

Fiche pédagogique

Activité : Pentominos

Objectifs pédagogiques : S'initier à la géométrie. Travailler la représentation spatiale. Développer des compétences en résolution de problèmes.

Notions abordées :

Géométrie : Formes, configurations, rotations, réflexions/symétries.

Aritmétique : multiplication, multiples.

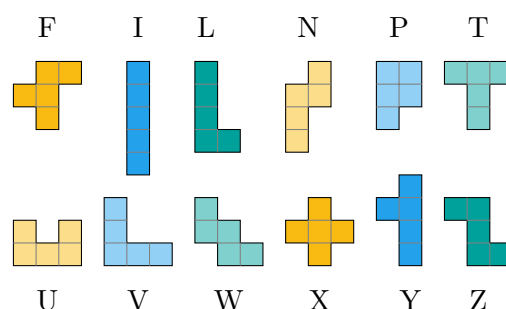
Matériel nécessaire : Jeu de pentominos. Livret de formes à faire. Posters ou plateaux avec des formes.

Niveau : Niveau maternelle jusqu'au collège.

Durée : A partir de 15 minutes.

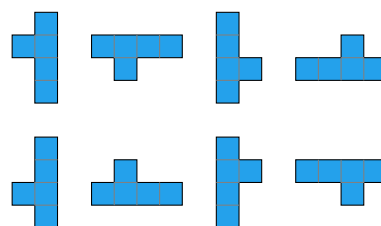
Déroulement :

Un pentomino est une figure géométrique composée de 5 carrés accolés par leurs côtés. À rotation et symétrie près, il y a douze pentominos différents en tout, chacun étant identifié par une lettre de l'alphabet qui rappelle sa forme.



Par rotation de 90 degrés (1/4 de tour) ou image miroir (retournement de la pièce), les pentominos peuvent engendrer plusieurs formes :

- L, N, P, F et Y engendrent 8 formes : 4 par rotation et 4 par image miroir.
- Z engendre 4 formes : 2 par rotation et 2 par image miroir.
- T, V, U et W engendrent 4 formes par rotation.
- I engendre 2 formes par rotation.
- X n'engendre qu'une seule forme.

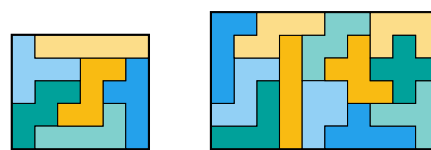


Les 8 formes engendrées par Y.

On distribue à chaque participant (ou groupe de participants) un jeu de 12 pentominos (un de chaque type). Les participants doivent utiliser ces pentominos pour réaliser des puzzles, plus ou moins difficiles suivant le niveau.

Niveau facile :

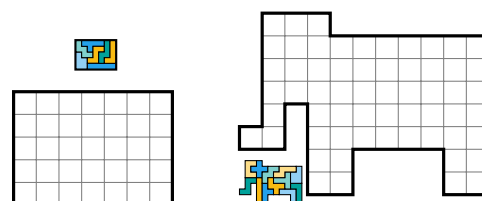
Pour commencer, on fait faire des puzzles avec la solution dessinée comme ceux ci-contre. Le but de cette étape est que les participants arrivent à identifier les différentes pièces quelle que soit leur position (orientation et symétrie).



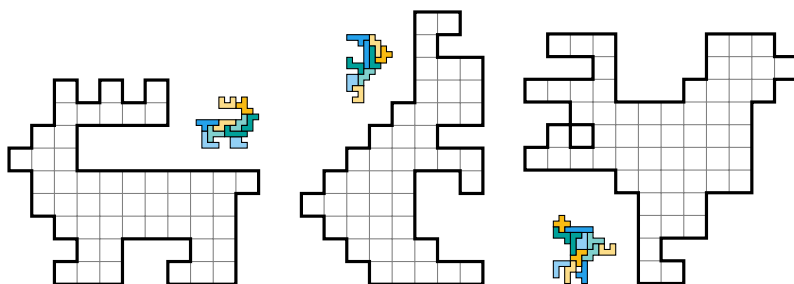
Il se peut que certains participants aient du mal à s'apercevoir que les pentominos dépassent de la forme à reproduire. Dans ce cas, on peut leur proposer un plateau en relief où les bords sont surélevés et interdisent le débordement d'un pentomino.

Niveau moyen :

On peut ensuite proposer des puzzles plus compliqués où la solution n'apparaît pas directement sur le puzzle, mais est donnée à côté en taille réduite. A cette étape, les participants travaillent sur la notion de formes similaires, mais de taille différente.

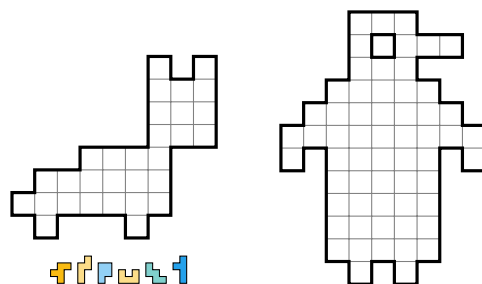


Pour complexifier les choses et faire plus travailler sur la symétrie et la rotation, on peut proposer des puzzles où la solution donnée n'est pas orientée comme le puzzle, mais est soit symétrique horizontalement (comme dans le cerf), tournée à 180 degrés (comme le lapin), ou tournée à 90 degrés (comme le coq).

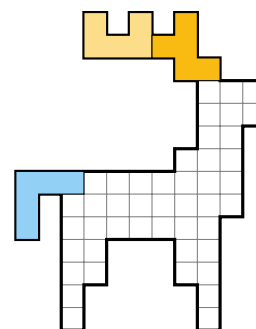


Niveau difficile :

On propose enfin des puzzles plus compliqués où la solution n'est pas donnée du tout. N'est indiqué que le jeu de pentominos à utiliser. C'est le cas du puzzle FENNEC ci-contre. En revanche, lorsque les 12 pentominos sont nécessaires, il n'est pas nécessaire de l'indiquer puisqu'ils le sont tous, c'est le cas du puzzle MANCHOT tout à droite. Une variante pour les puzzles à moins de 12 pentominos est de laisser le choix aux participants sur les pentominos à utiliser.



Il y a bien sûr des figures de difficultés différentes. Deux principes concomitants rendent une figure difficile à résoudre. D'une part, la complexité augmente généralement avec le nombre de pièces : plus une figure en contient, plus elle devient difficile à résoudre, car le nombre de combinaisons et d'interactions possibles augmente fortement. D'autre part, la compacité de la figure aggrave cette difficulté : si une figure a des parties découpées, alors on peut identifier les positions de certaines pièces. Par exemple, dans la figure CERF ci-contre, il est facile de voir que les bois ne peuvent être réalisés que par le pentomino U et pentomino F, et que la queue ne peut être faite que par le pentomino V. Ces trois pentominos positionnés, il ne reste plus qu'un puzzle à 9 pièces, au lieu de 12 originellement.



En plus des compétences travaillées aux niveaux précédents, ce niveau fait travailler le raisonnement. On attend que les participants développent des petits raisonnements permettant de repérer que certaines positions de pentomino sont forcées (comme dans le cas simple du cerf ci-dessus) ou impossible. Un des premiers arguments est de voir que certaines positions de pentominos laissent des parties trop petites pour être couvertes et donc sont impossibles. Par exemple, pour le puzzle FENNEC, on peut voir qu'on ne peut pas mettre le pentomino P ou le pentomino W comme indiqué Figure 1 (a) car cela laisserait des parties de taille 1 ou 4 – ce qui est impossible parce que les pentominos sont de taille 5. Plus généralement, après avoir posé des pentominos, les parties (contigües) qui restent à couvrir doivent toutes être de taille un multiple de 5. Ainsi le pentomino Y ne peut pas être placé comme indiqué Figure 1 (b) car cela laisserait deux parties contigües, une de 11 cases à gauche et une de 14 cases à droite. Il est possible de pousser encore le raisonnement. Considérons la case indiquée en rouge sur la Figure 1 (c). Elle sépare la figure en deux parties, une (le corps) de 19 cases et une autre (la tête) de 10 cases. 10 est un multiple de 5 au contraire de 19. Donc la case rouge doit être couverte avec le corps ; ainsi le puzzle se divise en deux sous-puzzles, l'un constitué de la tête et le second constitué du corps et de la case rouge.

Une méthode classique consiste à faire des hypothèses pour ensuite les écarter si elles ne permettent pas de mener à une solution. Par exemple, pour le sous-puzzle de la tête de FENNEC, on peut chercher quel pentomino contient l'oreille gauche. Les pentominos F, N, W, P et U peuvent s'y positionner. Cependant, pour F, N, W, et P, cela laisse des parties qui ne peuvent pas être couvertes (voir Figure 1 (d)). Ainsi le pentomino qui contient l'oreille droite est nécessairement le U, ce qui implique ensuite que l'autre partie de la tête est couverte par le P comme dessiné Figure 1 (e).

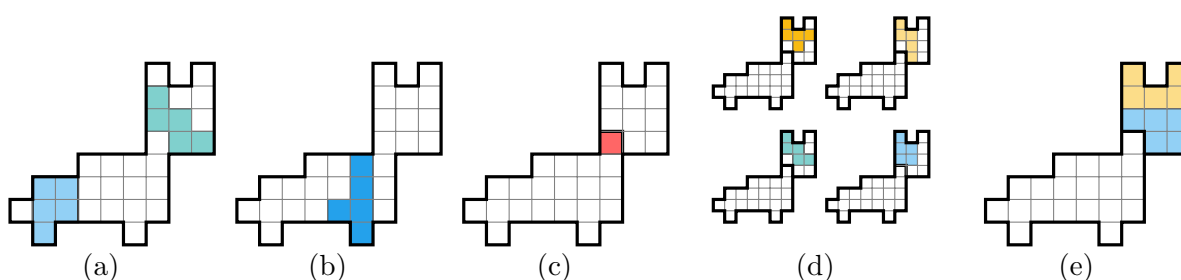


FIGURE 1 – Illustration de raisonnement pour résoudre le puzzle FENNEC

Apprentissage du raisonnement

Le but du niveau difficile est de se familiariser avec le raisonnement. Il est important de laisser, autant que possible, les participants trouver par eux-mêmes les solutions et les méthodes (comme celles décrites ci-dessus). Si cela s'avère nécessaire, on peut cependant les aider, tout d'abord en pointant des situations d'où ils devraient arriver à tirer des conclusions, en essayant qu'ils découvrent eux-même cette conclusion.

Enfin, dans le cas où un participant est bloqué et n'arrive pas à progresser, on peut le débloquent en positionnant un pentomino à sa place dans une solution afin d'obtenir un puzzle plus facile. Différents puzzles, chacun accompagné d'une solution et d'une proposition d'indication, sont donnés Figure 2.

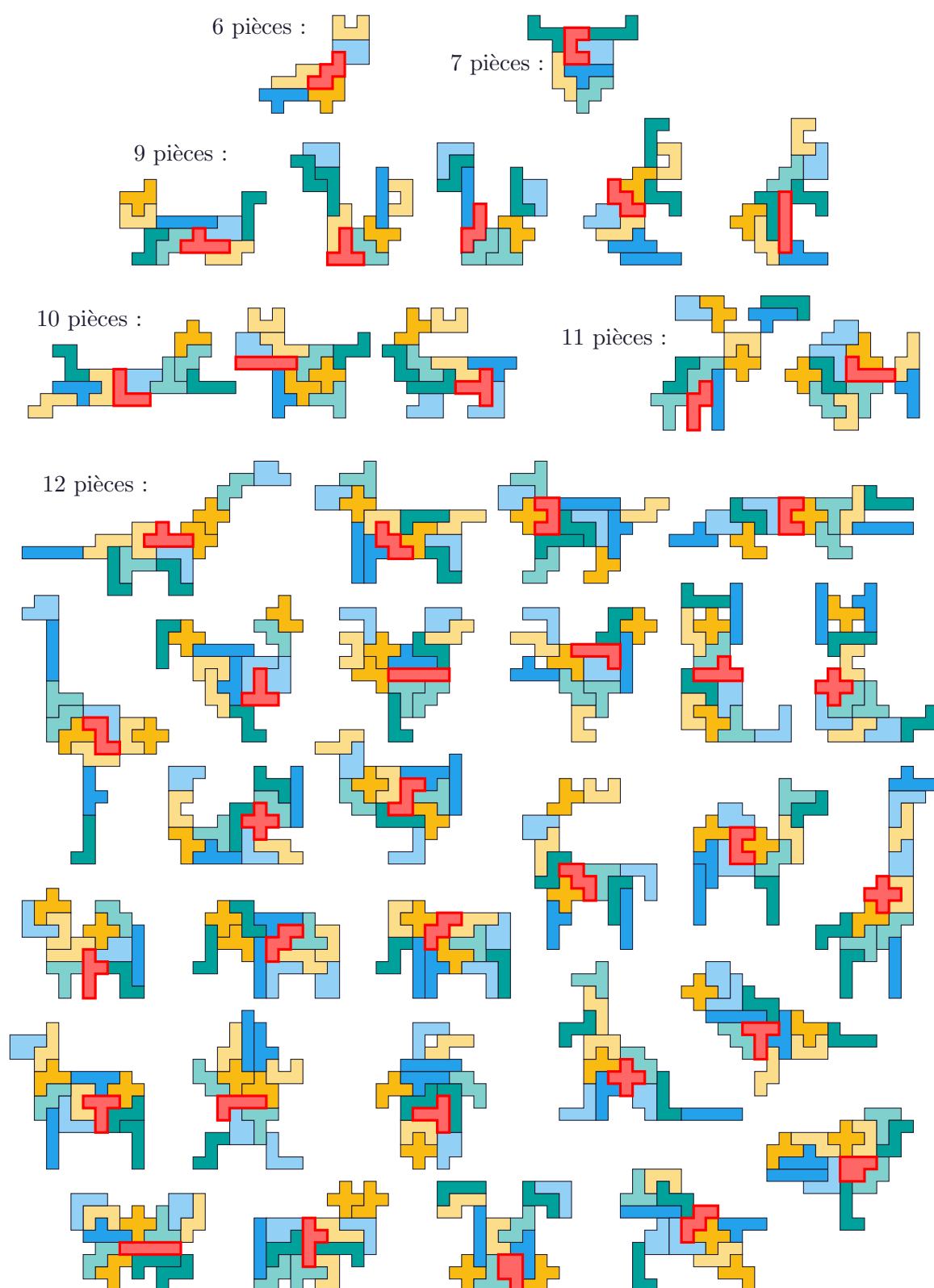
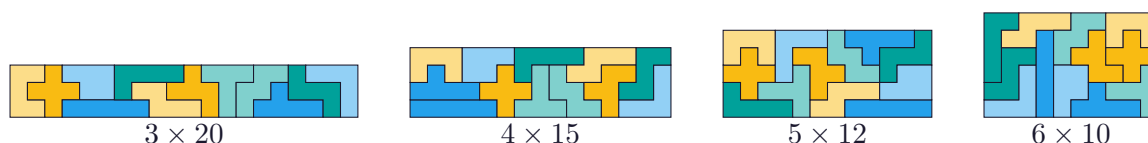


FIGURE 2 – Différents puzzles de niveau difficile avec une solution. Le pentomino en rouge est une suggestion d'indication.

Pentominos, rectangles et multiplication : Les pentominos sont tous formés de cinq carrés. Cela implique que toutes les formes que l'on peut faire avec des pentominos ont un nombre de cases qui est un multiple de 5. Si on veut utiliser tous les pentominos une et une seule fois, alors les formes auront $12 \times 5 = 60$ cases. On peut donc poser la question : « Quels sont les rectangles que l'on peut faire en utilisant chacun des 12 pentominos une et une seule fois ? ». Les participants doivent trouver qu'un tel rectangle a une aire de 60 carrés. Or, comme $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ (ceci est sa décomposition en facteurs premiers), les seuls rectangles d'aire 60, sont les rectangles de taille 1×60 , 2×30 , 3×20 , 4×15 , et 6×10 . Il est facile de voir qu'on ne peut pas faire les rectangles 1×60 et 2×30 car certains pentominos ont leur deux dimensions (largeur et longueur) supérieures ou égales à 3. En revanche, les quatre autres rectangles peuvent être réalisés. Des solutions sont données ci-dessous.



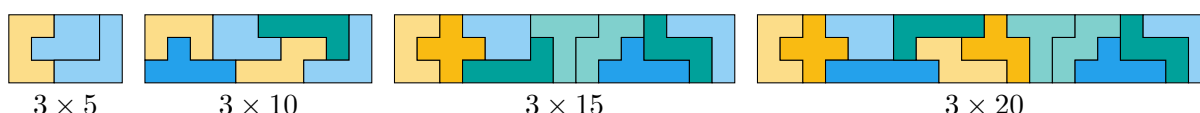
De manière plus générale, on peut demander « Quels sont les rectangles que l'on peut faire en utilisant certains des 12 pentominos (une et une seule fois chacun) ? ». Evidemment, de tels rectangles doivent avoir une aire qui est un multiple de 5. On peut étudier cette question de manière systématique, en considérant la largeur du rectangle, qui est la plus petite des deux dimensions de celui-ci. (Ainsi largeur $\leq$ longueur.)

Le I étant le seul pentomino ayant une dimension égale à 1, le seul rectangle de largeur 1 possible est le rectangle 1×5 .

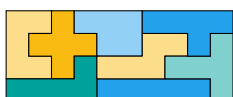
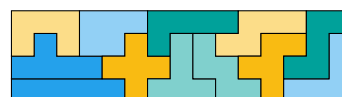
Les rectangles de largeur 2 possibles ont une aire qui est un multiple de 2 (car l'aire d'un rectangle est égale au produit de la largeur par la longueur), mais également multiple de 5 (car fait avec des pentominos). Leur aire doit donc être un multiple de 10. De plus, il n'y a que 6 pentominos de largeur au plus 2, le I, le L, le N, le P, le Y, et le U. Il est facile de voir qu'on ne peut pas utiliser le U, car la case au milieu du U ne pourra plus être couverte. On ne peut donc utiliser qu'au plus 5 pentominos (le I, le L, le N, le P, et le Y). Cela autorise uniquement de faire les rectangles 2×5 et 2×10 . Il est cependant impossible de faire le 2×5 . On peut facilement voir, qu'après avoir placé un pentomino, ce qui reste n'est pas une des pentominos restants. Pour le rectangle 2×10 , une solution est donnée ci-contre.



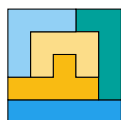
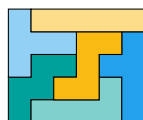
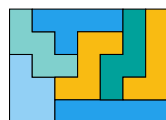
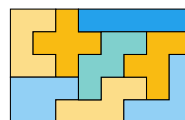
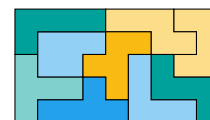
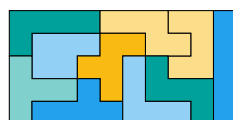
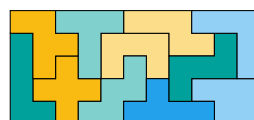
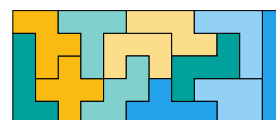
Les rectangles de largeur 3 possibles ont une aire qui est un multiple de 3 (car l'aire d'un rectangle est égale au produit de la largeur par la longueur), mais également multiple de 5 (car fait avec des pentominos). Leur aire doit donc être un multiple de 15. De plus, il y a 12 pentominos donc l'aire maximale est et $12 \times 5 = 60$. Les aires possibles sont donc 15, 30, 45 et 60, ce qui nous donne des rectangles de taille 3×5 , 3×10 , 3×15 et 3×20 . Des solutions pour ces rectangles sont données ci-dessous.



Les rectangles de largeur 4 possibles ont une aire qui est un multiple de 4 (car l'aire d'un rectangle est égale au produit de la largeur par la longueur), mais également multiple de 5 (car fait avec des pentominos). Leur aire doit donc être un multiple de 20. De plus, il y a 12 pentominos donc l'aire maximale est et $12 \times 5 = 60$. Les aires possibles sont donc 20, 40, et 60, ce qui nous donne des rectangles de taille 4×5 , 4×10 et 4×15 . Des solutions pour ces rectangles sont données ci-dessous.


 4×5

 4×10

 4×15

Les rectangles de largeur 5 possibles ont une aire qui est un multiple de 5 et au plus 60 (car on a que 12 pentominos). Les aires possibles sont donc 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55 et 60, ce qui nous donne des rectangles de taille 5×5 , 5×6 , 5×7 , 5×8 , 5×9 , 5×10 , 5×11 et 5×12 . Des solutions pour ces rectangles sont données ci-dessous.


 5×5

 5×6

 5×7

 5×8

 5×9

 5×10

 5×11

 5×12

Triplement d'aire : Prendre un pentomino, dessiner sur une grille sa forme avec les longueurs multipliées par 3. Comme la longueur est multipliée par 3, l'aire est multipliée par 9 et vaut donc $9 \times 5 = 45$. Réaliser ensuite cette forme triple avec 9 des pentominos autres que celui choisi. Les solutions pour ce problème sont données Figure 3.

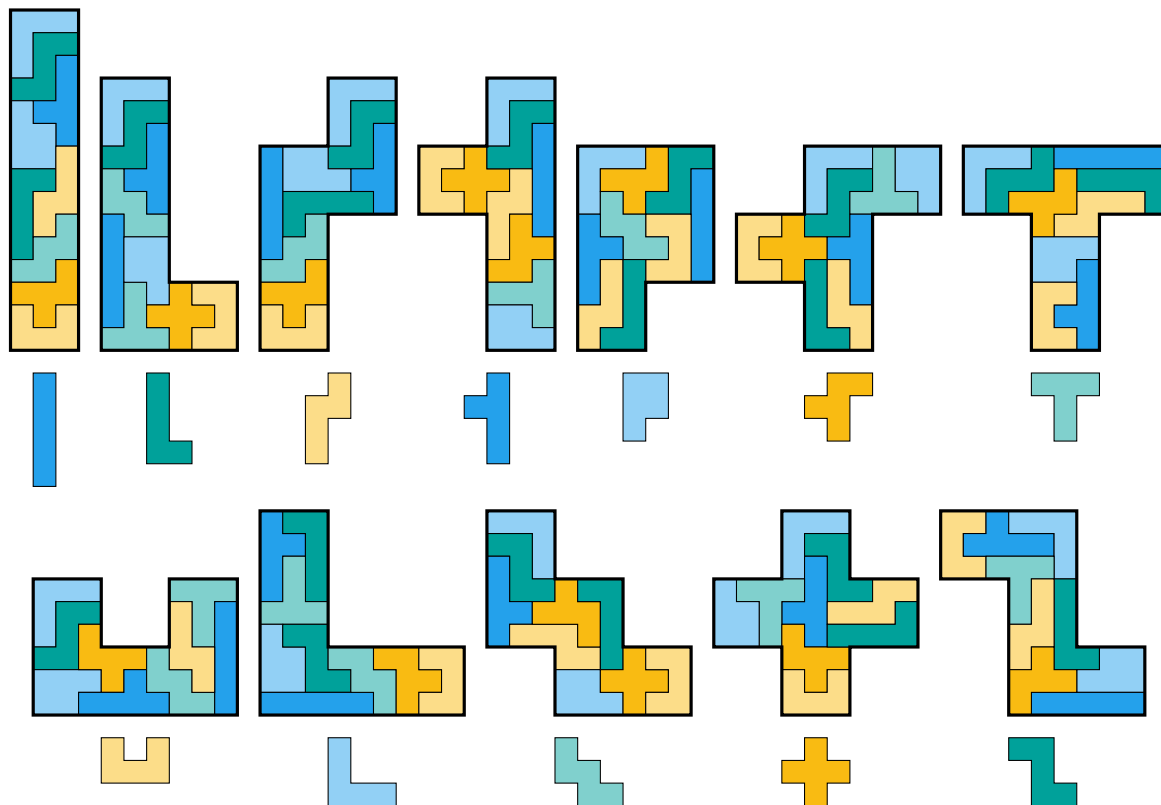


FIGURE 3 – Des solutions pour les puzzles du triplement d'aire