



Fiche pédagogique

Activité : Crêpier Psychorigide.

Objectifs pédagogiques : Se familiariser avec la notion d'algorithme. Expérimenter et concevoir des algorithmes. Apprendre à décrire un algorithme de façon formelle et non ambiguë. Assimiler la notion de correction d'un algorithme. Aborder la notion d'algorithme efficace, de complexité.

Notions abordées : Algorithme, algorithme correct, algorithme efficace en temps.

Matériel nécessaire : Des disques (entre 5 et 10 pour commencer, autant que vous voulez ensuite), tous de diamètres différents (il est préférable que les diamètres soient suffisamment différents pour pouvoir identifier facilement le plus grand de plusieurs disques).

1. Ces disques peuvent être en papier, mais une certaine rigidité (en carton, en bois...) est préférable. Pour aller plus loin, les faces des disques peuvent avoir 2 couleurs différentes (par exemple, tous les disques ont une face bleue et une face rouge).
2. Le fait que les formes soient des disques n'est pas primordial mais peut faciliter les choses. En effet, dans un tas de disques superposés à peu près centrés, il est facile de voir si un disque est plus grand qu'un autre et il est immédiat d'identifier le plus grand ou le plus petit des disques. Cela est plus compliqué avec des carrés par exemple lorsque ceux-ci n'ont pas leurs côtés parallèles.

Niveau : À partir du cycle 3.

Durée : D'une quinzaine de minutes en simple découverte rapide à une petite heure si vous avez le temps de laisser les élèves expérimenter et que vous voulez tout expliquer en détail.

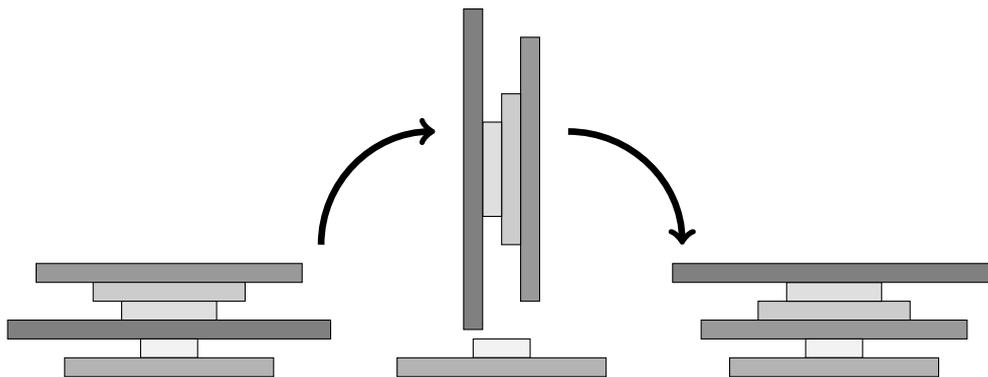
Déroulement :

L'histoire : Un apprenti cuisinier a préparé des crêpes, mais les a empilées n'importe comment. Son chef, psychorigide, veut les ranger de la plus grande (en bas) à la plus petite (en haut). Pour cela, il dispose d'une spatule qu'il peut glisser entre deux crêpes pour retourner complètement le haut de la pile (voir exemple plus bas). Le chef étant également une personne pressée, il veut réordonner les crêpes le plus rapidement possible, c'est-à-dire en utilisant le moins de mouvements possible (un mouvement consiste à glisser la spatule entre deux crêpes et retourner le haut de la pile). Saurez-vous l'aider ?

Ajouter une photo de l'activité

Exemple : Commencez avec 6 crêpes empilées en désordre. Par exemple, de bas en haut, des crêpes de diamètres respectivement 11, 3, 17, 5, 8 et 14 centimètres (cm). Expliquez que le but est de ré-ordonner les crêpes, c'est-à-dire d'obtenir le tas avec les crêpes de diamètres, de bas en haut, 17, 14, 11, 8, 5 et 3 cm (la plus grande crêpe en bas, la plus petite en haut). Selon l'âge, on peut rappeler les notions de diamètre d'un disque, de longueur...

Pour cela, on peut répéter les mouvements suivants. À chaque mouvement, on peut glisser une spatule (une vraie spatule si on en dispose, ou notre main sinon) entre deux crêpes et retourner le tas au-dessus de la spatule. Par exemple, en partant du tas avec des crêpes, de bas en haut, de diamètres 11, 3, 17, 5, 8 et 14 cm et en glissant la spatule entre les crêpes de diamètres 3 et 17 cm et retournant le tas au-dessus de la spatule, on obtient le nouveau tas avec les crêpes, de bas en haut, de diamètres 11, 3, 14, 8, 5 et 17 cm. Voir figure ci-dessous.



Déroulement, phase 1 : Une fois le but et les règles expliqués, donnez à chaque élève (ou par petits groupes) un tas de crêpes désordonnées (entre 5 et 10 crêpes) et laissez-les expérimenter, c'est-à-dire, essayer de réordonner les crêpes en suivant la règle.

Après un temps d'expérimentation, on pourra organiser une période de restitution où chaque groupe/élève testera sa méthode sur un tas de crêpes préparé par d'autres groupes/élèves. En particulier, le but est d'amener les élèves à décrire aussi précisément que possible leur méthode (leur algorithme) et de vérifier qu'elle est correcte (qu'il n'y a aucune ambiguïté, qu'elle donne le résultat attendu quelle que soit la pile de départ...).

Une fois des algorithmes bien spécifiés, on pourra également comparer le nombre de mouvements nécessaires pour chacune des méthodes proposées : sur une même pile de crêpes, y a-t-il des algorithmes plus rapides (qui nécessitent moins de mouvements) que d'autres ?

Déroulement, phase 2 : Une façon de savoir si les algorithmes ont bien été spécifiés est de répéter l'expérience les yeux bandés : vous connaissez le nombre de crêpes mais pas la façon dont elles sont empilées initialement. Vous devez indiquer à une tierce personne (votre apprenti) les étapes qu'elle doit réaliser. Vous pouvez donner des exemples d'instructions qui peuvent être données : « insère la spatule entre les 3e et 4e crêpes de la pile » (il faut expliquer les conventions : par exemple, la première crêpe de la pile peut être la crêpe en dessous de la pile) ou « insère la spatule sous la 2e plus grande crêpe ». À chaque tour, votre apprenti réalise l'action que vous lui avez demandée mais ne vous dit rien. Lorsque vous pensez que le tas de crêpes est bien empilé, dites « stop » et regardez le résultat.

Posez la question de savoir ce qu'il se passe si l'on ne connaît pas le nombre de crêpes.

Un algorithme possible : On appelle n le nombre de crêpes. On commence par placer la spatule sous la plus grande crêpe (et on retourne le tas), puis on place la spatule tout en bas de la pile

(et on retourne le tas). Notons que la plus grande crêpe est maintenant en bas. Puis, on place la spatule sous la deuxième plus grande crêpe (et on retourne le tas) et on place la spatule juste au-dessus de la plus grande crêpe (et on retourne le tas). Les deux plus grandes crêpes sont bien placées... On répète ce procédé n fois. À la i -ème itération, on place la spatule sous la i -ème plus grande crêpe (et on retourne le tas) puis on place la spatule juste au-dessus de la $(i - 1)$ -ème plus grande crêpe et on retourne le tas.

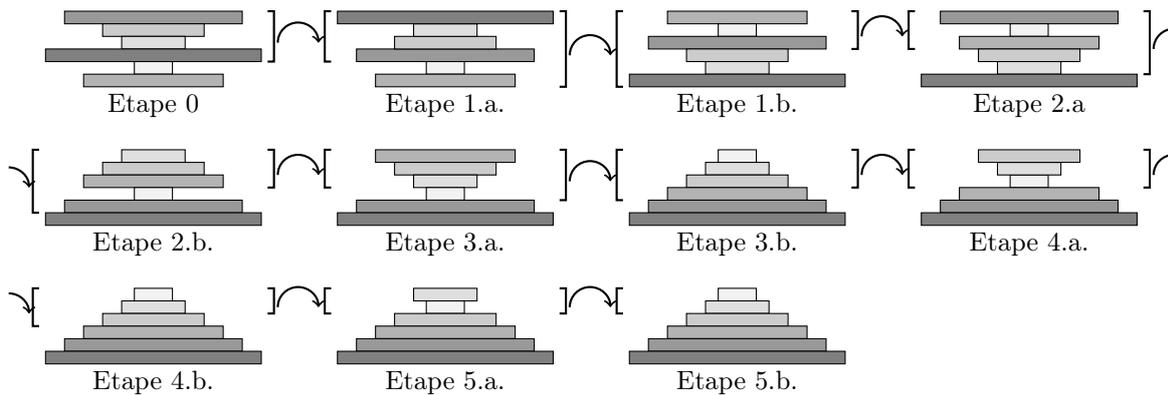
On peut remarquer qu'après la i -ème itération, les i plus grandes crêpes sont bien placées, et donc après $n - 1$ itérations, les $n - 1$ plus grandes crêpes sont bien placées et donc la plus petite l'est forcément. La pile est donc bien ordonnée (et cela a demandé $2(n - 1) = 2n - 2$ mouvements).

Entrée : une pile de n crêpes

Pour i allant de 1 à $n - 1$, faire :

- a. Mettre la spatule sous la i -ème plus grande crêpe et retourner le tas ;
- b. Mettre la spatule sous la crêpe en position i (la position 1 étant le bas de la pile) et retourner le tas.

Un exemple de déroulement de cet algorithme est donné dans la figure ci-dessous. On peut remarquer que même si la pile de crêpes est triée dès l'étape 3.b., l'algorithme continue cependant de s'exécuter jusqu'à la fin.



Aller plus loin : On peut présenter une variante de ce jeu. Dans celle-ci, le maladroit apprenti a brûlé une face de chaque crêpe. Comme dans le jeu précédent, il faut empiler les crêpes de la plus grande à la plus petite, mais en plus, on veut que toutes les faces brûlées soient positionnées vers le bas. Pour la version « à l'aveugle » de ce jeu, on pourra demander à l'apprenti quelle est la couleur de la face visible de la plus haute crêpe.

Conclusion : Il existe de nombreux algorithmes possibles pour obtenir un empilement qui satisfera le chef. En revanche, tous les algorithmes n'utilisent pas le même nombre de retournements. Par exemple, pour un empilement de n crêpes, il est possible de les réordonner en au plus $2n$ mouvements (dans le premier jeu) et au plus $3n$ mouvements (dans le second jeu) mais existe-t-il un algorithme encore plus rapide ?

Autres références :

- https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/fiche-prof-crepier-psychorigide_1558357226034-pdf?ID_FICHE=52380&INLINE=FALSE
- <https://interstices.info/genese-dun-algorithme/>
- https://atelier-canope-19.canoprof.fr/eleve/Formation%20initiale%20et%20continue/Robotique/Activites_debranchees/activities/Activites_debranchees_5.xhtml
- W. H. Gates, C. H. Papadimitriou : Bounds for sorting by prefix reversal. *Discret. Math.* 27(1) : 47-57 (1979)
- M. Heydari and I. Sudborough. On the diameter of the pancake network. *Journal of Algorithms*, 25(1) :67-94, October 1997
- B. Chitturi, W. Fahle, Z. Meng, L. Morales, C.O. Shields, I. Sudborough, and W. Voit. An $(18/11)n$ upper bound for sorting by prefix reversals. *Theoretical Computer Science*, 410(36) :3372-3390, 2009.
- L. Bulteau, G. Fertin, I. Rusu : Pancake Flipping is hard. *J. Comput. Syst. Sci.* 81(8) : 1556-1574 (2015) <https://arxiv.org/abs/1111.0434>

Contact : nicolas point nisse arobase inria point fr