



Fiche pédagogique

Activité : Puzzle de Pythagore

Objectifs pédagogiques : Comprendre le théorème de Pythagore avec une représentation visuelle. Constaté qu'il peut y avoir plusieurs manières (preuves) pour établir un même résultat (théorème). Travailler le raisonnement.

Notions abordées : Géométrie, théorème de Pythagore, aire, triangle rectangle, pavage, algorithme géométrique (construction)

Compétences développées :

Chercher : Organiser, tester et ajuster différentes stratégies pour résoudre un problème.

Représenter : Utiliser différentes positions d'une même forme géométrique.

Raisonner : Résoudre des problèmes nécessitant la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.

Communiquer : Utiliser un vocabulaire adéquat pour décrire le théorème de Pythagore.

Matériel nécessaire : Puzzles de Pythagore. Possiblement sablier de Pythagore. Corde à 13 nœuds.

Niveau : À partir du cycle 3.

Messages à faire passer

- Si un même ensemble de pièces permet de paver deux formes, alors celles-ci sont de même aire.
- Le théorème de Pythagore est un énoncé de géométrie qui lie donne une égalité entre deux aires dans le cas particulier du triangle rectangle. Ce n'est pas une formule, genre $a^2 = b^2 + c^2$ sans contexte.
- Le théorème de Pythagore et sa réciproque sont centraux en mathématiques.
- Un théorème peut avoir plusieurs démonstrations et même une multitude. Une seule suffit à le montrer, mais des preuves alternatives permettent de voir les choses différemment et souvent de mieux comprendre ou généraliser.
- En mathématiques, une fois démontré, un théorème reste vrai pour toujours. Ainsi les mathématiques développées il y a plusieurs millénaires sont toujours valides et utilisées.



FIGURE 1 – Un puzzle de Pythagore (gauche) et un sablier de Pythagore (droite)

Déroulement.

Des puzzles donnant différentes preuves par pavage (et plus précisément par dissection) du célèbre théorème de Pythagore sont présentés. Voir Figure 1 droite pour une photo d'un tel puzzle et la Figure 2 pour des dessins de certains puzzles.

On commence par demander aux participants d'énoncer le théorème. On les fait évoluer vers l'énoncé exact du théorème. Au besoin, on l'énonce soi-même. (Voir le paragraphe *Enoncé du théorème de Pythagore* page 6.)

Dans un triangle rectangle, l'aire du carré de l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés des deux autres côtés.

Montrer visuellement ce qu'il veut dire. Ne pas hésiter à utiliser un sablier de Pythagore si on en a un à disposition.

On propose ensuite aux participants de "prouver" ce théorème à l'aide de différents puzzles. Avec les pièces de chaque puzzle, on doit faire tour à tour les deux petits carrés et le carré de l'hypoténuse. On insiste sur le fait que chaque puzzle correspond à une preuve, qu'un même théorème peut avoir plusieurs preuves différentes. Le théorème de Pythagore en possède plusieurs centaines. (Voir paragraphe *Différentes preuves du théorème de Pythagore* page 9.)

Conseil pédagogique

Le théorème de Pythagore est au programme de la classe de 4ème. L'activité a toutefois son intérêt pour les CM. En effet, l'énoncé du théorème de Pythagore est une belle illustration des notions de "triangle rectangle", "carré" et "aire" qui sont au programme de CM. Les puzzles sont également une belle utilisation d'une propriété fondamentale de l'aire : quelle que soit la forme que l'on pave avec un ensemble de pièces donné, l'aire totale reste la même.

Pour les plus âgés et en fonction du niveau, on complète l'activité en mentionnant l'importance du théorème de Pythagore et certaines de ses nombreuses applications, en évoquant l'histoire du théorème de Pythagore, voire en donnant des preuves du théorème de Pythagore qui ne procèdent pas par dissection. (Voir partie *Didactique et pédagogie* page 6.)

On fait ensuite le lien entre le théorème de Pythagore et la célèbre formule $a^2 = b^2 + c^2$. Considérons un triangle rectangle, et notons a la longueur de l'hypoténuse, b et c les longueurs des deux autres côtés. On demande aux participants ou on leur rappelle que l'aire d'un carré de longueur ℓ est $\ell \times \ell = \ell^2$. Ainsi le carré de l'hypoténuse a une aire de $a \times a = a^2$, et les carrés des petits côtés ont des aires de $b \times b = b^2$ et $c \times c = c^2$. Le théorème de Pythagore nous dit que

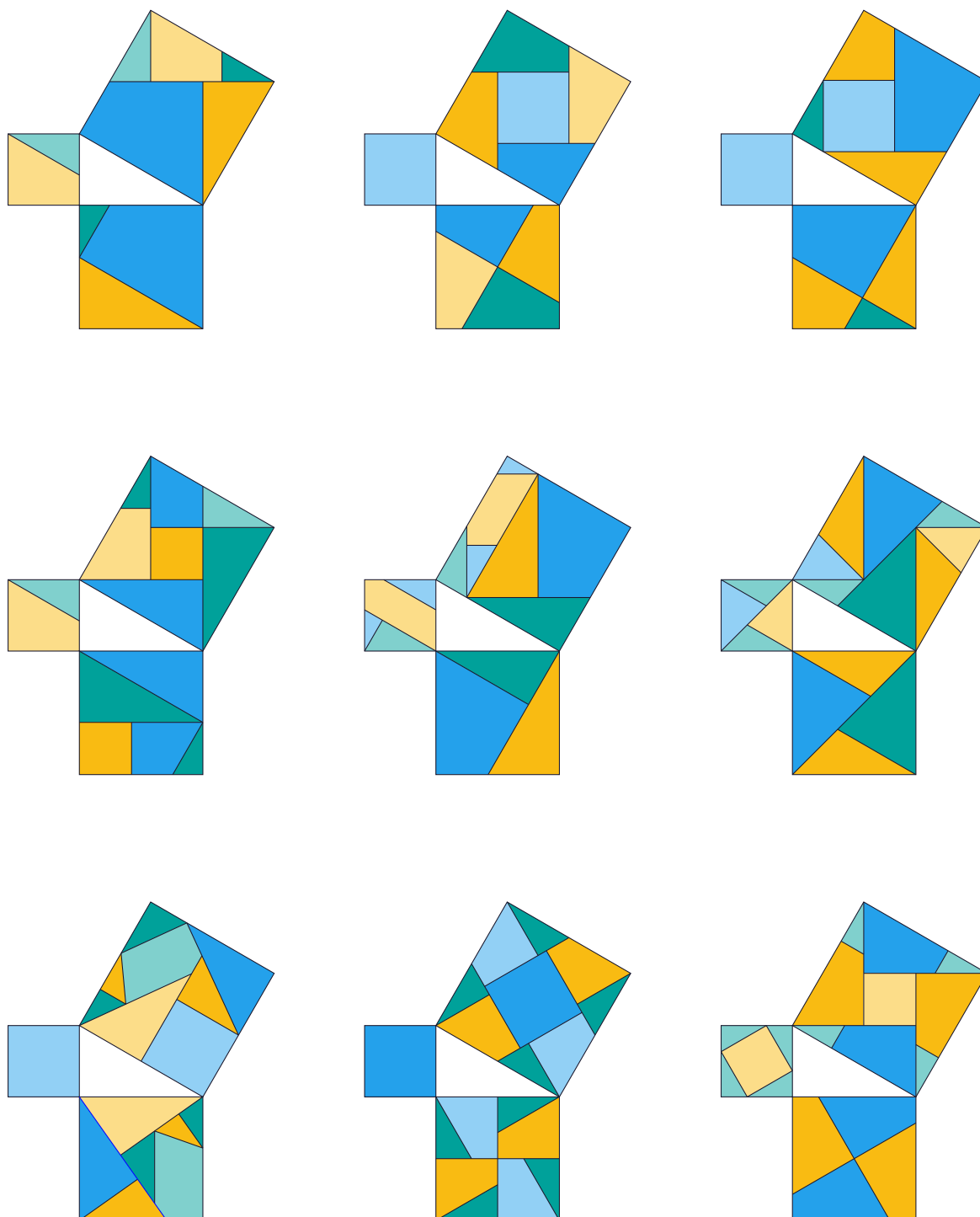


FIGURE 2 – Quelques puzzles de Pythagore. Sur chaque dessin, les pièces du puzzle apparaissent deux fois : une fois pour le pavage des deux petits carrés, et une fois pour le pavage du carré de l'hypoténuse.

l'aire du carré de l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés des deux autres côtés. On a donc la formule :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

On insiste sur le fait que **cette formule n'a aucun sens** (et peut même être incorrecte) **hors de son contexte**, à savoir qu'on est dans un triangle rectangle dont la longueur de l'hypoténuse vaut a , et les longueurs des deux autres côtés b et c .

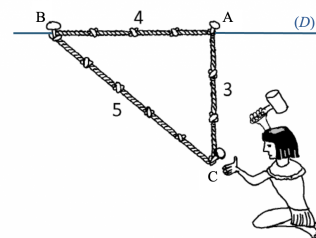
On évoque ensuite la **réciproque du théorème de Pythagore** :

Si l'aire du carré du plus grand côté d'un triangle est égale à la somme des aires des carrés des deux autres côtés, alors le triangle est rectangle

et ses applications.

En particulier, on peut illustrer la corde à 13 nœuds. Celle-ci permet de construire un angle droit ou de vérifier si un angle est droit. Elle remplace donc l'équerre. Pour tracer une perpendiculaire à une droite (D) en un point A, on peut procéder comme suit :

- planter le cinquième nœud à partir d'une extrémité de la corde en A ;
- planter le premier et le dernier nœud de la corde en un point B sur la droite (D) (en tirant le plus petit brin de la corde) ;
- sur le brin mou de la corde, prendre le troisième nœud après celui en A et tirer la corde jusqu'à ce que les deux brins soient tendus ; planter ce nœud (en un point C).



Comme $3^2 + 4^2 = 5^2$, la réciproque du théorème de Pythagore affirme que le triangle ABC est rectangle en A. Cette corde était très certainement utilisée par les arpenteurs égyptiens au temps des pyramides. En revanche, il n'existe aucune preuve documentaire, ni dans les textes, ni dans les miniatures représentant des chantiers, qu'elle ait servi dans la construction au Moyen-Âge.

Pour les plus âgés, on note que, si le théorème de Pythagore est énoncé avec des carrés, il pourrait tout aussi bien l'être avec n'importe quelles formes dont les longueurs sont proportionnelles au côté du triangle. On peut par exemple le faire avec les polygones réguliers et il existe là aussi des preuves par pavages. Voir par exemple Figure 3. Mais c'est aussi vrai avec n'importe quelle forme, comme illustré dans la Figure 4. : ainsi *l'aire du demi-disque (resp. cochon) de l'hypoténuse (en vert) est égale à la somme des aires des demi-disques (resp. cochons) des deux autres côtés (en jaune et bleu).*

Là aussi, il existe des preuves par dissection pour certaines formes comme pour la forme de vase de la Figure 5.

A la fin de la séance, on prend quelques minutes pour rappeler les messages importants, à savoir :

- l'énoncé du théorème : *Dans un **triangle rectangle**, l'aire du carré de l'hypoténuse est égale à la **somme des aires** des carrés des deux autres côtés.*
- les messages indiqués en début dans l'encart en première page.

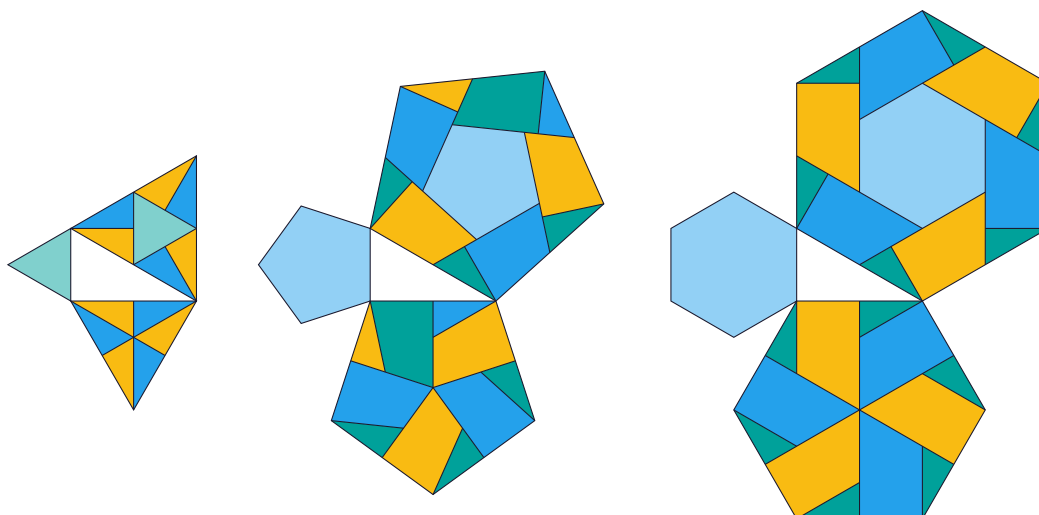


FIGURE 3 – Quelques puzzles de Pythagore avec des polygones réguliers autres que le carré.

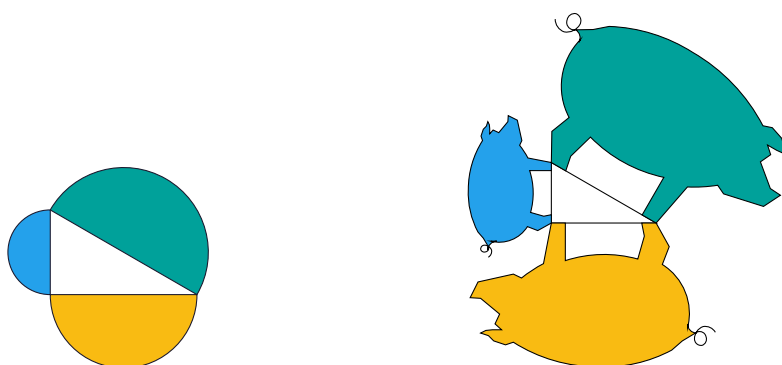


FIGURE 4 – Le théorème de Pythagore avec des formes non polygonales.

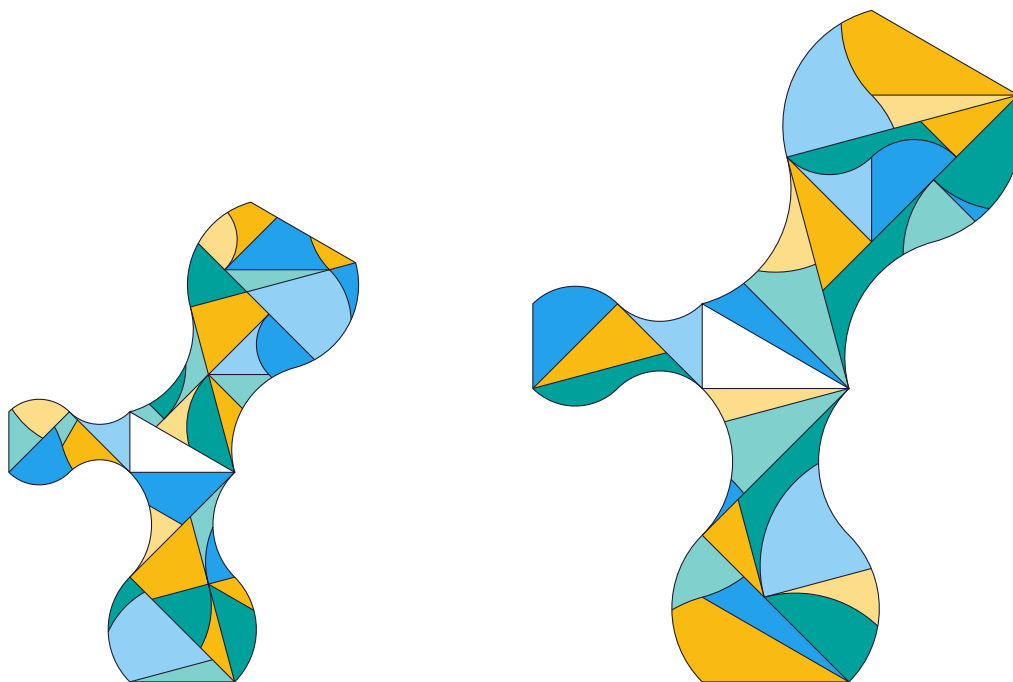


FIGURE 5 – Puzzle de Pythagore avec une forme non polygonale.

Didactique et pédagogie.

Énoncé du théorème de Pythagore : Lorsqu'on demande aux participants de nous énoncer le théorème de Pythagore, énormément de réponses peuvent sortir. Deux types reviennent très souvent et méritent qu'on y porte attention.

La réponse la plus courante est une formule, soit $a^2 = b^2 + c^2$, soit $a^2 + b^2 = c^2$, souvent évoquée comme un vague souvenir de sa formulation mathématique. Il est alors nécessaire de leur demander d'**expliquer cette formule** et d'insister sur le fait qu'une formule n'a aucun sens si l'on ignore ce que représentent ses variables. L'objectif est d'amener les participants à préciser que :

- Dans le cas de $a^2 = b^2 + c^2$, a désigne la longueur de l'hypoténuse, tandis que b et c représentent les longueurs des deux autres côtés.
- Cette relation ne s'applique **que dans un triangle rectangle**, une condition essentielle mais souvent oubliée.

Pour amener les participants à cette dernière condition, on peut prendre l'exemple d'un triangle équilatéral (où $a = b = c$), pour lequel la formule est clairement fausse.

Une autre réponse fréquente est l'énoncé suivant, souvent répété comme une antienne :

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Cette formulation, bien que presque correcte, reste un raccourci. En effet, on ne peut pas simplement additionner deux carrés sans préciser de quoi il s'agit. On demande donc aux participants de compléter cette phrase. La plupart du temps, ils la complètent ainsi :

*Dans un triangle rectangle, le carré de **la longueur** de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés **des longueurs** des deux autres côtés.*¹

1. C'est l'énoncé que donne la quasi totalité des enseignants en mathématiques.

Cet énoncé est correct, mais il va au-delà du théorème de Pythagore *stricto sensu* : il intègre déjà l'idée que l'aire d'un carré de longueur ℓ vaut ℓ^2 . Cette étape vers la formule est intéressante, car elle permet d'aboutir à une expression algébrique très utile pour les applications, mais elle masque la véritable nature du théorème, qui est un résultat **géométrique** établissant une égalité **d'aires**.

Dans les deux cas, il est **impératif** de rappeler l'énoncé classique et géométriquement précis du théorème de Pythagore, à savoir :

*Dans un triangle rectangle, l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme **des aires** des carrés construits sur les deux autres côtés.*

Pourquoi le théorème de Pythagore est-il formulé avec des carrés : Nous avons vu que le théorème de Pythagore peut être formulé avec n'importe quelle forme. Alors pourquoi donc est-il formulé avec des carrés et pas une autre forme, par exemple un polygone, un demi-disque ou un cochon comme nous l'avons vu.

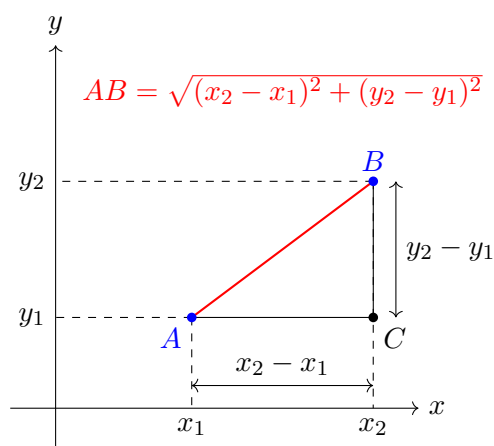
Il y a deux raisons à cela. La première est que le carré est une forme géométrique très simple pour laquelle il est facile de trouver des preuves par pavages et en particulier dissection. Une preuve par dissection correspond à un puzzle de Pythagore : elle donne un ensemble fini de pièces qui peuvent paver soit le carré de l'hypoténuse, soit les deux autres carrés, ce qui garantit l'égalité entre l'aire du carré de l'hypoténuse et la somme des aires des carrés des deux autres côtés. De telles preuves sont souvent plus compliquées pour d'autres polygones et elles n'existent le plus souvent pas pour des formes avec des courbes comme le demi-disque ou le cochon².

La seconde raison est que la formule de l'aire d'un carré de côté ℓ est ℓ^2 . Pour une autre forme F , la formule de l'aire est $C_F \times \ell^2$ avec C_F une constante qui dépend de la forme F . Cette valeur de C_F est souvent complexe : pour un triangle équilatéral, c'est $\frac{\sqrt{3}}{4}$, pour un pentagone régulier $\frac{1}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$, pour un hexagone régulier $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, pour le demi-disque $\frac{\pi}{8}$. Et pour certaines formes, comme le cochon, cette constante n'est pas forcément connue. La formule traduisant le théorème de Pythagore pour une forme F est alors $C_F a^2 = C_F b^2 + C_F c^2$. En divisant par C_F (des deux côtés de l'égalité), on obtient la formule $a^2 = b^2 + c^2$. Mais il est plus simple de partir avec un carré qui la donne directement.

Importance du théorème de Pythagore et de sa réciproque : Le théorème de Pythagore est l'outil qui permet de calculer les distances dans les espaces dits "euclidiens" comme le plan (2D) et l'espace (3D). Sa réciproque (et ses généralisations) permettent elles de vérifier l'orthogonalité.

Par exemple, considérons deux points dans le plan muni d'un repère orthonormé : A de coordonnées (x_1, y_1) et B de coordonnées (x_2, y_2) . Introduisons le point C de coordonnées (x_2, y_1) . Comme le repère est orthonormé, le triangle ABC est rectangle en C . Donc, d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Les segments $[AC]$ et $[CB]$ sont parallèles aux axes, x et y respectivement. On a donc $AC = |x_2 - x_1|$ et $CB = |y_2 - y_1|$. En insérant, dans la formule précédente, on obtient $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ et donc

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



2. Le puzzle du vase est un cas particulier qui dérive d'un puzzle du carré.

De même, dans un espace de dimension quelconque muni d'un repère orthonormé, la distance entre deux points s'obtient en calculant la racine carrée de la somme des carrés des différences de leurs coordonnées.

Ainsi, dans un espace de dimension 3, la distance entre un point A de coordonnées (x_1, y_1, z_1) et d'un point B de coordonnées (x_2, y_2, z_2) est $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Voir Figure 6. En effet, introduisons les points C de coordonnées (x_2, y_2, z_1) et D de coordonnées (x_2, y_1, z_1) . Le triangle ABC est rectangle en C et le triangle ADC est rectangle en D . Donc, par le théorème de Pythagore, $AB^2 = AC^2 + CB^2$ et $AC^2 = AD^2 + DC^2$. Ainsi, $AB^2 = AD^2 + DC^2 + CB^2$. Or $AD = |x_2 - x_1|$, $DC = |y_2 - y_1|$ et $CB = |z_2 - z_1|$. On a alors $AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ et donc

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

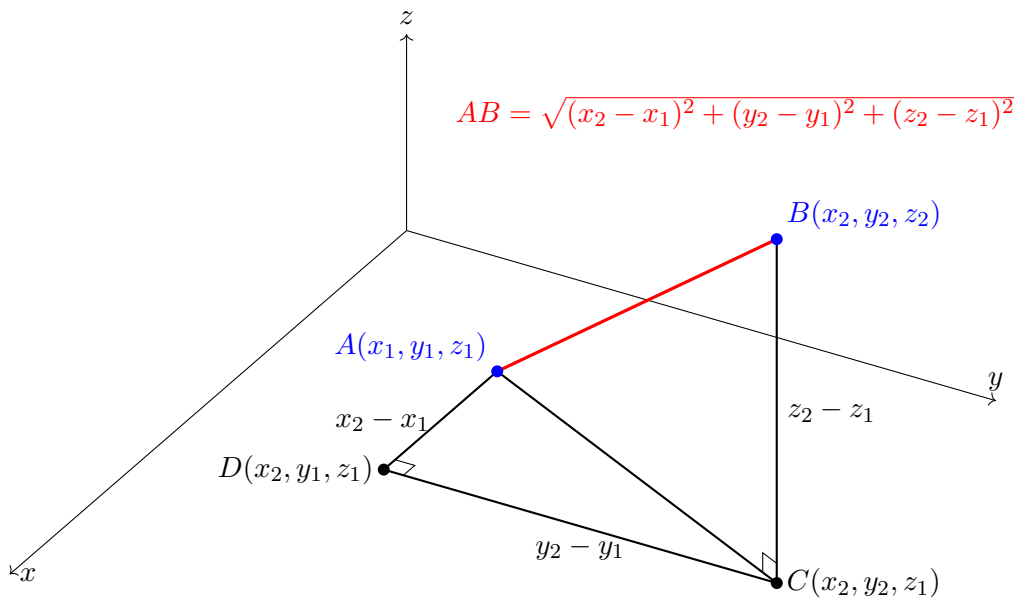


FIGURE 6 – Formule de la distance entre deux points dans un espace à trois dimensions muni d'un repère orthonormé.

Ainsi, dès lors qu'on a besoin de calculer des distances ou de vérifier l'orthogonalité, on utilise Pythagore, sa réciproque ou une de ses conséquences. Cela est massivement le cas en mécanique (calcul de positions, de forces, vecteurs), en architecture, ou en infographie et modélisation 3D. On peut noter que la métrique de Minkovski, qui joue un rôle capital dans les théories de la relativité restreinte et générale, utilise elle aussi le théorème de Pythagore : elle est définie par la forme quadratique différentielle $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ avec t la coordonnée de temps, x, y, z les trois coordonnées d'espace, et c la constante chrono-géométrique (qui est égale à la vitesse de la lumière dans le vide, soit $299\,792\,458\,m.s^{-1}$).

En mathématiques, le théorème de Pythagore est le premier résultat qui jette des ponts entre la géométrie, l'algèbre, l'analyse et la théorie des nombres. En particulier, la formule de base de la trigonométrie $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dérive également du théorème de Pythagore. Et la trigonométrie est omniprésente dès que l'on traite de phénomènes périodiques ou ondulatoires. Elle est également essentielle en calcul différentiel et intégral, en géométrie analytique, et en théorie des nombres complexes.

Bref, le théorème de Pythagore et sa réciproque sont quasiment partout.

Histoire du théorème de Pythagore : Si le théorème de Pythagore est attribué au mathématicien philosophe grec Pythagore (vers 580 av. J.-C. – vers 495 av. J.-C.), il était connu bien avant et par de nombreuses civilisations.

Il est fort probable que les babyloniens le connussent déjà il y a quatre mille ans : la tablette Plimpton 322 (vers - 1800 av. J.-C.) recense une quinzaine de triplets pythagoriciens (triplets d'entiers a, b, c tels que $a^2 + b^2 = c^2$) ; la tablette YBC 7289 (vers - 1800) montre un carré de côté 1 et sa diagonale avec une approximation de sa longueur $\sqrt{2}$.

Le théorème de Pythagore apparaît dans les Śūlba-Sūtras de Baudhāyana (manuel d'instructions pour construction d'autels pour rituels védiques) vers - 800 av. J.-C. sous la forme suivante :

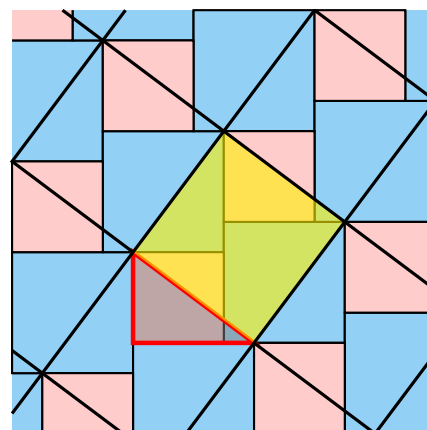
Les aires produites respectivement par la longueur et la largeur d'un rectangle donnent ensemble l'aire produite par la diagonale.

Un dessin d'une preuve du théorème de Pythagore apparaît en Chine dans le *Zhōubì Suànjīng* (i.e. *Classique mathématique du Gnomon des Zhou*) entre 550 et 300 av. J.C.

Différentes preuves du théorème de Pythagore : Il existe des centaines de preuves du théorème de Pythagore. On peut en trouver de nombreuses sur internet. Voir par exemple, le site Cut the Knot ou la video Ten Epic Pythagorean Proofs Without Words. Les puzzles présentés dans cette activité sont tous dérivés de preuves par pavage, et plus précisément par dissection : rappelons que ces preuves donnent un ensemble de pièces qui peuvent paver soit le carré de l'hypoténuse, soit les deux autres carrés.

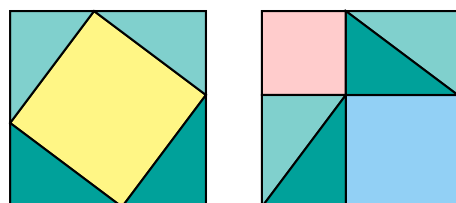
Le puzzle du premier puzzle (en haut à gauche) de la Figure 2 est issu de la preuve suivante due à Al-Nayrizi (865 – 922).

Prenons un triangle rectangle, comme celui en rouge dans la figure ci-contre. Pavons le plan avec les carrés des petits côtés du triangle (en bleu et rose) suivant une pose dite en "aile de moulin" comme ci-contre. Traçons les droites qui relient le coin en haut à gauche d'un carré moyen (en bleu) des coin en haut à gauche des moyens carrés qui le touchent. Cela fait apparaître de nombreux carrés de l'hypoténuse comme celui en jaune. Chacun de ces carrés est composé de quatre moceaux, trois bleus qui permettent de paver le moyen carré et deux roses qui permettent de paver le petit carré.



Il est intéressant de montrer d'autres preuves. Certaines, parmi les plus simples et les plus élégantes, sont aussi des preuves par pavage, mais pas par dissection.

Par exemple, la preuve du *Zhōubì Suànjīng* est obtenue en pavant un carré dont le côté est la somme des longueurs des deux petits côtés ($b + c$).



Un tel carré peut être pavé soit avec quatre triangles rectangles et le carré de l'hypoténuse (en jaune), soit avec quatre triangles rectangles et les carrés des deux autres côtés (en rose et bleu). Cela implique donc que l'aire du carré de l'hypoténuse est égale à l'aire des deux carrés des autres côtés.

Un autre exemple, est la preuve suivante. Prenons un triangle rectangle avec son hypoténuse

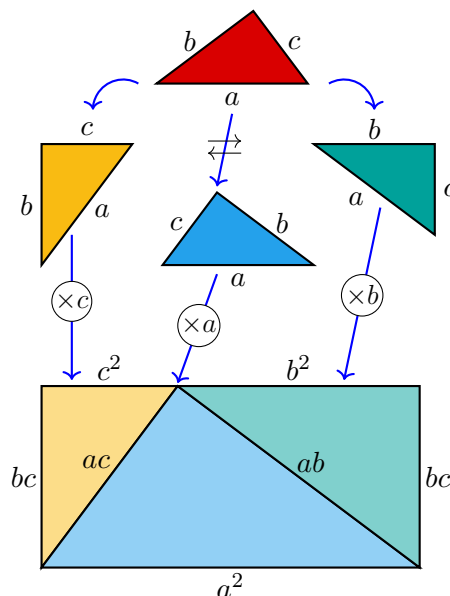
à l'horizontale en dessous du triangle (triangle rouge), dont la longueur de l'hypoténuse vaut a , celle du moyen côté b et celle du petit côté c .

Faisons une copie du triangle. Appliquons lui une rotation pour mettre le petit côté à l'horizontale au dessus du triangle (triangle jaune). Grossissons (multiplions toutes les longueurs) ce triangle par c . On obtient alors un triangle (jaune clair) dont les côtés sont de longueur ac , bc et c^2 .

Faisons une deuxième copie du triangle et appliquons lui une rotation pour mettre le moyen côté à l'horizontale au dessus du triangle (triangle vert). Grossissons ce triangle par b . On obtient alors un triangle (vert clair) dont les côtés sont de longueur ab , b^2 et bc .

Faisons une troisième copie du triangle, prenons le triangle miroir par rapport à la verticale (triangle bleu). Grossissons ce triangle par a . On obtient alors un triangle (bleu clair) dont les côtés sont de longueur a^2 , ab et ac .

Les trois triangles grossis pavent parfaitement un rectangle. Les deux côtés horizontaux de ce rectangle sont de même longueur. Or le côté supérieur est de longueur $b^2 + c^2$ et le côté inférieur de longueur a^2 . Donc $a^2 = b^2 + c^2$.



De nombreuses personnes ont proposé des preuves du théorème de Pythagore. En 2023, deux lycéennes américaines ont présenté une démonstration semble-t-il inédite. De nombreux personnages célèbres avaient fait de même avant elles.

- Leonard de Vinci (1452 – 1519) a proposé une preuve géométrique basée sur des pavages.
- René Descartes (1596 – 1650) a utilisé la géométrie analytique (coordonnées cartésiennes) pour prouver le théorème via des équations algébriques. C'est un peu l'inverse du calcul des distances dans un repère orthonormé avec le théorème de Pythagore décrit ci-dessus. Il montre que le théorème découle naturellement de la distance euclidienne dans un repère orthonormé.
- Isaac Newton (1643 – 1727), dans ses travaux sur les fluxions (précurseur du calcul différentiel), il utilise des méthodes infinitésimales pour généraliser le théorème.
- Leonhard Euler (1707 – 1783) donne une preuve algébrique en utilisant des nombres complexes et la formule $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.
- James A. Garfield (1831 – 1881), vingtième président des États-Unis et mathématicien amateur, propose en 1876 une preuve originale basée sur un trapèze contenant deux triangles rectangles.
- Albert Einstein (1879 – 1955) a redécouvert une preuve du théorème à l'âge de 12 ans, en utilisant des triangles semblables. Cette preuve marche à l'identique quelle que soit la forme géométrique construite sur les côtés. Elle donne donc immédiatement les versions avec les polygones, le demi-disque et le cochon mentionnées ci-dessus.