Fiche pédagogique

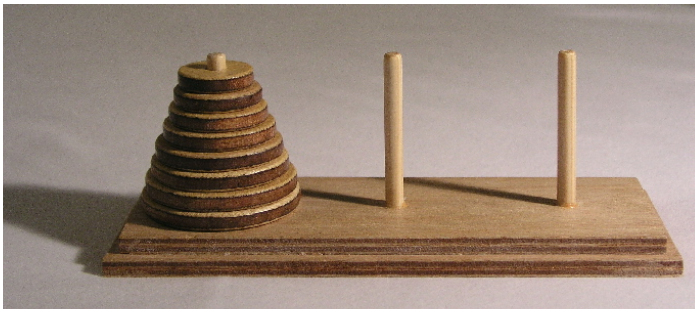
Activité : Les tours de Hanoi.

Objectifs pédagogiques : **Pour tous :** Appliquer des règles précises. Se familiariser avec la notion d'algorithme. Expérimenter et concevoir des algorithmes. Apprendre à décrire un algorithme de façon formelle et non ambigüe. Assimiler la notion de correction d'un algorithme. **Pour les lycéens :** Aborder la notion d'algorithme efficace, de complexité. Algorithmes récursifs, preuve par récurrence, croissance exponentielle.

Notions abordées : Algorithme, preuve de validité, algorithme efficace en temps, récurrence, récursivité, exponentielle.

Matériel nécessaire : Des disques (entre 5 et 10 pour commencer, autant que vous voulez ensuite), tous de diamètres différents (il est préférable que les diamètres soient suffisamment différents pour pouvoir identifier facilement le plus grand de plusieurs disques) et troués en leur centre, ainsi que des piquets (3 pour commencer) sur lesquels on puisse empiler les disques.

1. Ces disques peuvent être en papier, mais une certaine rigidité (en carton, en bois...) est préférable. Pour aller plus loin, on pourra avoir deux ensembles de disques : un rouge et un bleu (donc un disque de chaque couleur et de chaque diamètre).
2. Le fait que les formes soient des disques n'est pas primordial mais peut faciliter les choses. En effet, dans un tas de disques superposés à peu près centrés, il est facile de voir si un disque est plus grand qu'un autre et il est immédiat d'identifier le plus grand ou le plus petit des disques. Cela est plus compliqué avec des carrés par exemple lorsque ceux-ci n'ont pas leurs côtés parallèles.
3. Notons aussi que les piquets ne sont pas indispensables, il suffit de spécifier trois endroits où l'on pourra placer les tours.



Niveau : À partir du cycle 3.

Durée : D'une quinzaine de minutes en simple découverte rapide à une petite heure si vous avez le temps de laisser les élèves expérimenter et que vous voulez tout expliquer en détail.

Déroulement :

Règles du jeu : On dispose 3 piquets (gauche, milieu, droite) et on place les disques (du plus grand en bas au plus petit en haut) sur le piquet de gauche. Le but est de les déplacer dans la même configuration (du plus grand en bas au plus petit en haut) sur le piquet de droite. Les contraintes sont les suivantes :

- on ne peut que déplacer un disque à la fois, et
- on ne peut jamais poser un disque sur un disque plus petit que lui. Voir Figure 1.

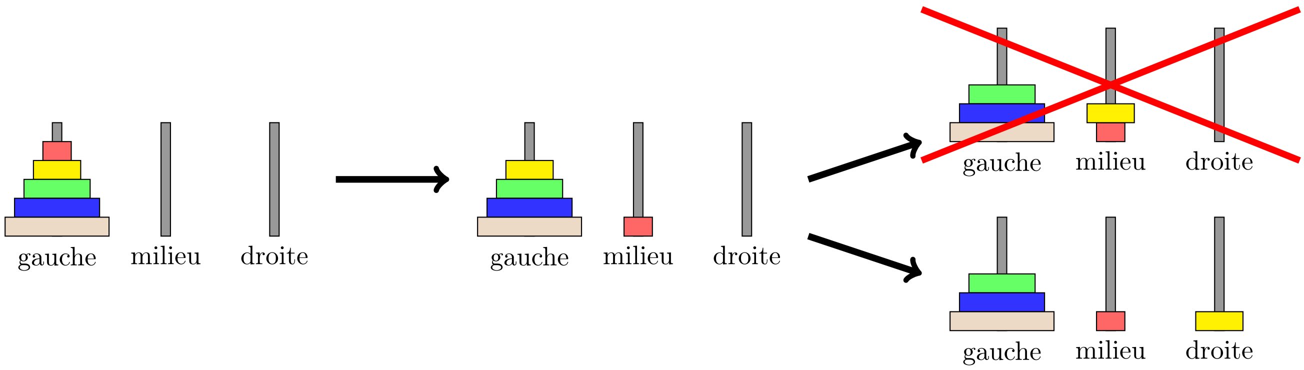


FIGURE 1 – Exemples de mouvements autorisés ou non.

Déroulement, phase 1 : Une fois le but et les règles expliqués, donnez à chaque élève (ou par petits groupes) 3 piquets et 6 disques (de diamètres différents) et laissez-les expérimenter.

Pour les aider, on pourra inciter les élèves à essayer avec moins de disques : 1 ? 2 ? puis 3 ? ...

Après un temps d'expérimentation, on pourra organiser une période de restitution où chaque groupe/élève expliquera sa méthode aux autres groupes/élèves. En particulier, le but est d'amener les élèves à décrire aussi précisément que possible leur méthode (leur algorithme) et de vérifier qu'elle est correcte (qu'il n'y a aucune ambiguïté, qu'elle donne le résultat attendu).

Une fois des algorithmes bien spécifiés, on pourra également comparer le nombre de mouvements nécessaires pour chacune des méthodes proposées : y a-t-il des algorithmes plus rapides (qui nécessitent moins de mouvements) que d'autres ?

On pourra faire remarquer aux élèves que le piquet final n'est pas important : que l'on veuille terminer sur le piquet de droite ou sur celui du milieu, la méthode est "la même" (il suffit d'inverser le rôle des deux piquets milieu et droite).

Déroulement, phase 2 : On répète la phase précédente en ajoutant un but supplémentaire : résoudre le problème le plus rapidement possible (en effectuant le moins de mouvements/mouvements possible).

Un algorithme possible : On appelle n la hauteur de la tour initiale (le nombre de disques). Commençons par décrire l'algorithme pour de petites valeurs de n.

$n = 1$: Lorsqu'il n'y a qu'un disque, c'est très facile : il suffit de déplacer ce disque du piquet gauche au piquet droite (on gagne en un mouvement).

$n = 2$: On déplace le premier disque sur le piquet du milieu, puis le grand disque sur celui de droite et enfin le petit disque (qui est maintenant au mileu) sur le piquet de droite (trois mouvements).

$n = 3$: On déplace le petit disque sur le piquet de droite, puis le second disque sur celui du milieu et le petit disque (qui est maintenant à droite) sur le piquet du milieu. Puis, on déplace le grand disque sur le piquet de droite. Enfin, on déplace le petit disque sur le piquet de gauche, puis le second disque sur celui de droite et le petit disque (qui est maintenant à gauche) sur le piquet de droite (soit un total de sept mouvements).

$n = 4$: La description commence à être fastidieuse. La séquence de mouvements est décrite sur la Figure 2 (quinze mouvements au total).

Une façon de simplifier la description est de présenter l'algorithme de façon récursive. Nous allons décrire un algorithme *récursif*. C'est-à-dire que pour résoudre le problème avec $n > 1$ disques, nous allons utiliser la même méthode mais pour $n-1$ disques. Ainsi, on déplace d'abord $n-1$ disques sur le piquet du milieu (en utilisant l'algorithme pour déplacer $n-1$ disques de gauche au milieu), puis le plus grand disque du disque de gauche au disque de droite, et enfin $n-1$ disques sur le piquet du droite (en utilisant l'algorithme pour $n-1$ disques du milieu à droite).

Par exemple, pour déplacer 4 disques, on déplace d'abord 3 disques de droite au piquet du milieu en suivant la séquence de mouvements décrite plus haut pour $n = 3$ (en inversant les rôles des piquets milieu et gauche) : cela correspond aux 7 premiers mouvements de la Figure 2, puis on déplace le grand disque de gauche à droite (8^{me} mouvement de la Figure 2), et enfin on déplace les 3 plus petits disques du milieu vers la droite en suivant la séquence de mouvements décrite plus haut pour $n = 3$ (en inversant les rôles des piquets milieu et droite), cela correspond aux 7 derniers mouvements de la Figure 2. Notons que cela fait bien $7 + 1 + 7 = 15$ mouvements.

Le pseudo-code de l'algorithme est décrit ci-dessous. Notons que, pour cet algorithme Hanoi(n, A, B, C), les trois piquets sont indiqués par les lettres A (le piquet de départ), B (le piquet auxiliaire) et C (le piquet de destination) puisque le rôle des piquets change au cours de l'algorithme. Ainsi, lorsque l'on applique Hanoi$(n-1, B, A, C)$, le piquet de départ est B et celui d'arrivée est le piquet C. La Figure 3 représente schématiquement l'exécution de l'algorithme récursif.

Hanoi(n, A, B, C)

Entrée : une tour de $n \geq 1$ disques sur le piquet A à déplacer sur le piquet C avec un piquet intermédiaire (milieu) B.

Si $n = 1$ **:** Déplacer l'unique disque du piquet A au piquet C.

Sinon

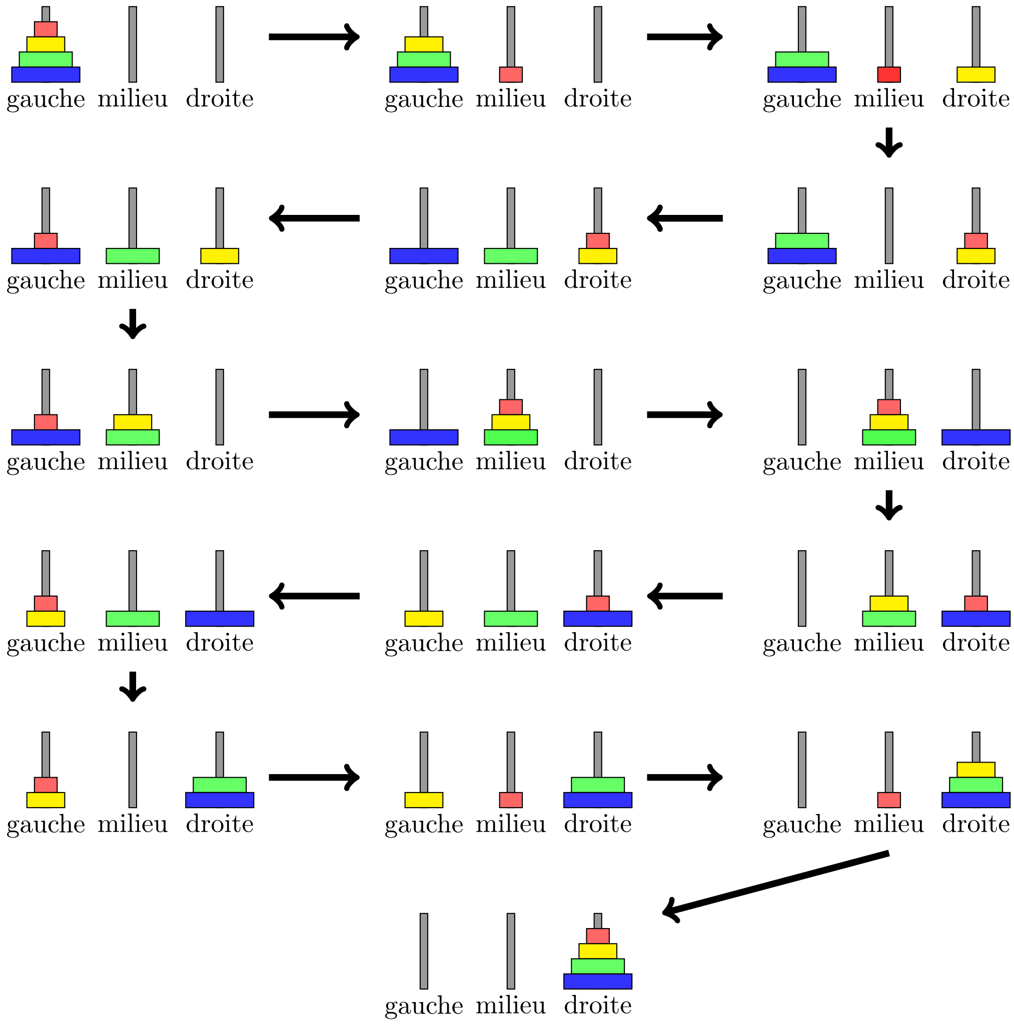


FIGURE 2 – Exemple de stratégie (optimale) dans le cas de quatre disques.

1. Appliquer Hanoi$(n-1, A, C, B)$;
2. Déplacer le plus grand disque du piquet A au piquet C ;
3. Appliquer Hanoi$(n-1, B, A, C)$.

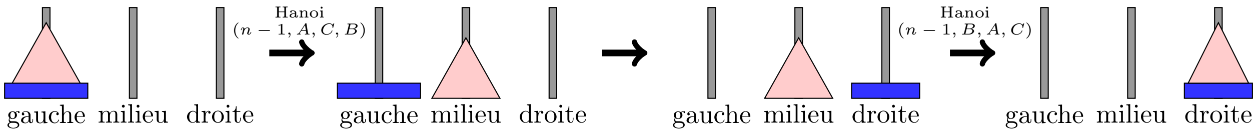


FIGURE 3 – Représentation schématique de l'algorithme récursif dans le cas de $n > 1$ disques. Les triangles roses représentent des tours de $n-1$ disques.

On peut faire exécuter cet algorithme aux élèves et leur demander de compter le nombre de mouvements en fonction du nombre de disques. On obtient les résultats suivants pour les tours ayant jusqu'à dix disques.

nombre de disques	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
nombres de mouvements	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

Pour les plus jeunes, on peut leur demander de remarquer que le nombre de mouvements pour n disques est presque le double du nombre de mouvements pour $n-1$ disques. Par exemple, pour $n = 5$ disques, il faut d'abord déplacer les 4 plus petits disques sur le piquet du milieu (en 15 mouvements), puis déplacer le grand disque sur le piquet de droite (un mouvement) et enfin déplacer les 4 plus petits disques sur le piquet de droite (en 15 mouvements), soit $15 + 1 + 15 = 31 \approx 2 \times 15$ mouvements.

Pour des lycéens, on peut noter u_n le nombre de mouvements pour n disques et vérifier que $u_1 = 1$ et $u_n = 2 \times u_{n-1} + 1$ pour $n > 1$ et prouver par récurrence sur n que le nombre u_n de mouvements pour n disques vaut $2^n - 1$. On peut également leur demander de montrer que cet algorithme est optimal, c'est-à-dire qu'il n'est pas possible de résoudre le problème en moins de mouvements. La démonstration est la suivante et reprend en fait les l'étape de l'algorithme récursif. En effet, pour déplacer la tour de n disques, il faut déplacer le grand disque au moins une fois. Or avant de pouvoir déplacer ce disque, il faut d'abord déplacer la tour des $n-1$ plus petits disques, ce qui nécessite u_{n-1} mouvements. Et après le dernier déplacement du grand disque, il faut remettre la tour des $n-1$ plus petits disques sur le grand disque, ce qui nécessite au moins u_{n-1} mouvements. On a donc besoin d'au moins $2 \times u_{n-1} + 1 = u_n$ mouvements.

Ordres de grandeur : C'est une bonne occasion pour les plus petits de parler de puissance et de grands nombres. Par exemple, pour 10 disques, il faut $2^{10} - 1 = 1\ 023 \approx 1\ 000$ mouvements. Pour 20 disques, il faut $2^{20} - 1 = (2^{10})^2 - 1 \approx 1\ 000^2 = 1\ 000 \times 1\ 000 = 1\ 000\ 000$ mouvements, donc un million de mouvements. Il est difficile de se représenter ce que signifie “un million" de mouvements. Supposons qu'on puisse effectuer un déplacement de disque par seconde. Alors (sans manger, ni dormi, ni se reposer), il faut un million de secondes pour résoudre le problème pour 20 disques : cela représente environ 12 jours et demi (faite faire le calcul de la durée de résolution pour 20 disques si on déplace un disque par jour).

Pour les plus grands, on peut parler de croissance exponentielle en comparant $2 \times n$ et 2^n. Par exemple, on peut comparer le nombre de mouvements pour résoudre les problèmes du crépier avec n crêpes et celui des tours de Hanoi avec n disques.

Aller plus loin : On peut présenter ce jeu différemment en utilisant les graphes. Précisément, étant donné un nombre n de disques, on peut définir un graphe où chaque sommet représente une configuration avec n disques (une répartition des n disques sur les trois piquets avec la contrainte que, sur chaque piquet, les disques sont du plus grand (en bas) au plus petit), et il y a une arête entre deux configurations si l'on peut passer de l'une à l'autre par un unique mouvement (par le déplacement d'un disque d'un piquet à un autre).

Dans ce contexte, résoudre le problème revient à trouver un (plus court) chemin de la configuration intitiale ̀la configuration finale dans le graphe. Un tel graphe pour $n = 2$ disques est représenté sur la Figure 4 et le chemin rouge représente une solution au problème.

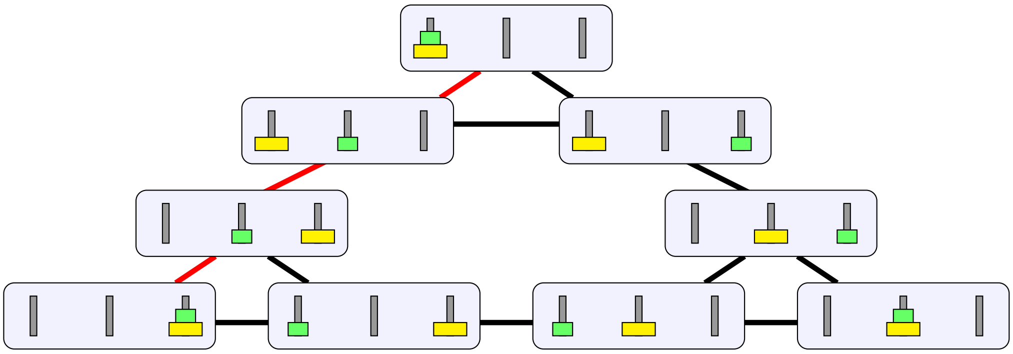


FIGURE 4 – Graphe des configurations dans le cas de deux disques. En rouge, la suite de mouvements pour déplacer les disques du piquet de gauche à celui de droite (et vice-versa).

Lorsque l'on augmente le nombre de disques, on s'aperçoit que le graphe des configurations est en fait le graphe correspondant au triangle de Sierpiński (1882-1962). On peut parler de figures fractales.

Il existe de nombreuses variantes de ce jeu qui peuvent être considérées en utilisant les mêmes approches que précédement.

— On peut ajouter la contrainte que l'on ne peut pas déplacer directement un disque en “sautant un piquet". C'est-à-dire qu'on ne peut pas déplacer un disque du piquet gauche directement au piquet droit (et vice-versa), il faut pour cela passer par le piquet du milieu.

  Dans ce cas, le nombre optimal de mouvements est de l'ordre de 3^n où n est le nombre de disques. Il est intéressant de construire le graphe des configurations et de le comparer à celui du cas précédent.

— On peut ajouter des piquets. Avec $k \geq 3$ piquets et $n \geq 1$ disques, il est facile de montrer que $2n - 1$ mouvements sont nécessaires et suffisants si $k > n + 1$. Dans le cas $k = 4$, une stratégie optimale n'est connue que depuis 2017. Dans le cas $k \geq 5$, une stratégie par programmation dynamique peut être définie (dans le cas d'un public de niveau universitaire), mais il n'est pas connu si cette stratégie est oprimale.

— Un dernier jeu que nous voulons mentionner ici considère trois piquets. Initialement, une tour rouge se trouve sur le piquet de gauche et une tour bleue sur le piquet de droite (les deux tours sont symétriques en ce qui concerne les diamètres des disques). Le but (en respectant la règle qu'un disque ne peut pas être mis sur un disque strictement plus petit) est de mettre tous les disques sur le piquet central en alternant les couleurs. On peut encore raffiner ce jeu en imposant que, dans la configuration finale, le disque le plus bas sur le piquet du milieu soit rouge.

Autres références :

— https://fr.wikipedia.org/wiki/Tours_de_Hano%C3%AF

— Bousch, T. (2014). "La quatrieme tour de Hanoi". Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. 21 (5) : 895–912. doi:10.36045/bbms/1420071861.

— https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_de_Sierpi%C5%84ski

Contact : nicolas point nisse arobase inria point fr