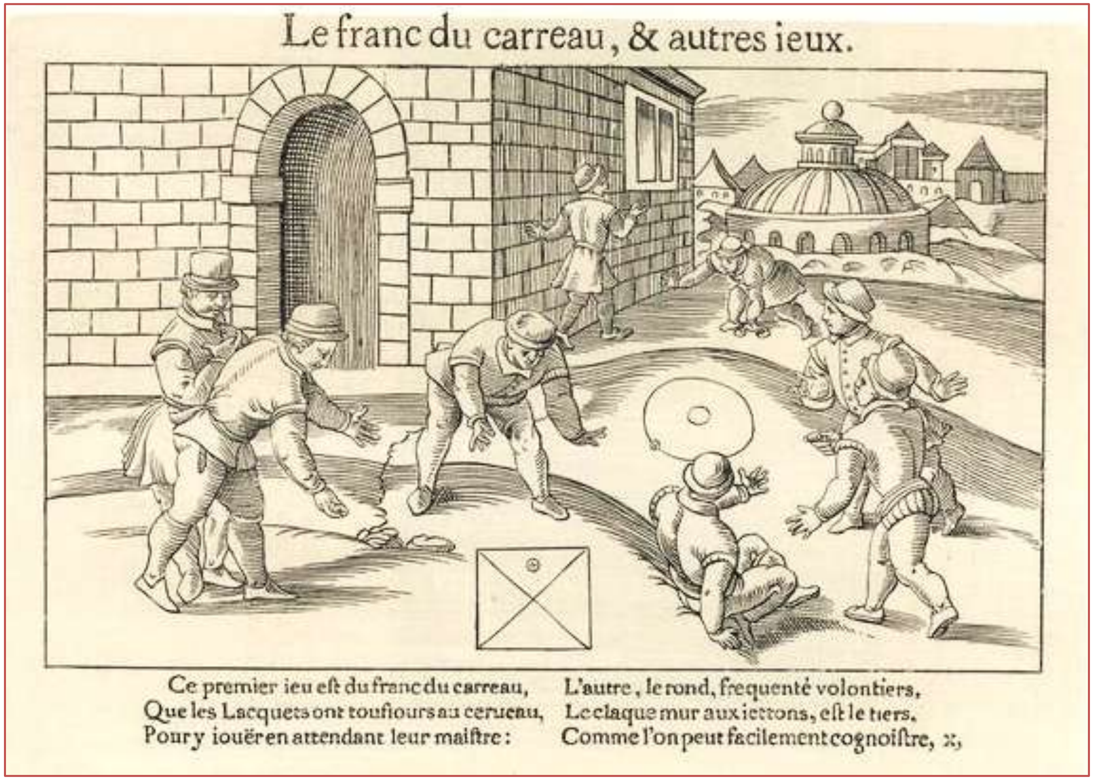
Théorème (J. E. Barbier 1860)

Toutes les formes de largeur constante D ont le même périmètre : π × D.

+ Inégalité Isopérimétrique :

le cercle est la forme de largeur constante D qui a la plus grande surface.

L’aiguille de Buffon

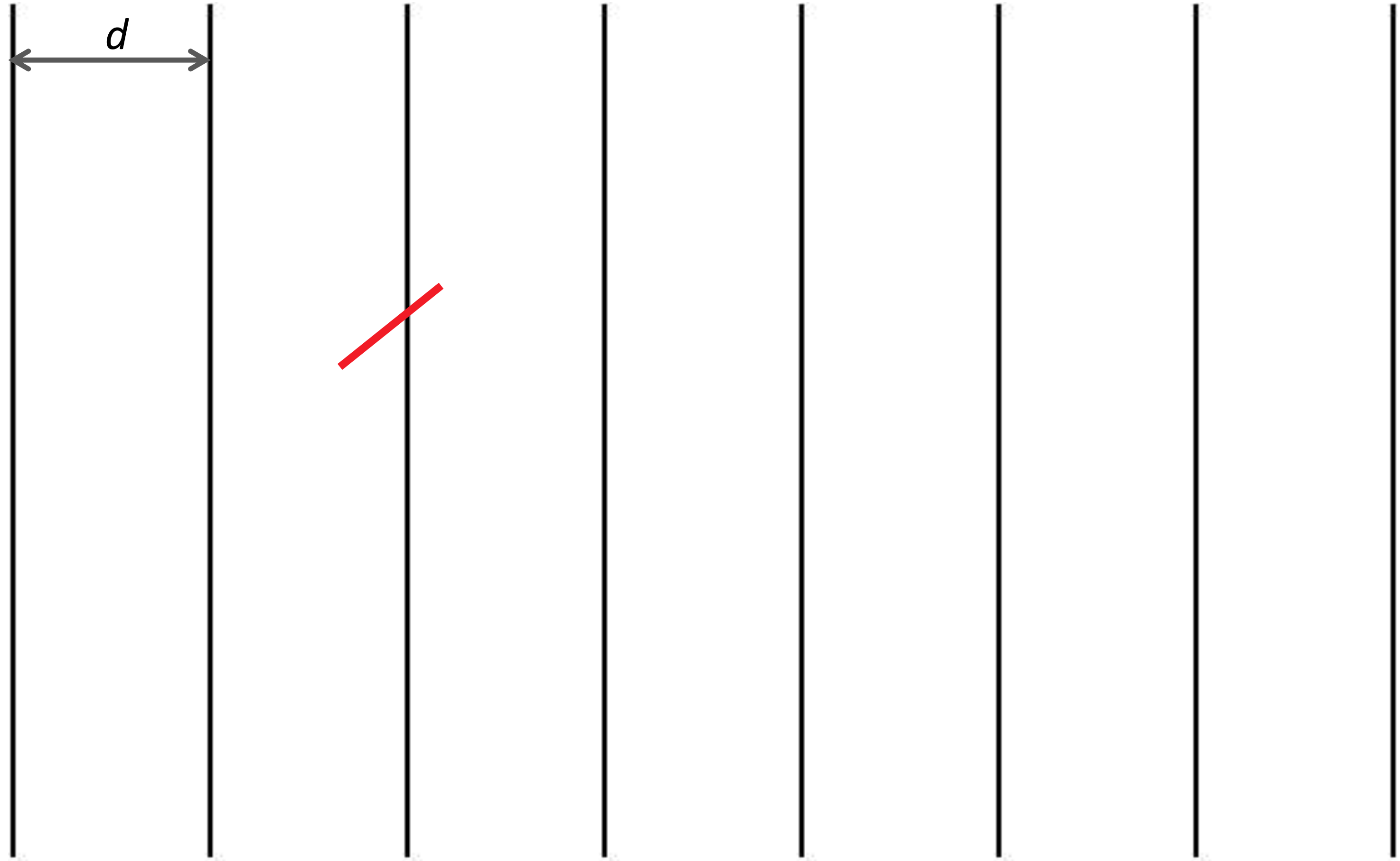


Le franc du carreau, 1587
Guillaume le Bé (1525-1598)

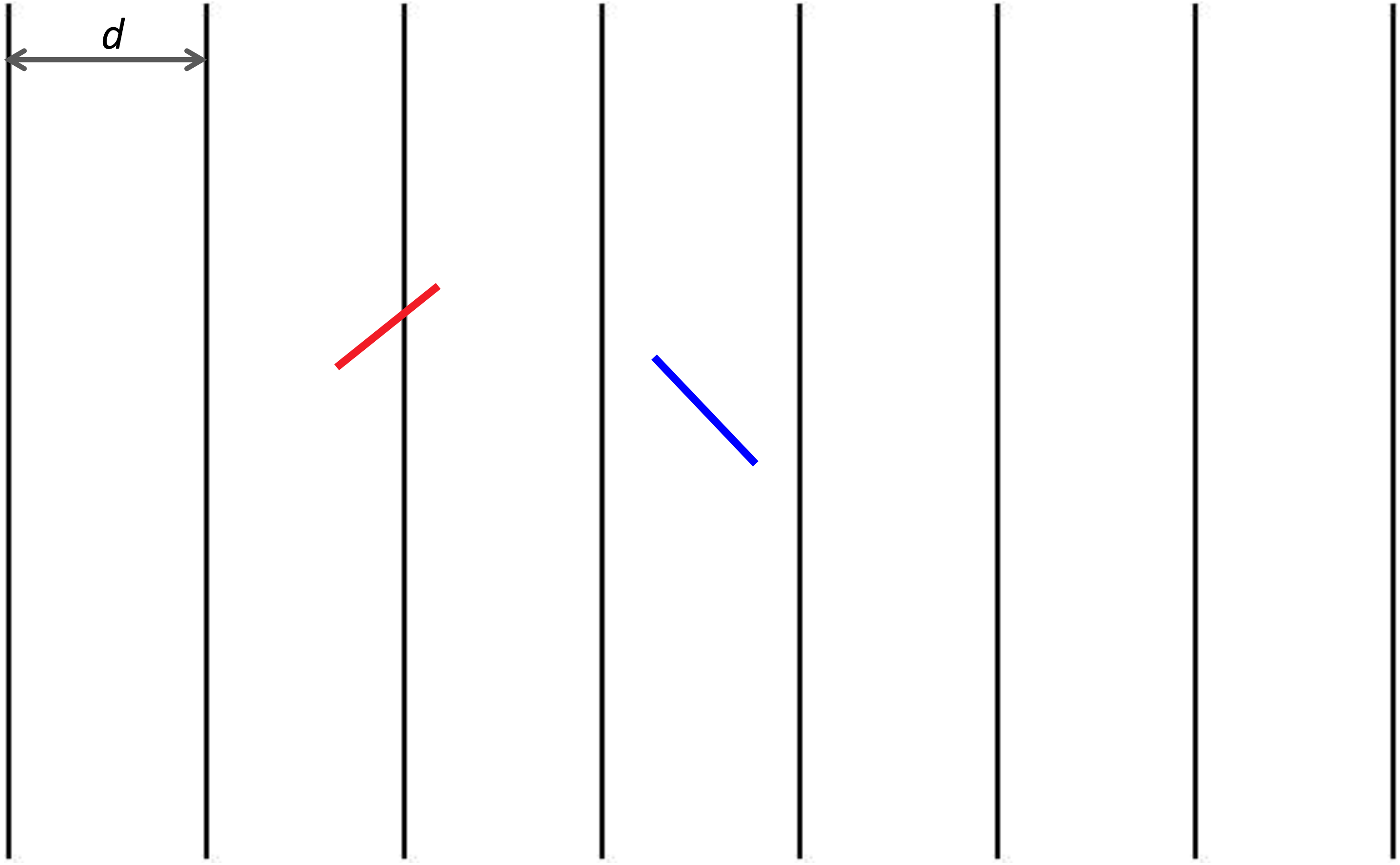
Georges Louis Leclerc
Comte de Buffon
(1707-1788)

Planche le Cochon d’Inde
Histoire Naturelle
Ed. de Leipzig et Hambourg ,1765

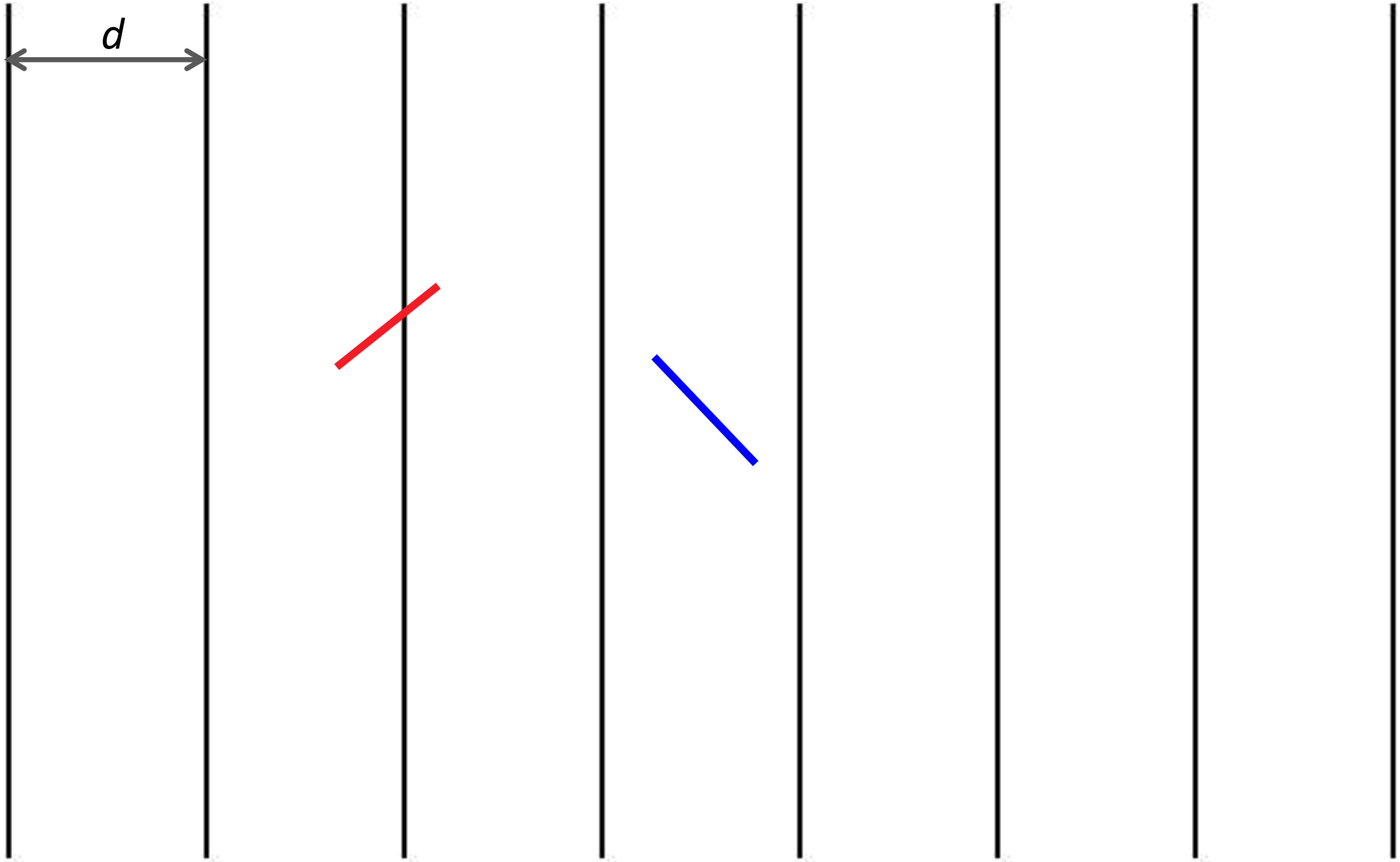
L’aiguille de Buffon



L'aiguille de Buffon ou le problème du joint couvert



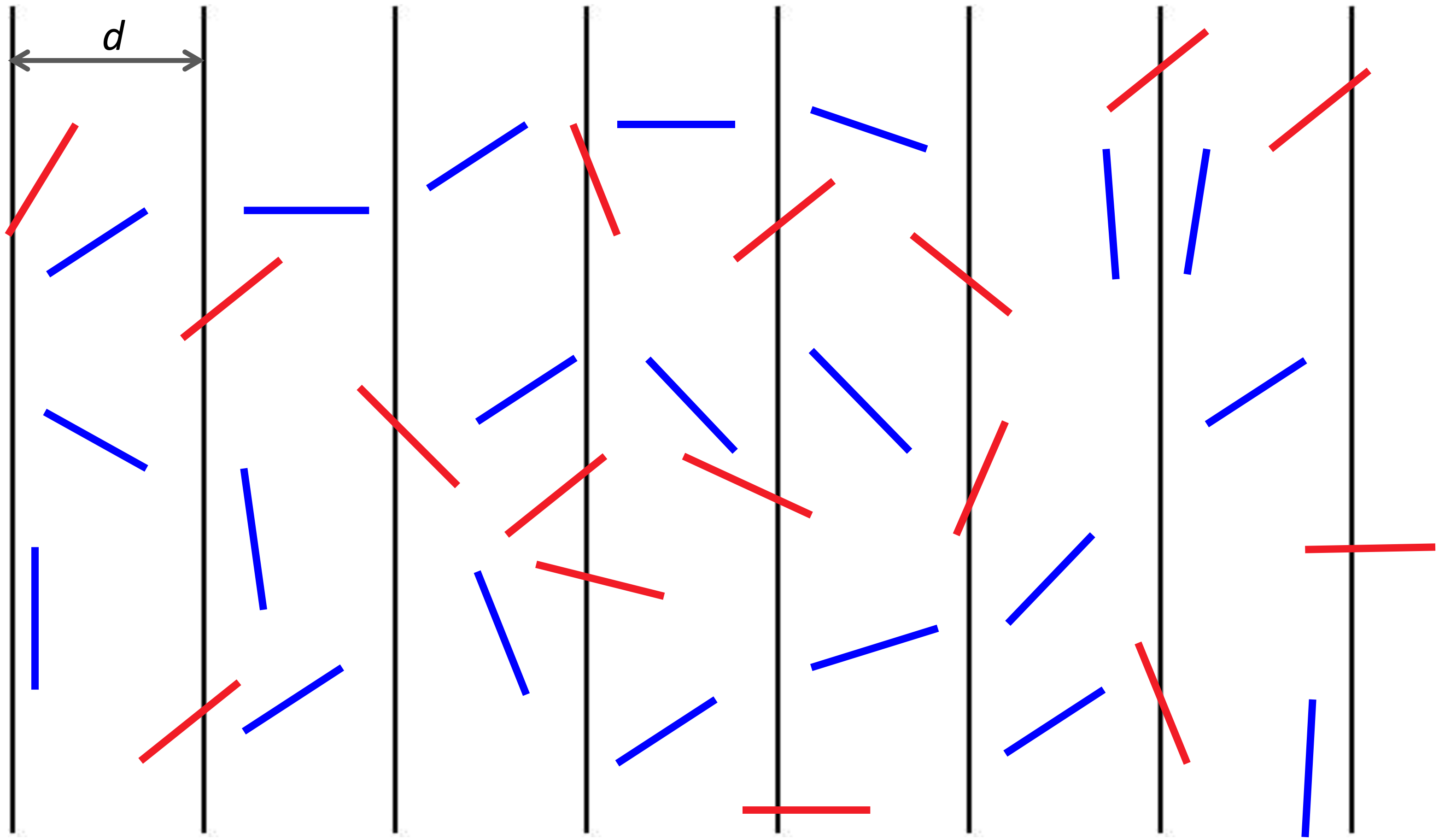
L'aiguille de Buffon ou le problème du joint couvert



$m(\ell)$ = probabilité qu'une aiguille de longueur ℓ couvre un joint.

$m(\ell) = (1\times1 + 1\times0)/2 = 1/2=0,5$

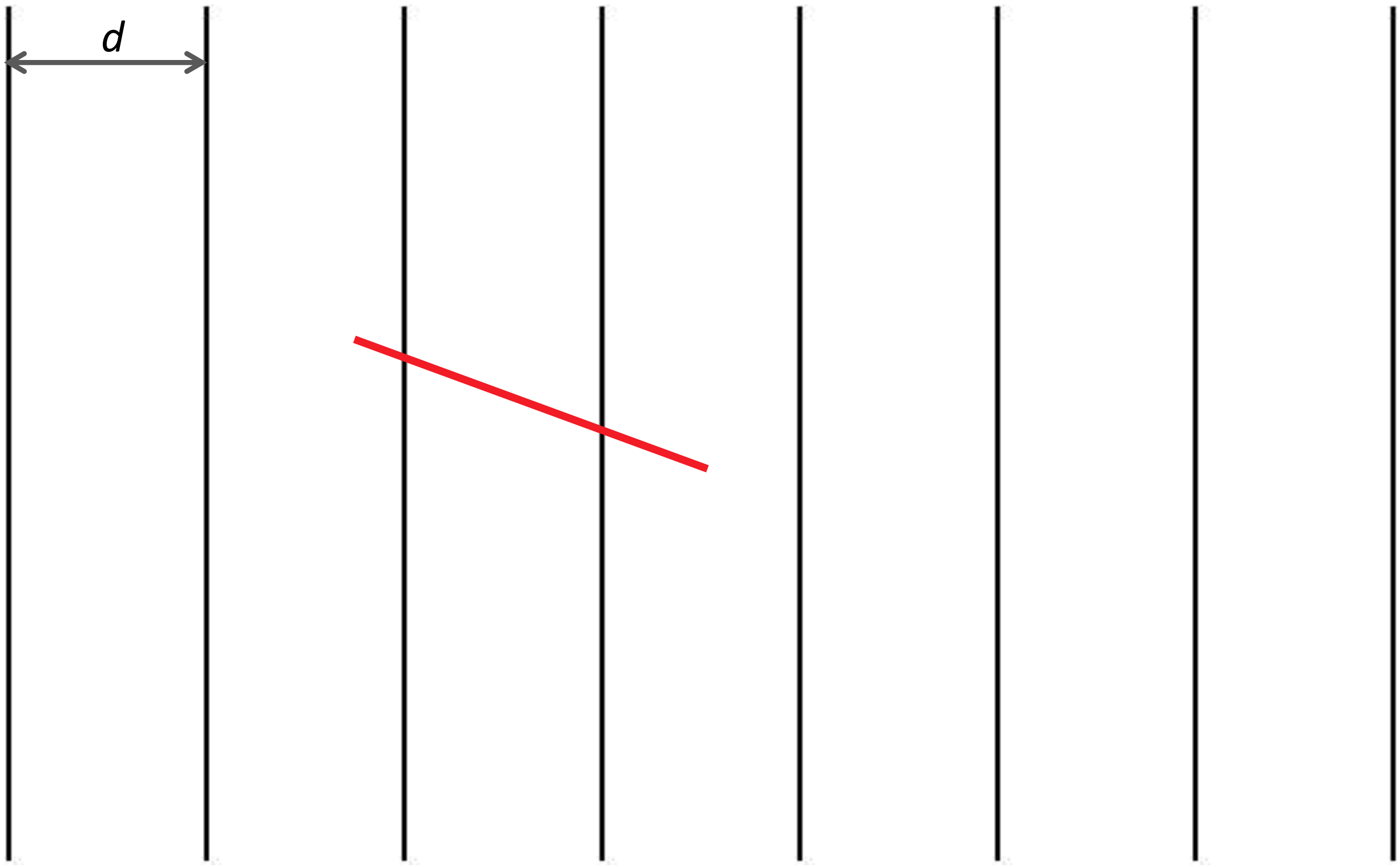
L'aiguille de Buffon ou le problème du joint couvert



m(ℓ) = probabilité qu'une aiguille de longueur ℓ couvre un joint.

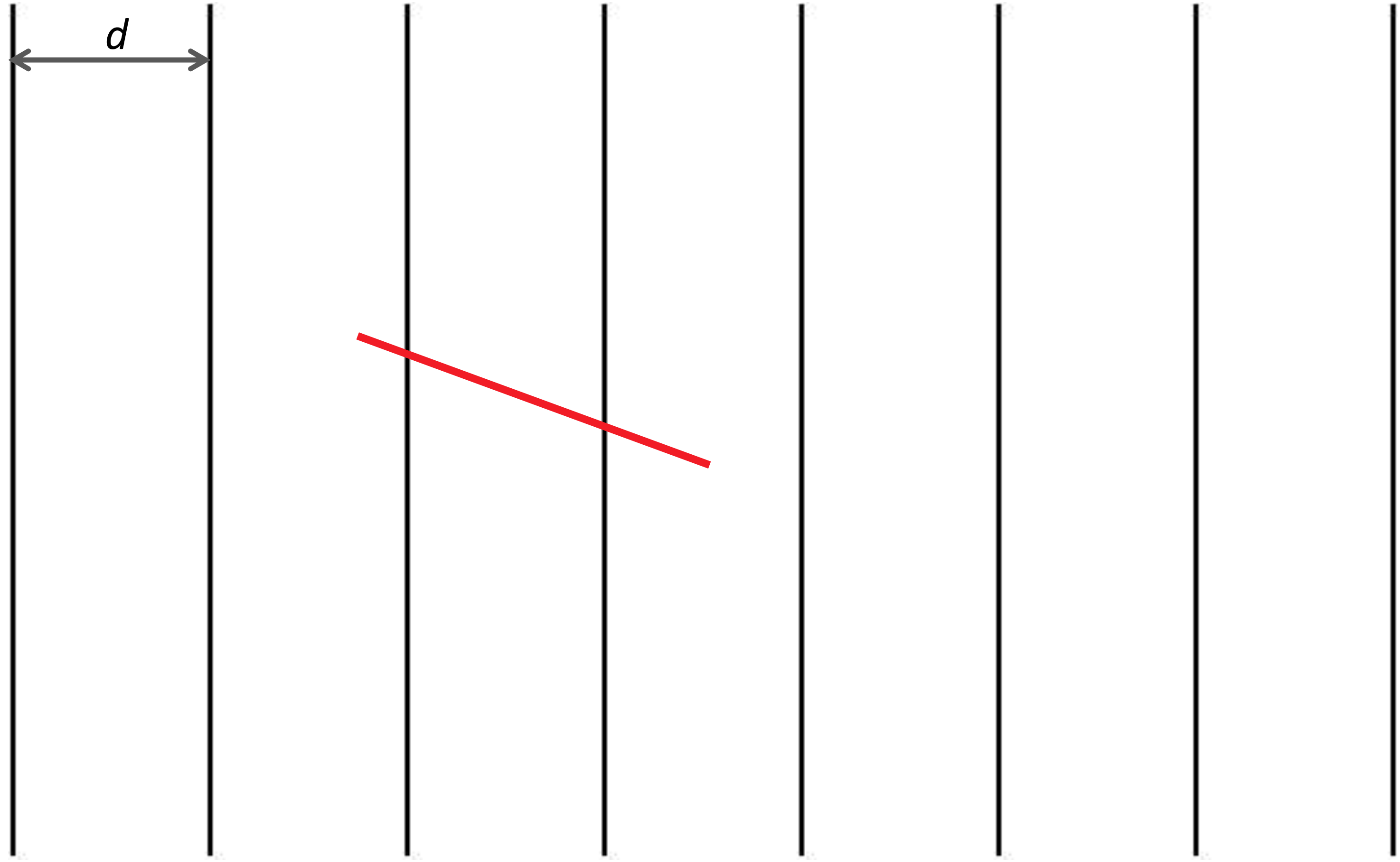
m(ℓ) = (16×1 + 21×0)/37 = 16/37=0,432....

Le cas de l'aiguille longue ($\ell \geq d$)



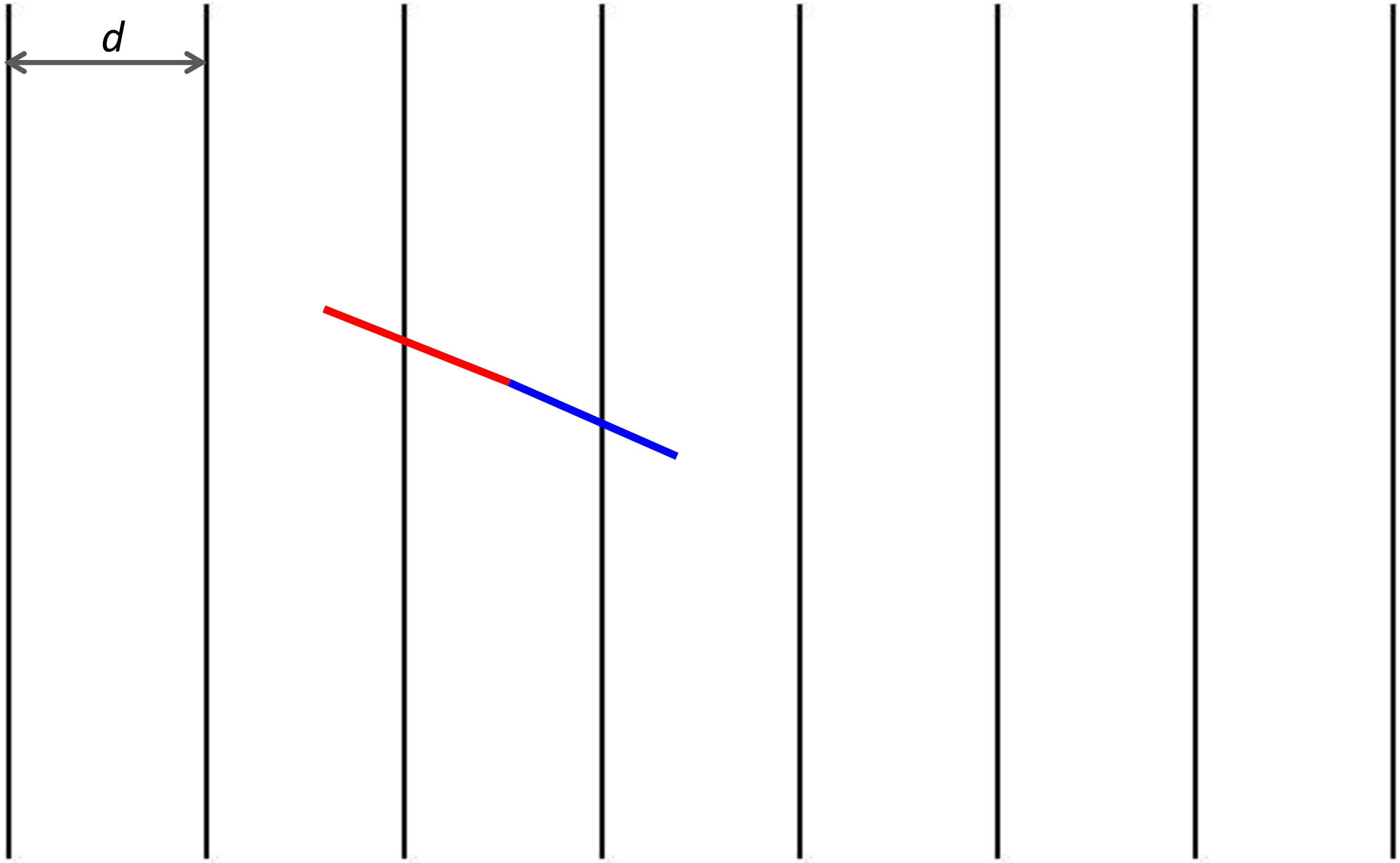
L'aiguille longue peut couvrir plusieurs joints.

Le cas de l'aiguille longue ($\ell \geq d$)



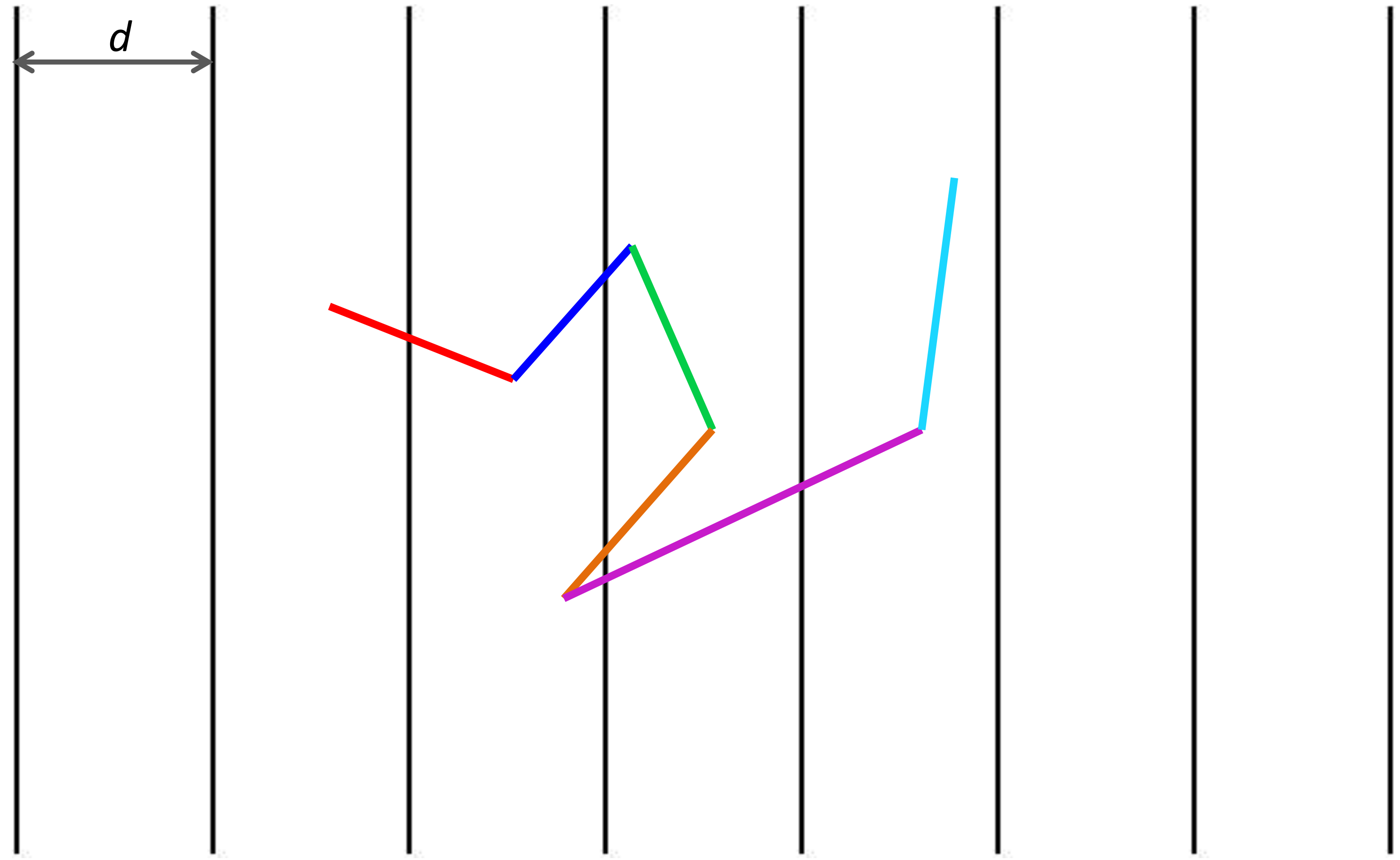
m(ℓ) = nombre moyen de joints qu'une aiguille de longueur ℓ couvre.
(espérance du nombre de joints)

L'aiguille de deux couleurs



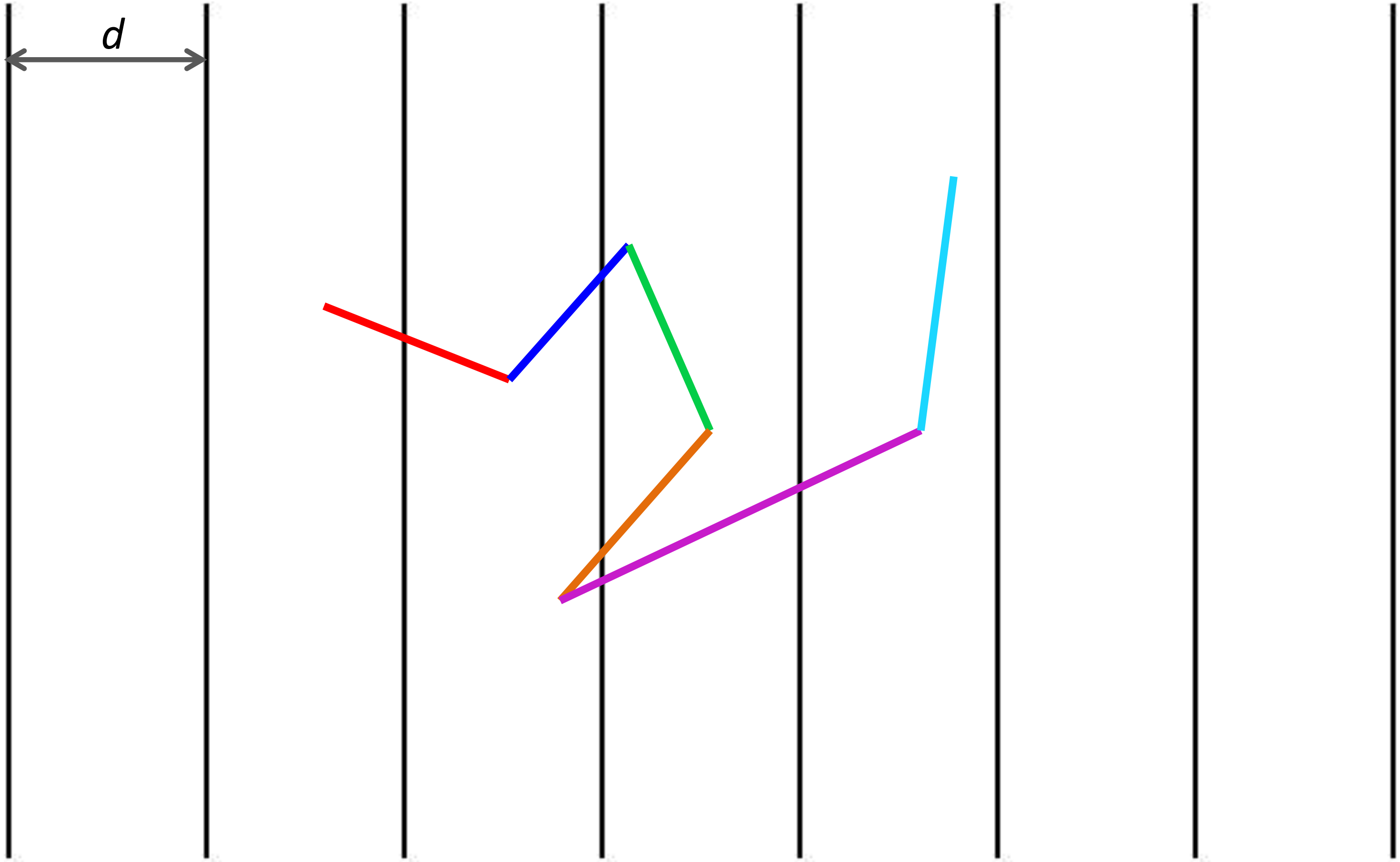
$m(\ell) = m(\ell_1 + \ell_2) = m(\ell_1) + m(\ell_2)$

L'aiguille brisée



$$m(\ell) = m(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 + \ell_6) = m(\ell_1) + m(\ell_2) + m(\ell_3) + m(\ell_4) + m(\ell_5) + m(\ell_6)$$

L'aiguille brisée

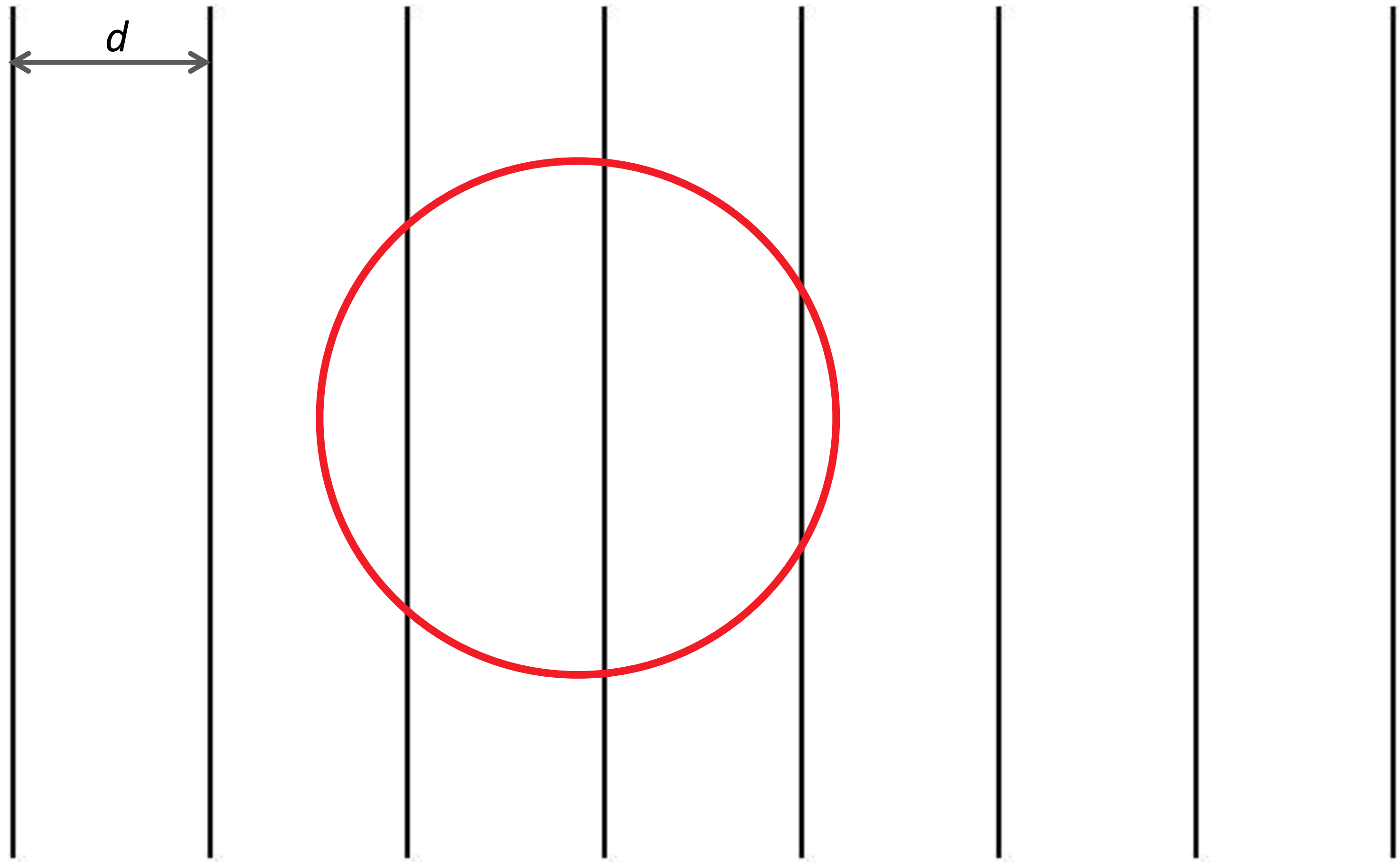


$m(\ell) = m(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ell_5 + \ell_6) = m(\ell_1) + m(\ell_2) + m(\ell_3) + m(\ell_4) + m(\ell_5) + m(\ell_6)$

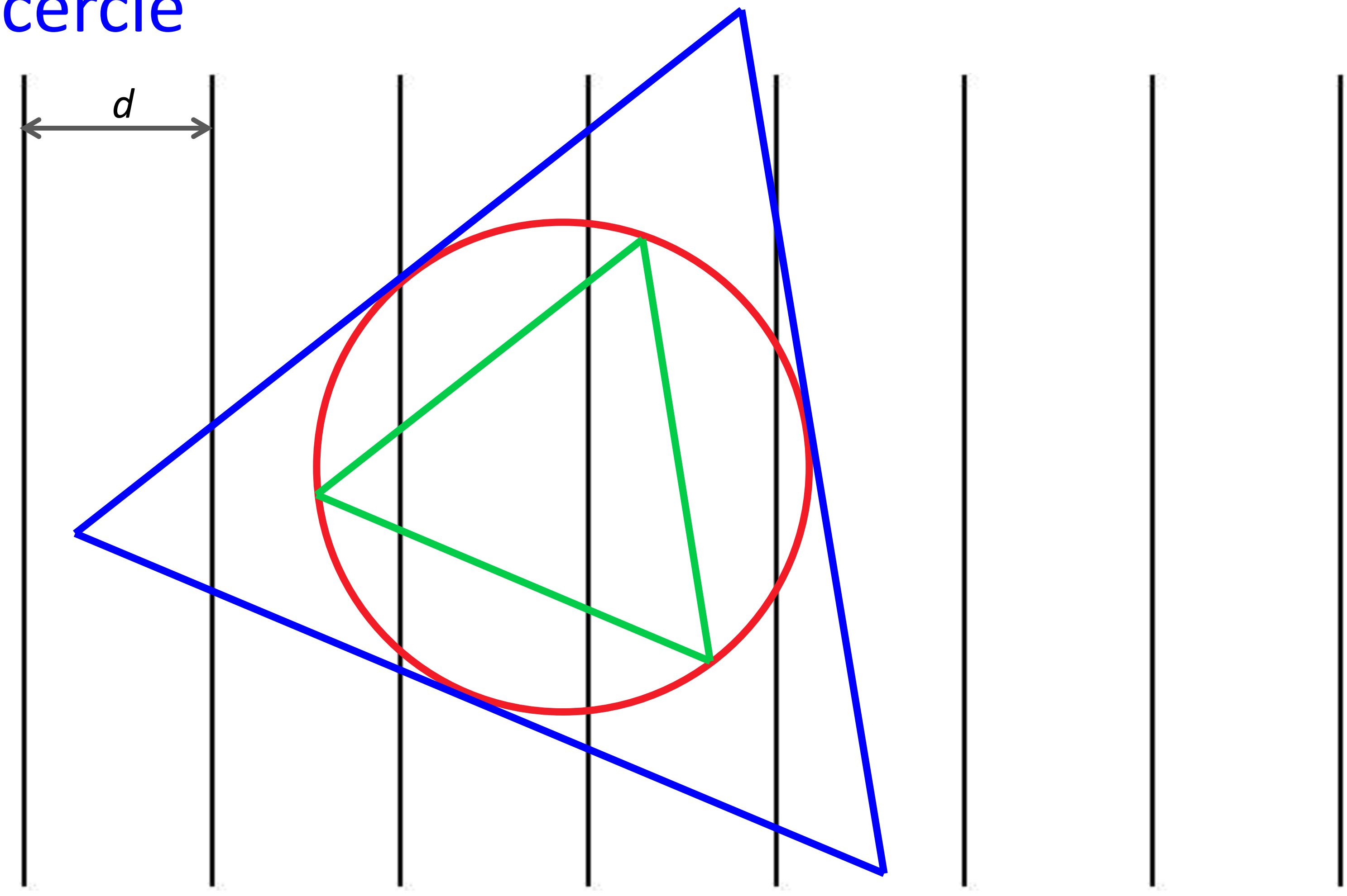
$m(\ell)$ est proportionnel à ℓ

$\boxed{m(\ell) = ? \times \ell}$

Le cercle

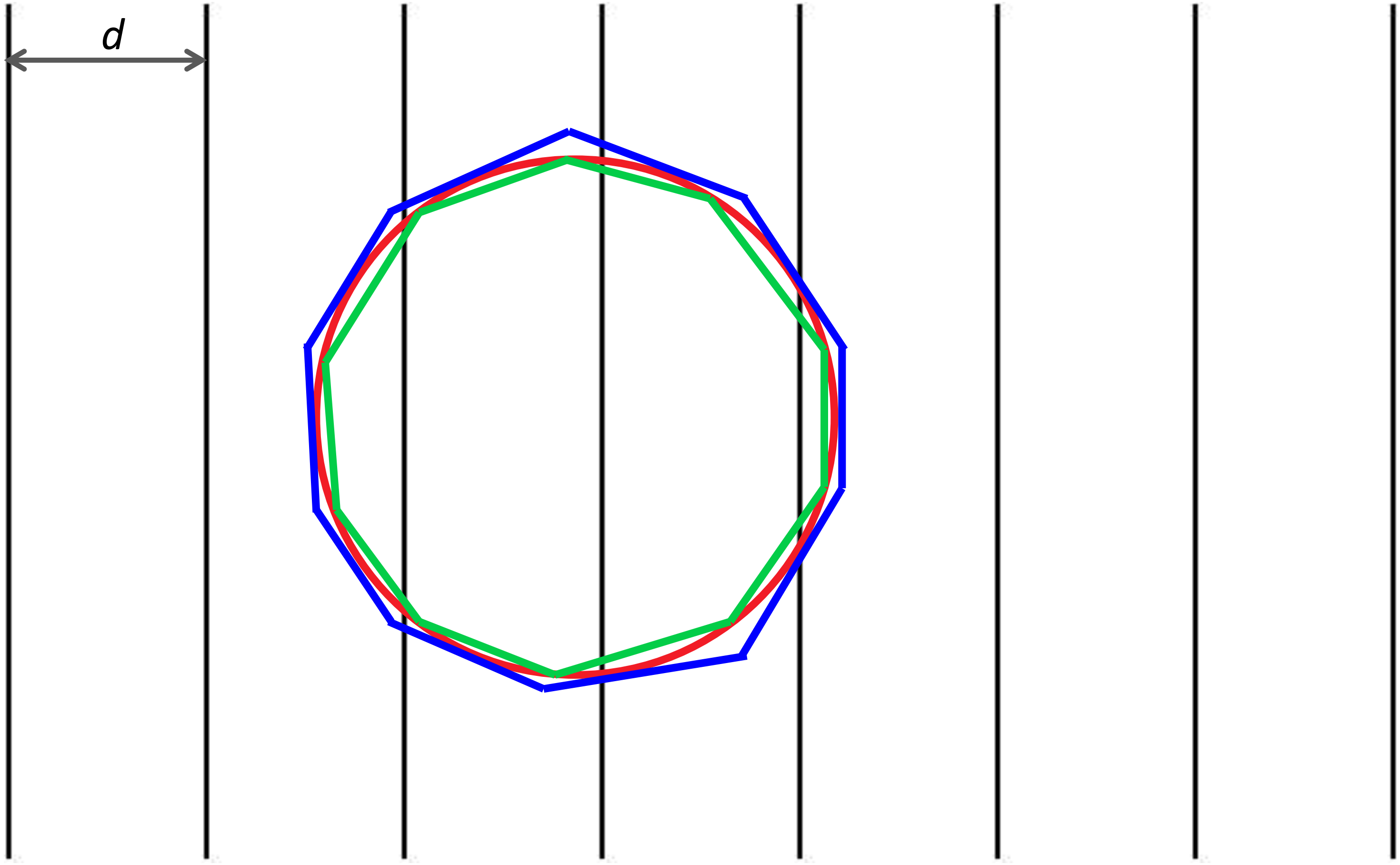


Le cercle



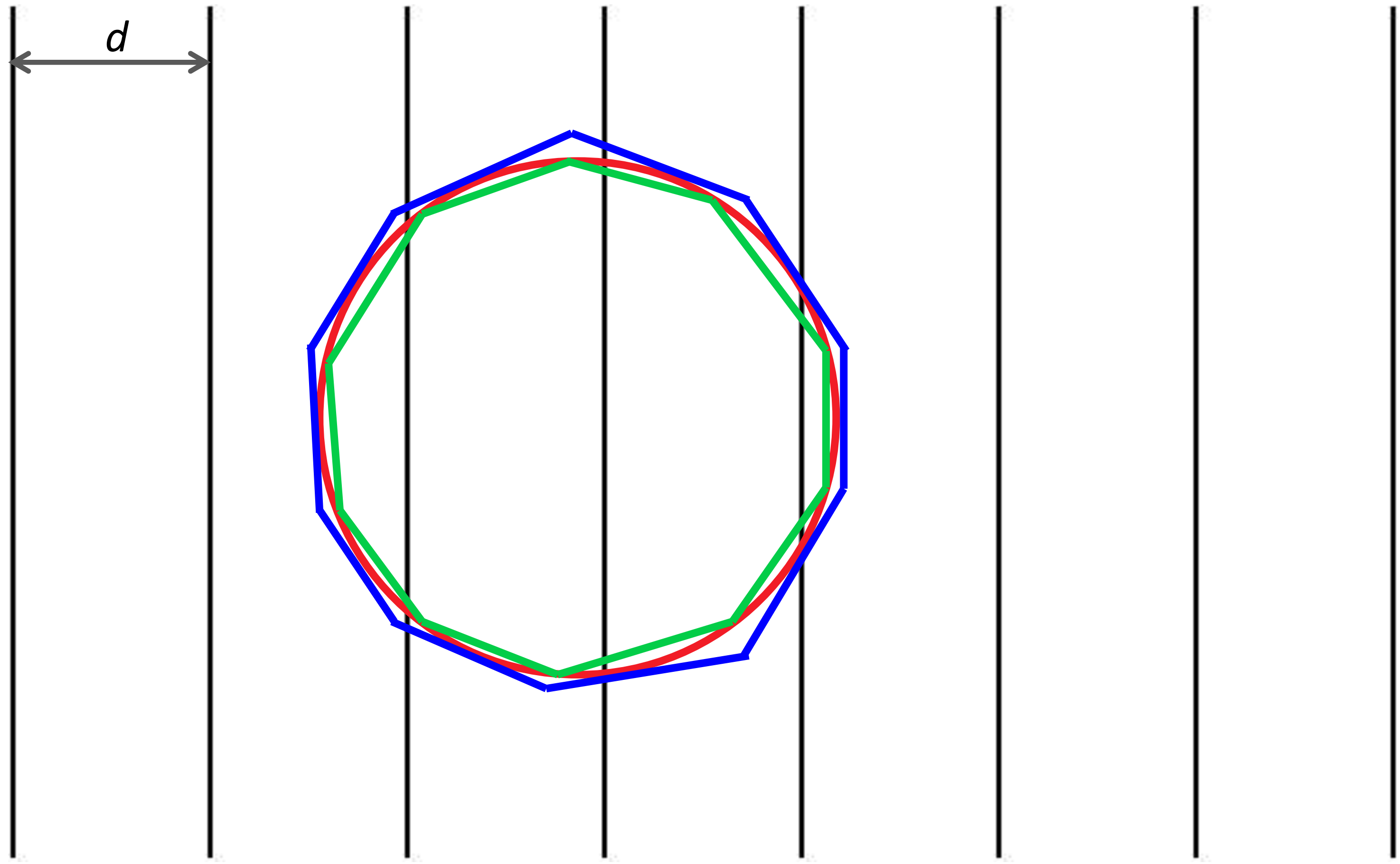
$m(\ell_1) \leq m(\ell) \leq m(\ell_2)$

Le cercle



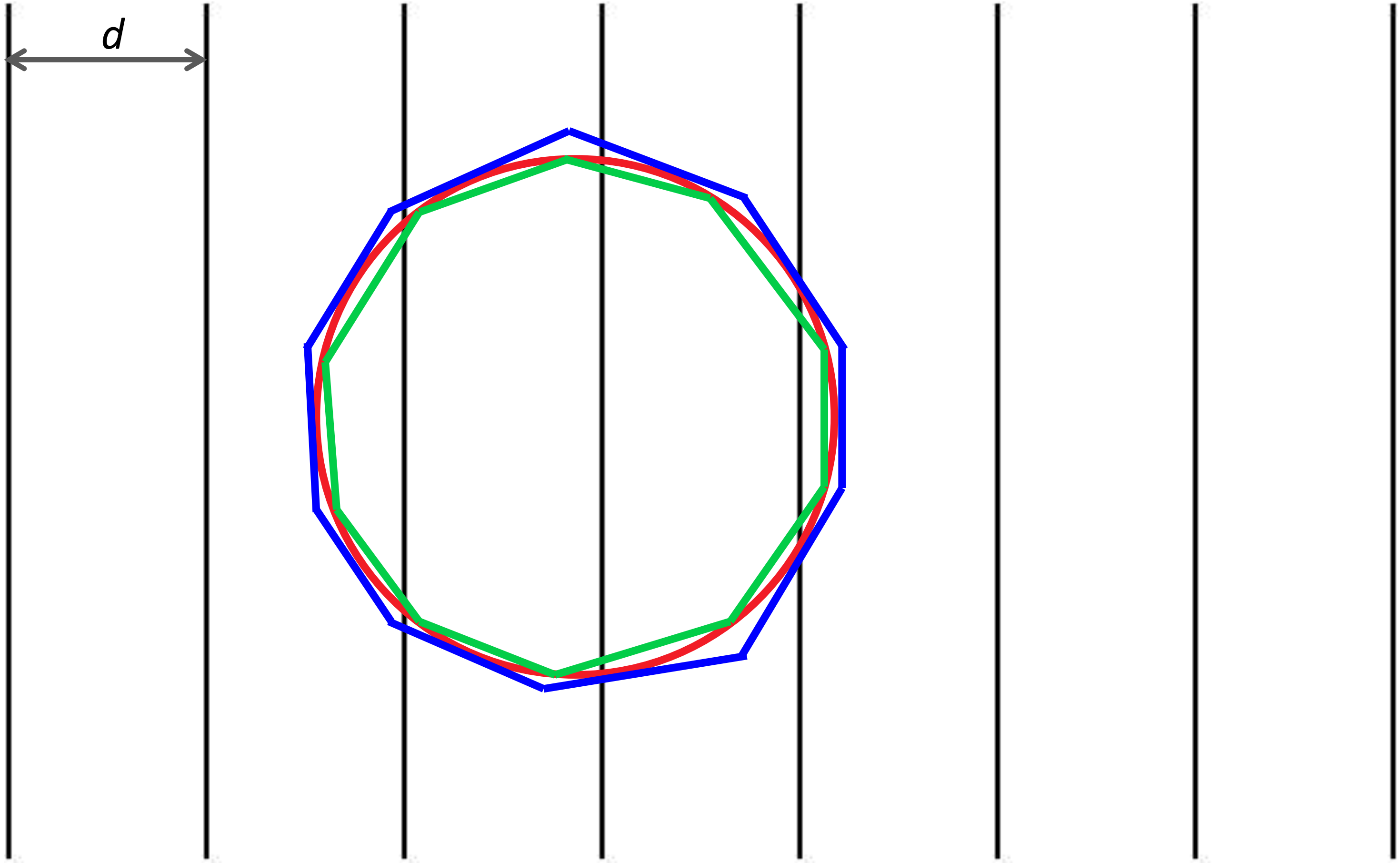
$m(\ell_1) \leq m(\ell) \leq m(\ell_2)$

Le cercle



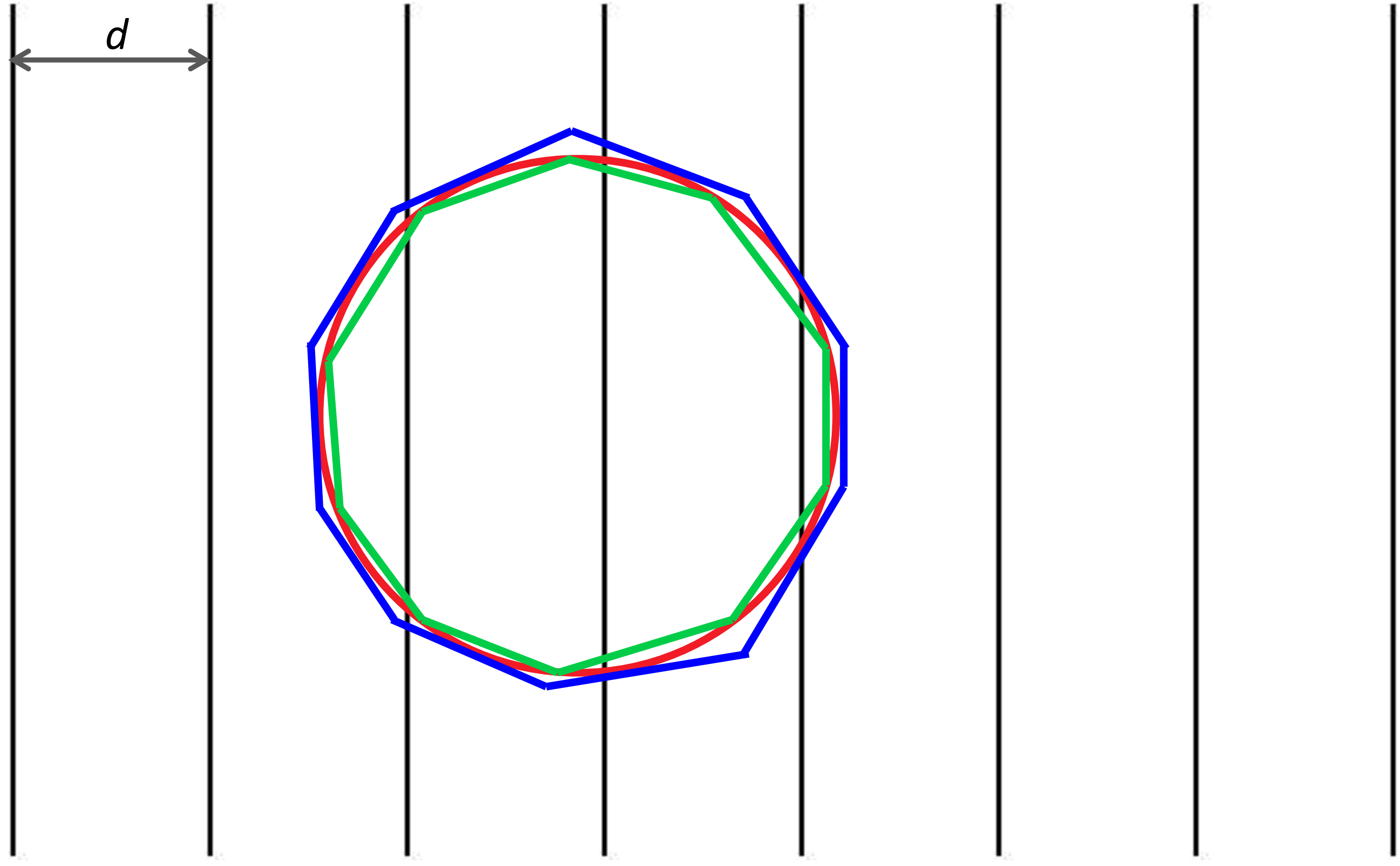
$? \times \ell_1 \leq m(\ell) \leq ? \times \ell_2$

Le cercle



$? \times \ell \leq m(\ell) \leq ? \times \ell$

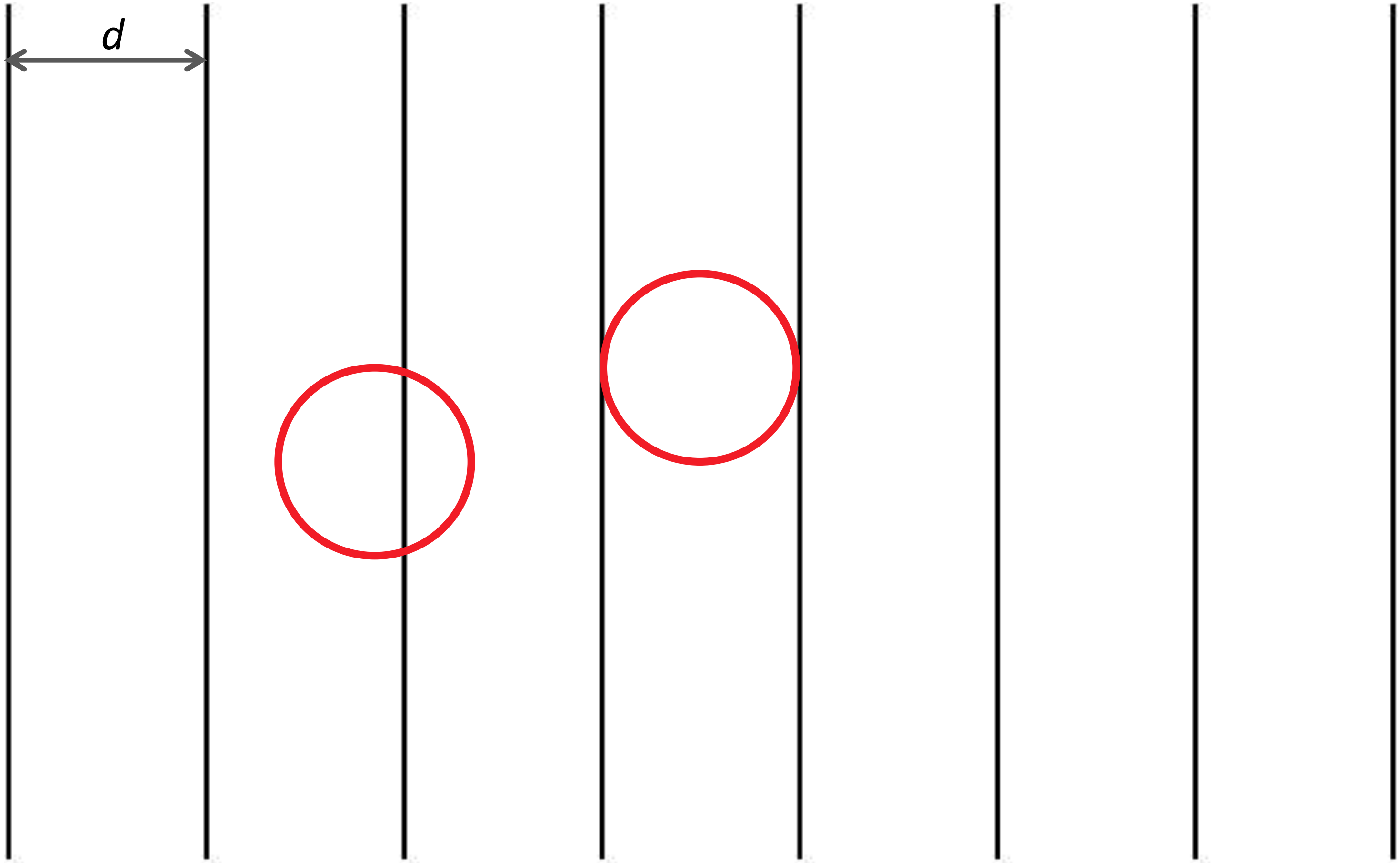
Le cercle



$? \times \ell \leq m(\ell) \leq ? \times \ell$

$$\boxed{m(\ell) = ? \times \ell}$$

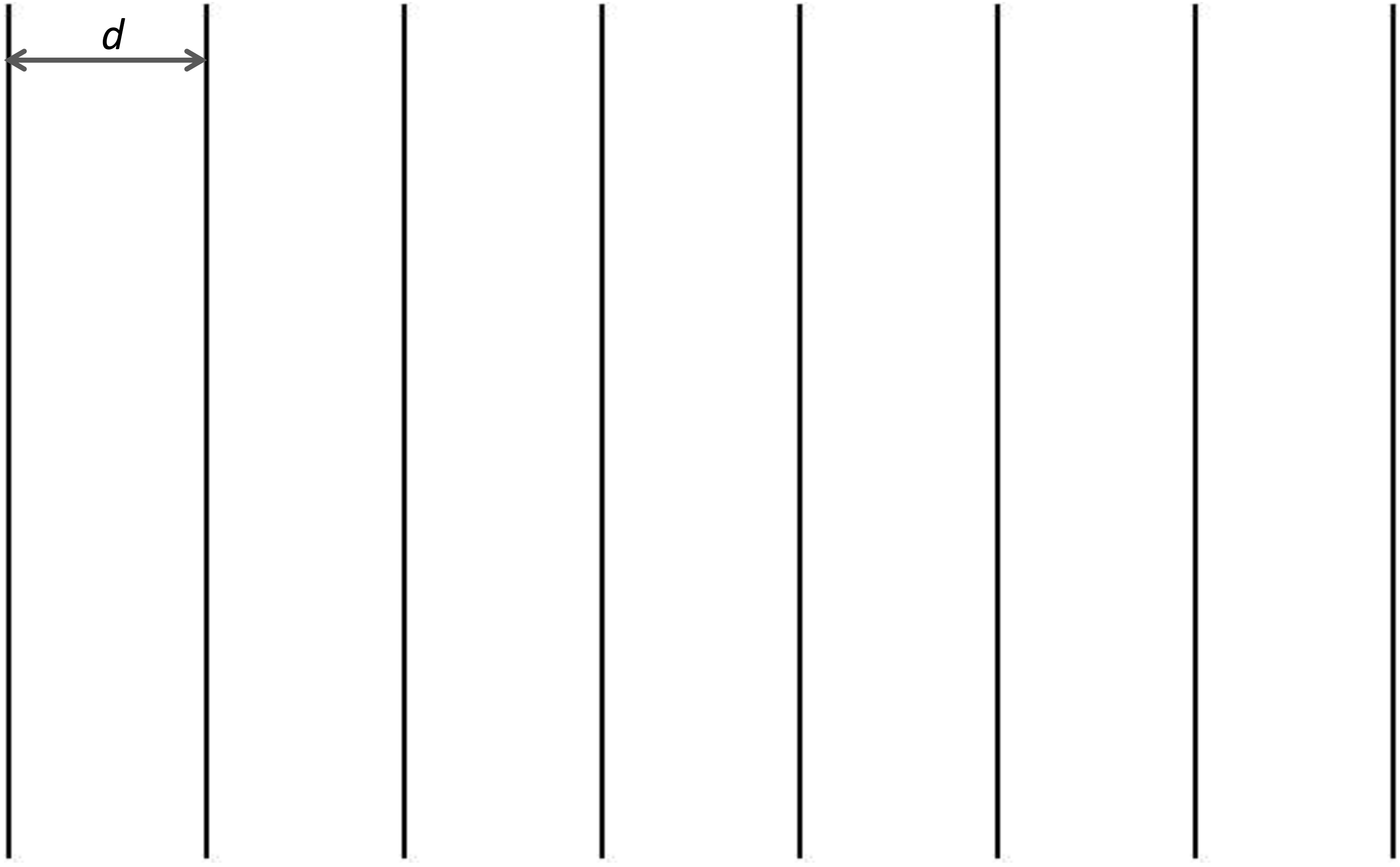
Le cercle de diamètre *d*



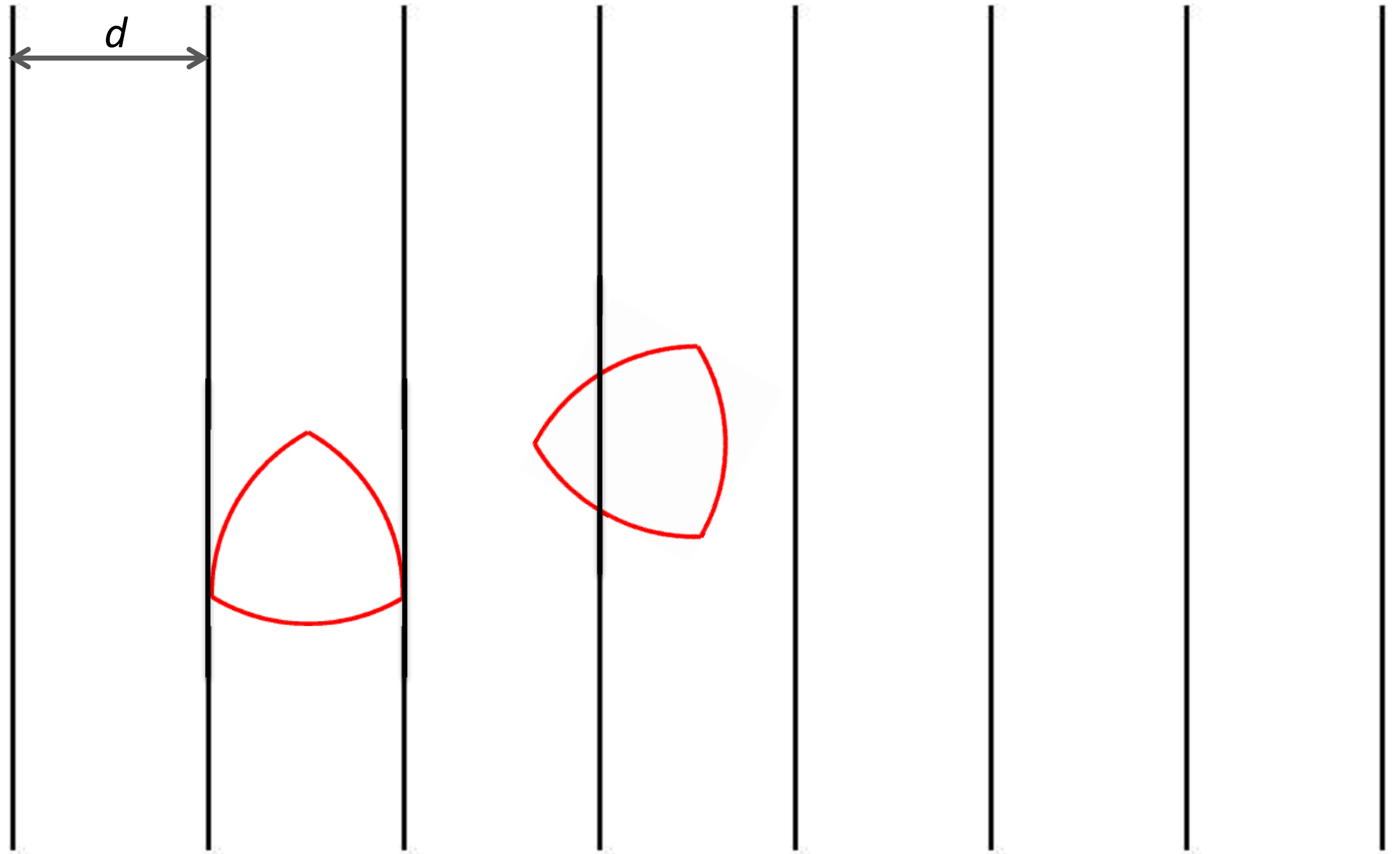
Pour un cercle de diamètre *d*, m(ℓ) = 2 = ? × ℓ

Or $\ell = \pi \times d$.   Donc 2 = ? × π × *d*.   D'où $\boxed{? = 2/(\pi \times d)}$.

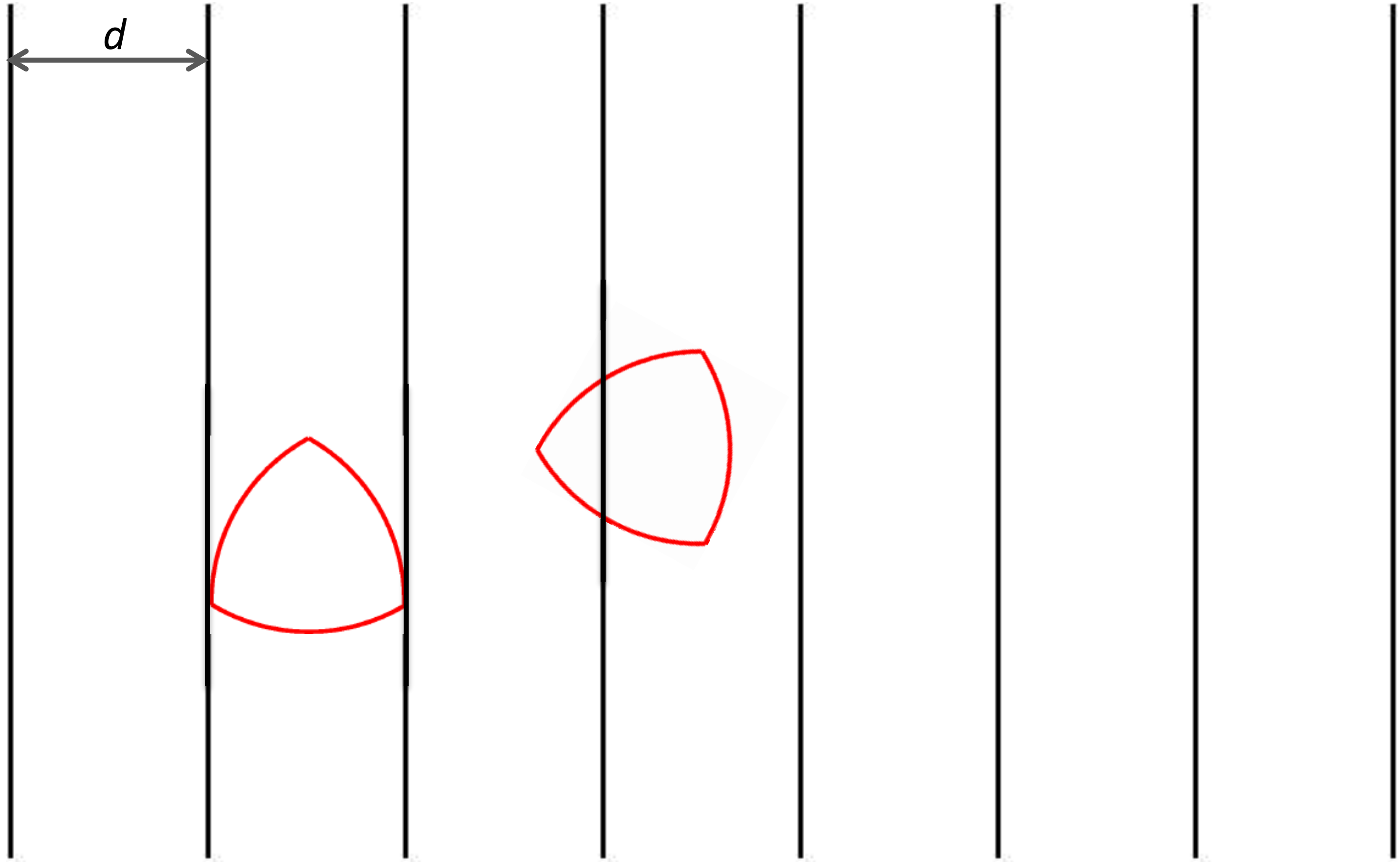
Et pour les formes de largeur constante ?



Et pour les formes de largeur constante ?

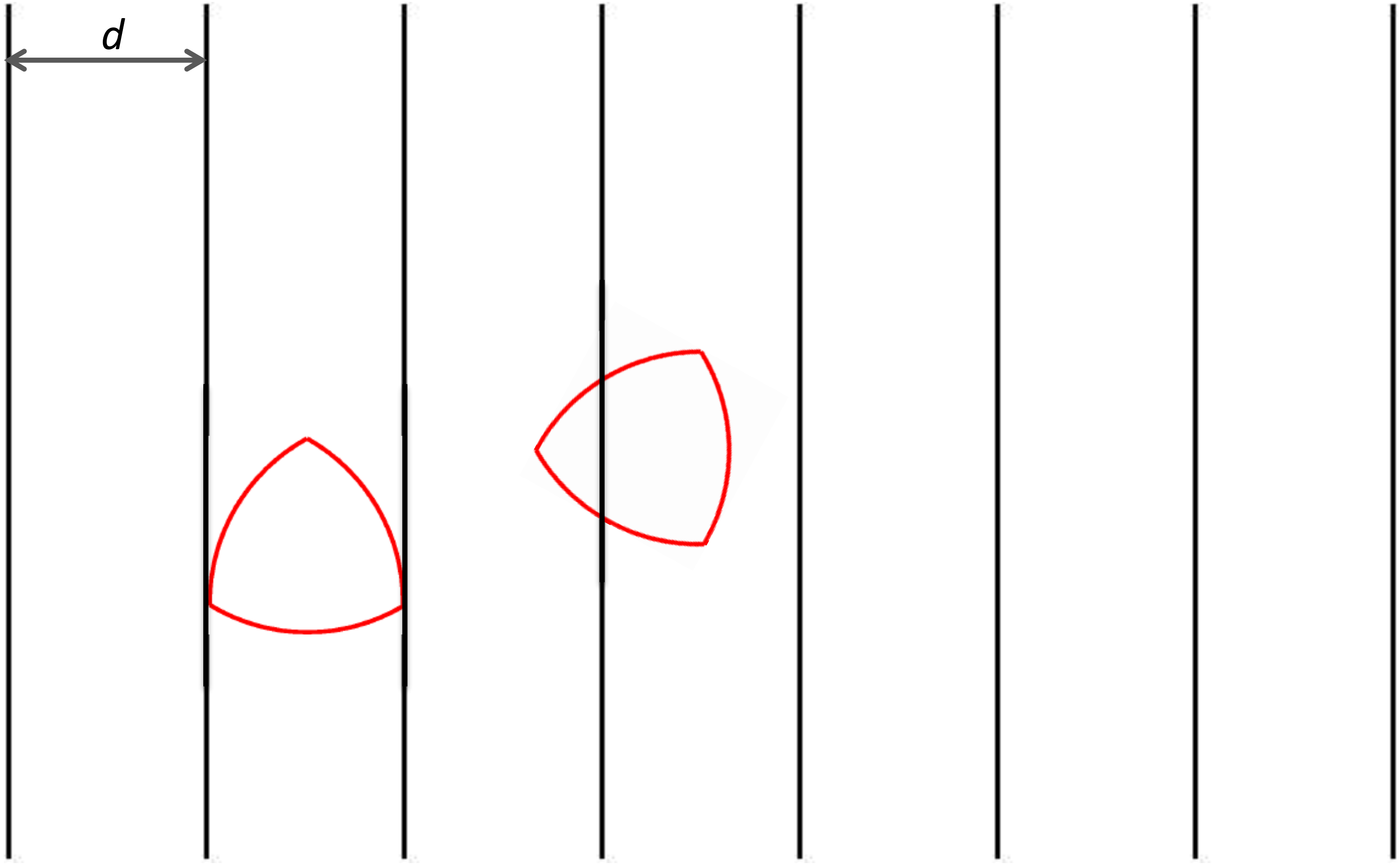


Et pour les formes de largeur constante ?



Pour une forme de largeur constante d, $m(\ell) = 2$.

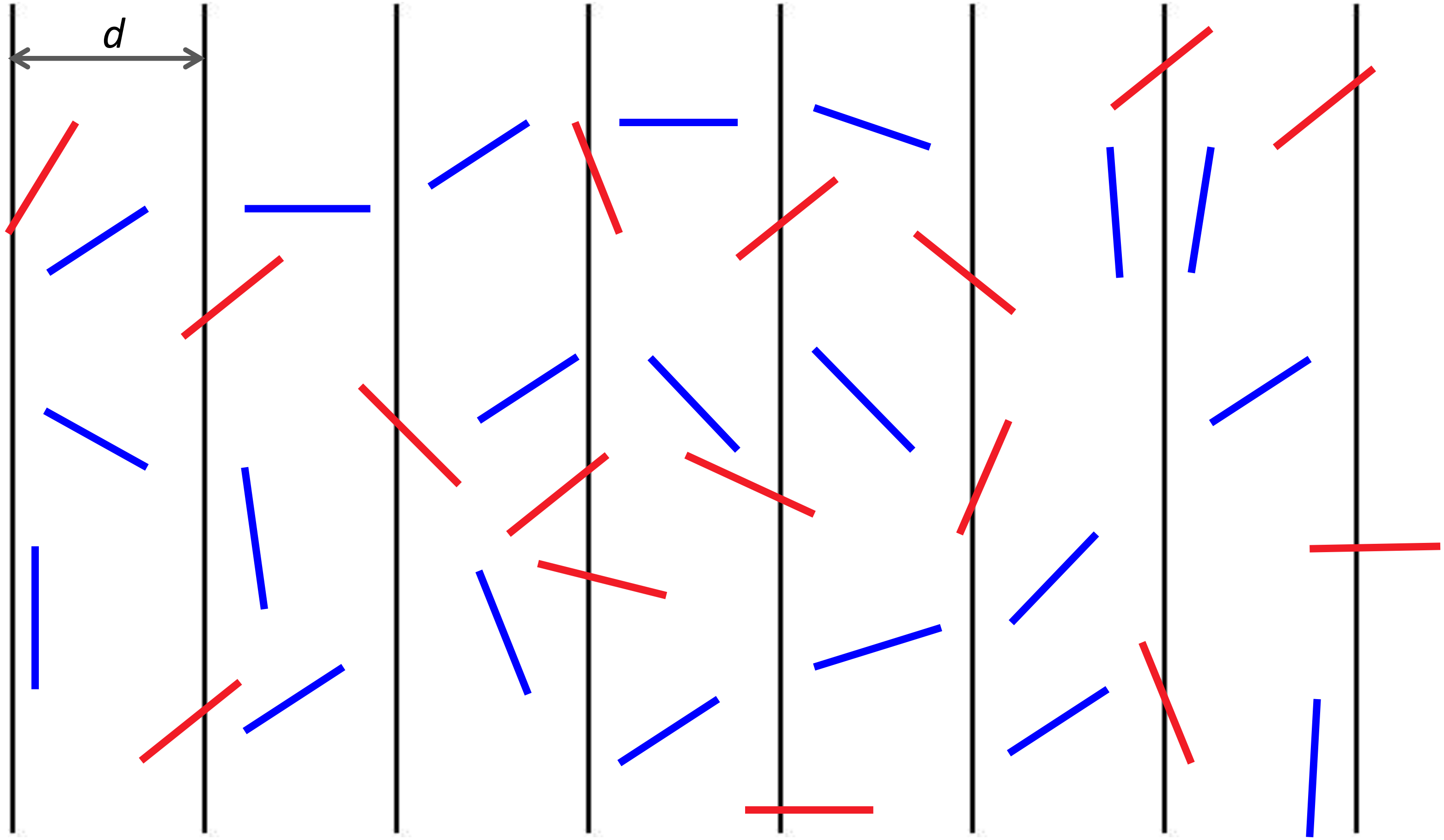
Et pour les formes de largeur constante ?



Pour une forme de largeur constante *d*, $m(\ell) = 2$.

$2 = m(\ell) = ? \times \ell = (2 \times \ell)/(\pi \times d)$. Donc $\boxed{\ell = \pi \times d.}$

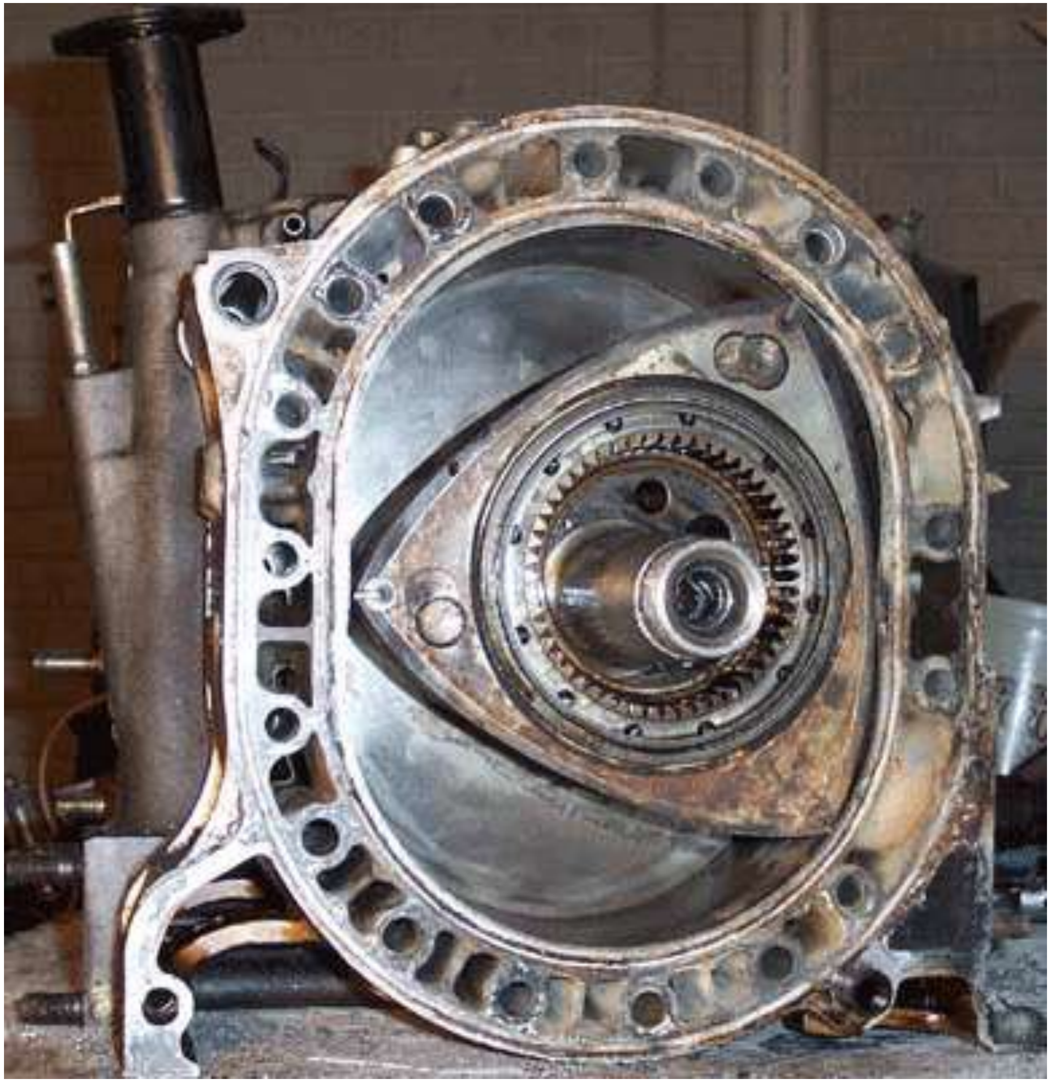
Calculer π en jetant des aiguilles.



$\pi = (2 \times \ell)/(d \times m(\ell))$.

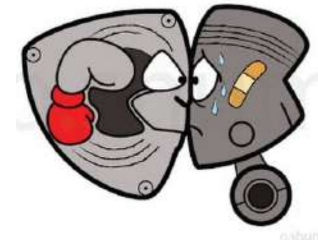
1901 : Lazaroni lancea 34 080 aiguilles et estima $\pi = 3{,}1415929$.

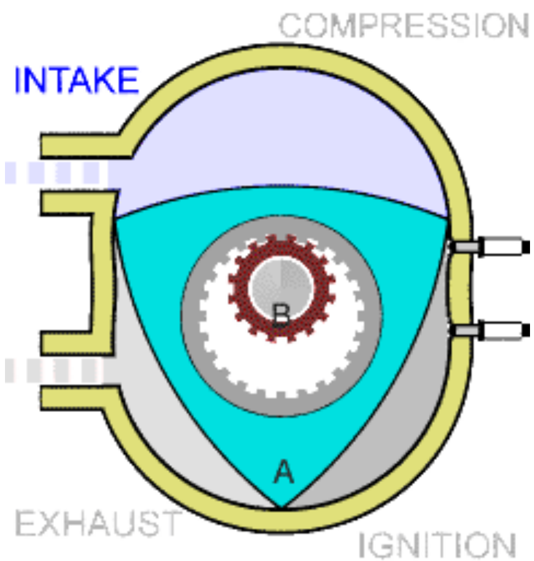
Application : moteur Wankel

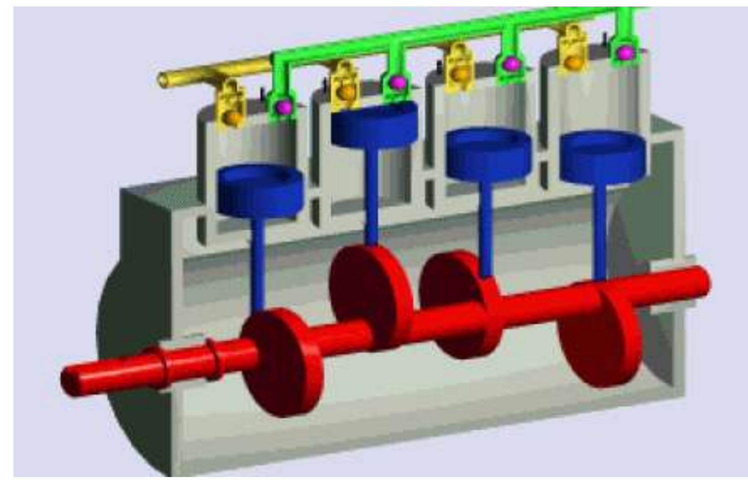


Fonctionnement du moteur Wankel

moteur Wankel vs moteur à pistons







Avantages :

- **peu de vibrations** car pas de va et vient ;
- **moteur plus simple et plus compact**

car pas besoin d'organes de distribution (arbre à came, soupapes) ;

- **réponse rapide aux accélération** car le piston entraine les gaz d'admission ;

Inconvénients :

- **problème d'étanchéité** au niveau des sommets du rotor ;

- **plus grande consommation** ;
- **peu de frein moteur ;**

Succès du moteur Wankel

Mazda a **gagné les 24 h du Mans en 1991** avec une voiture ayant **un moteur Wankel.**
(Mazda 787B pilotée Johnny Herbert, Volker Weidler et Bertrand Gachot)

L'utilisation du moteur Wankel fut interdite après cette course.