

## Fiche pédagogique

### Activité : Progression dans un graphe dirigé

**Objectifs pédagogiques :** S’initier aux stratégies gagnantes au travers d’un jeu et ainsi aux algorithmes et à la preuve.

Comprendre comment de nombreux jeux peuvent se modéliser à l’aide d’un graphe dirigé.

Découvrir puis maîtriser un algorithme générique pour trouver et démontrer une stratégie gagnante à ces jeux.

**Notions abordées :** Stratégie gagnante, position perdante ou gagnante, graphes des positions, quantificateurs logiques “quel que soit”, “il existe”, algorithme.

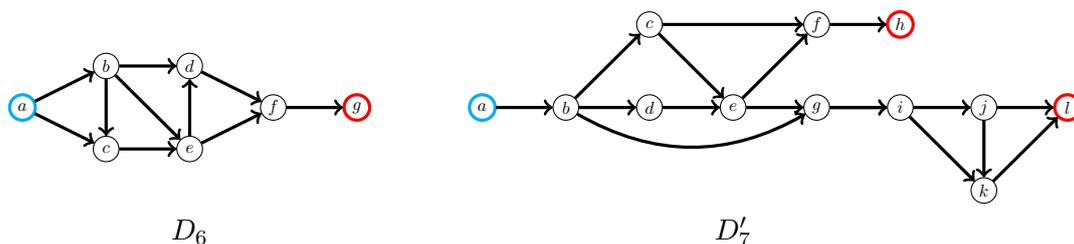
**Matériel nécessaire :** Photocopies individuelles des graphes dirigés, ou bâches pour jouer à plusieurs, ou jeu en grandeur nature avec cerceaux et lattes.

**Niveau :** A partir du cycle 2.

**Déroulement :** On dispose un graphe dirigé acyclique, c’est-à-dire qu’en suivant les arcs (flèches), on ne peut pas revenir sur un sommet par lequel on est déjà passé. Une manière facile de construire de tels graphes et de disposer des sommets dans le plan et de n’autoriser que des arcs qui vont de la gauche vers la droite.

Chaque graphe dispose d’un sommet de départ et d’un (ou plusieurs) sommets d’arrivée. La règle du jeu est la suivante : Initialement, un jeton se trouve sur le sommet de départ. Chacun leur tour, les joueurs doivent déplacer le jeton le long d’un arc. (Ils vont vers un autre sommet en suivant une flèche.) Le joueur qui amène le jeton vers un sommet d’arrivée gagne.

On peut par exemple utiliser un des graphes ci-dessous où les sommets de départ sont indiqués en bleu et les sommets d’arrivée en rouge.



Sur chacun des graphes dirigés, il est demandé aux participants de trouver une stratégie gagnante pour le jeu ci-dessus. Il est à noter qu’un, et un seul, des deux joueurs a une stratégie gagnante. Ainsi **la description de la stratégie doit comprendre la décision de commencer à jouer ou pas.**

**Recherche d'une stratégie gagnante :** Le premier objectif de cette activité, le but est de faire émerger, verbaliser les stratégies gagnantes, puis de découvrir une manière automatique (i.e. un algorithme) pour trouver la stratégie gagnante sur n'importe quel graphe dirigé acyclique.

On laisse tout d'abord les élèves chercher les stratégies gagnantes pour différents graphes.

Dans un second temps, on essaie de leur faire découvrir ou on leur explique, qu'il y a un algorithme qui permet de trouver la stratégie gagnante pour ces jeux. On détermine d'abord si les sommets sont perdants ou gagnants (pour le joueur qui doit jouer) en effectuant l'algorithme suivant :

1. Les sommets d'arrivées sont des sommets perdants. En effet, si le jeton est sur un sommet d'arrivée, le joueur adverse vient de l'y poser et on a perdu.
2. S'il existe un arc d'un sommet vers un sommet perdant, alors le sommet est gagnant.
3. Si tous les arcs qui partent d'un sommet vont vers des sommets gagnants, alors ce sommet est perdant.

Une fois cela fait, la stratégie consiste à toujours déplacer la jeton vers un sommet perdant (qui est de fait perdant pour l'adversaire).

Par exemple, pour le graphe  $D_6$ , le sommet  $g$  est le sommet d'arrivée donc perdant par l'Étape 1 de l'algorithme (Figure 1 (i)). Le sommet  $f$  a un arc vers un sommet perdant (en l'occurrence  $g$ ) et donc il est gagnant par l'Étape 2 de l'algorithme (Figure 1 (ii)). Tous les arcs partant de  $d$  (un seul ici  $df$ ) vont vers des sommets gagnants donc  $d$  est perdant par l'Étape 3 de l'algorithme (Figure 1 (iii)). Les sommets  $b$  et  $e$  ont un arc vers un sommet perdant (en l'occurrence  $d$ ). Ils sont donc gagnants (Figure 1 (iv)). Tous les arcs partant de  $c$  vont vers des sommets gagnants (en l'occurrence  $b$  et  $e$ ) donc  $c$  est perdant (Figure 1 (v)). Enfin, il y a un arc du sommet  $a$  vers un sommet perdant (en l'occurrence  $c$ ), donc le sommet  $a$  est gagnant (Figure 1 (vi)).

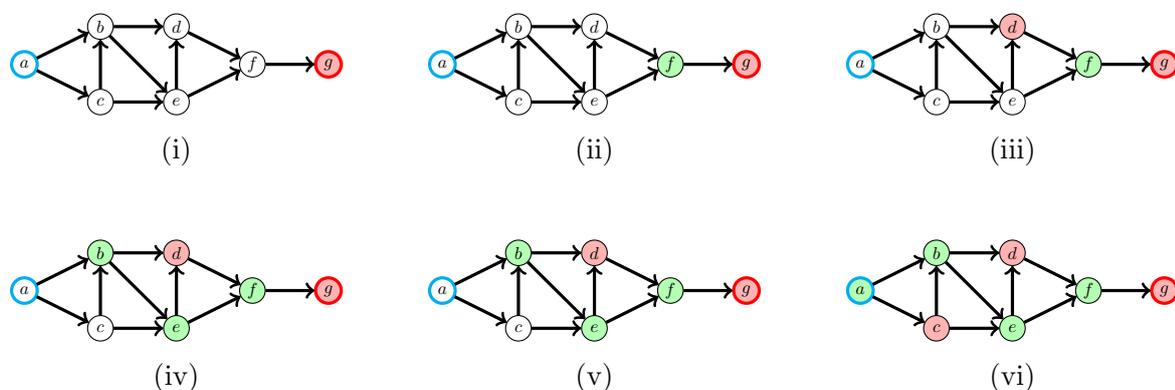


FIGURE 1 – Détermination des positions perdantes (en rouge) et gagnantes (en vert) pour le graphe  $D_6$ .

On peut vérifier que de chaque sommet gagnant vert on peut déplacer le jeton vers un sommet perdant rouge, et que de tout sommet perdant rouge on ne peut se déplacer que vers des sommets gagnants verts.

**Modélisation d'autres jeux :** Un autre objectif de l'activité est de montrer que de nombreux jeux classiques peuvent se modéliser comme "Progression dans un graphe dirigé" sur un graphe dirigé bien particulier. En effet, pour chacun de ces jeux, il faut (et il suffit) représenter les différentes positions possibles par des sommets et mettre un arc d'une position à une autre s'il est possible d'aller de la première à la seconde en jouant un coup valide.

Pour des jeux tels que le Jeu des Bâtonnets, le Jeu du Roi Buté, ou le jeu L'abeille et le miel, on obtient des graphes assez aisément visualisables. Par exemple, si on joue au jeu des bâtonnets avec neuf bâtonnets et qu'on peut enlever 1 ou 2 bâtonnets, on obtient le graphe dirigé  $D_2$  de la Figure 2, où un sommet correspond à la position ayant le nombre de bâtonnets indiqué sur le sommet. Si on joue au jeu des bâtonnets avec neuf bâtonnets et qu'on peut enlever 1, 2 ou 3 bâtonnets, on obtient le graphe dirigé  $D_3$  de la Figure 2. Si on joue au jeu "L'abeille et le miel" sur deux (resp. trois, sept) lignes, on obtient le graphe dirigé  $D_4$  (resp.  $D_5$ ,  $D_{14}$ ) de la Figure 3.

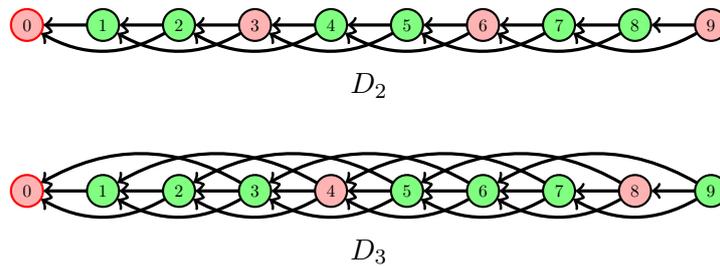


FIGURE 2 – Les graphes dirigés correspondant à différentes variantes du jeu des bâtonnets avec les sommets gagnants en vert et les sommets perdants en rouge.

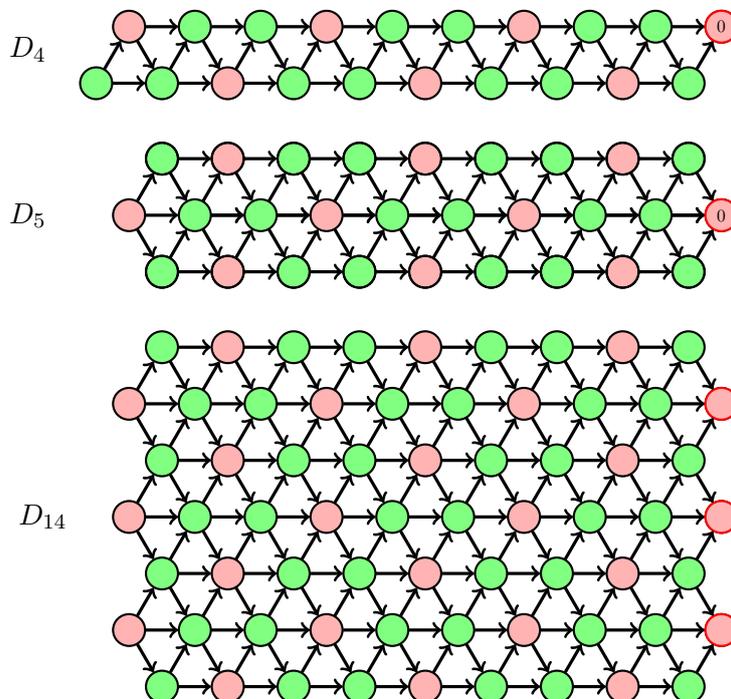


FIGURE 3 – Les graphes dirigés correspondant au jeu L'abeille et le miel sur deux, trois et sept lignes. Les sommets gagnants sont en vert et les sommets perdants en rouge.

Le graphe dirigé correspondant au jeu du Roi buté sur une grille  $8 \times 8$  est représenté sur la Figure 4.

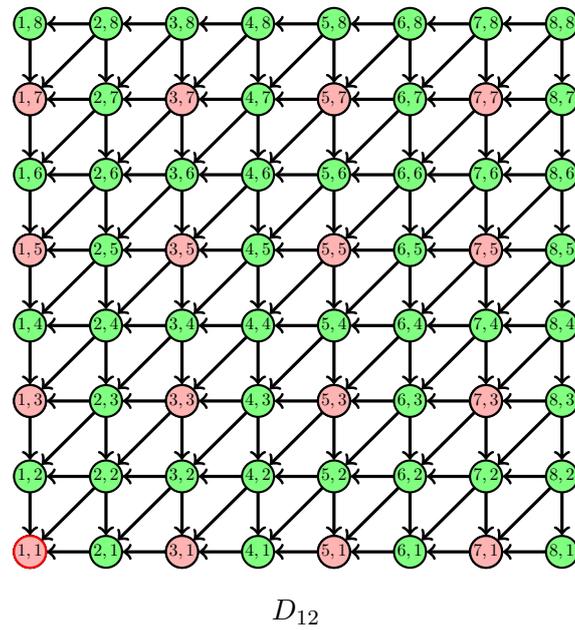


FIGURE 4 – Les graphes dirigés correspondant au jeu du Roi buté sur une grille. Les sommets gagnants sont en vert et les sommets perdants en rouge.

Une possibilité est de faire jouer les participants en parallèle au jeu original (Jeu des bâtonnets, Roi buté, L’abeille et le miel) et au jeu “Progression dans un graphe dirigé” sur le graphe correspondant pour que les participants découvrent par eux-même le lien entre les jeux.

Bien évidemment, les stratégies gagnantes obtenues en utilisant les graphes sont les mêmes que celles obtenues directement.