

Fiche pédagogique

Activité : Théorème du nid d'abeille

Objectifs pédagogiques : Aborder le mode de vie de certains insectes bâtisseurs et le rôle important de leur nid.

Mieux comprendre les notions de aire et périmètre et leurs relations.

S'initier à la notion de pavage et de translation et rotation par la manipulation.

Notions abordées : Géométrie : pavage, polygones (triangle, carré, hexagone), aire, périmètre.

Compétences développées :

★ **Chercher :**

- Emettre des hypothèses et les vérifier.
- Organiser, tester et ajuster différentes stratégies pour résoudre un problème.

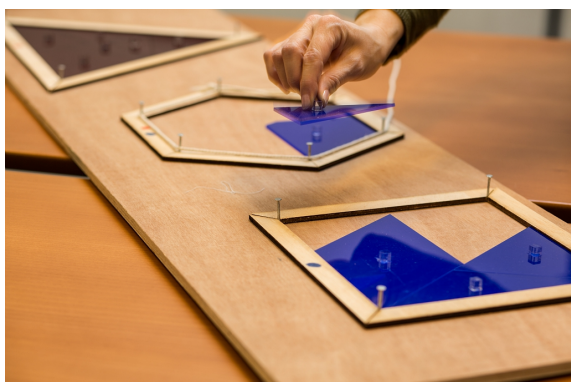
★ **Représenter :** Utiliser différentes positions d'une même forme géométrique.

★ **Raisonner :** Procéder par la méthode essai-erreur.

★ **Communiquer :** Utiliser un vocabulaire adéquat pour décrire le théorème de Pythagore.

Matériel nécessaire : Puzzle nid d'abeille. Si possible avoir une ruche ou un nid de guêpe à montrer.

Niveau : À partir du cycle 3.



Messages à faire passer

- Si un même ensemble de pièces permet de paver deux formes, alors celles-ci sont de même aire.
- Deux formes qui ont la même aire n'ont pas forcément le même périmètre. Inversement, deux formes qui ont le même périmètre n'ont pas forcément la même aire.
- Il est important de pratiquer la démarche scientifique. Une fois une hypothèse émise, il faut la tester ou la prouver. Emettre une hypothèse qui s'avérera ensuite fausse n'est pas une erreur. Ce qui est une erreur c'est de continuer à avancer une hypothèse alors qu'elle a été infirmée.
- Se tromper n'est pas grave. Si on arrive pas à la solution, il est important de recommencer d'une autre manière.

Déroulement :

Généralités sur les abeilles On aborde quelques généralités sur les abeilles et autres insectes qui font des nids de manière interactive en posant des questions. Exemples de questions.

- Comment reconnaît-on un insecte ?
Insectes = 3 paires de pattes et deux paires d'ailes le plus souvent. Corps divisé en trois parties : tête thorax et abdomen. Les pattes sont fixées sur l'abdomen.
- Parmi les insectes, comment reconnaît-on une abeille ?

L'abdomen est le plus souvent rayé de jaune et noir, parfois brun selon les espèces), avec une forme ovale. Son corps est recouvert de poils fins (pour transporter le pollen).

Il existe d'autres insectes noir et jaune, principalement les guêpes et les syrphes (espèces de mouches). Ceux-ci sont en général de couleur plus vives que les abeilles et leurs corps sont lisses sans poils. La guêpe a une taille (entre le thorax et l'abdomen) très fine. Les syrphes ont de gros yeux. Seules les abeilles butinent. Les syrphes ne font que se poser sur les fleurs.

Il y a près de 1000 espèces d'abeilles en France, plus de 600 en Provence. La plupart sont solitaires et ne produisent pas de miel. Quelques espèces, dont l'abeille domestique *Apis mellifera* vivent en colonie dans des ruches et produisent du miel.

- Comment sont les ruches à l'intérieur ?
Une ruche est composée de différents rayons qui sont constitués de cellules hexagonales appelées alvéoles.
- Qu'est-ce qui est stocké dans les alvéoles ?
Principalement du miel (> 80%), mais aussi de la gelée royale, des œufs, du pollen et de la propolis.
- Pourquoi les abeilles stockent-elles du miel ?
Le miel est la nourriture. Elles le stockent pour l'hiver (mais aussi les périodes de canicules).
- Que font les abeilles l'hiver ? Elles hivernent : elles se regroupent à l'intérieur de la ruche en grappe d'hivernage, et battent des ailes pour se réchauffer. La température minimale au cœur d'une grappe d'abeilles en hiver ne doit pas descendre en dessous de 10°C, tandis que la zone du couvain est maintenue en permanence entre 34°C et 35°C. Pour cela, elles ont besoin d'énergie, donc de nourriture = miel.
Avoir stocké beaucoup de miel est donc important. Dans la nature, en moyenne, environ la moitié des nouveaux essaims ne passent pas le premier hiver. Faute de miel, ils meurent de faim et de froid.

Présentation du théorème et du puzzle Faire des alvéoles hexagonales permet de minimiser la quantité de parois à bâtir (et donc d'énergie consacrée) pour une contenance donnée. Cela permet donc aux insectes de minimiser le temps et les efforts de construction afin de s'adonner à d'autres tâches, notamment la recherche et l'accumulation de nourriture pour passer l'hiver. Le fait que les hexagones permettent de minimiser la quantité de parois est connu en mathématique sous le nom de théorème du nid d'abeilles. Celui-ci affirme que de toutes les formes qui permettent de paver le plan, celle qui a le plus petit périmètre pour une aire donnée est l'hexagone.

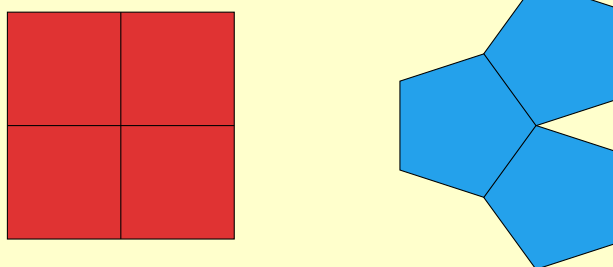
Bien insister sur le fait qu'on cherche des formes avec lesquelles on peut paver le plan, et donc assembler pour construire des rayons. Ce n'est pas possible avec toutes les formes. Par exemple, on ne peut pas paver le plan avec des disques. Pourtant, d'après l'inégalité isopérimétrique, c'est la forme qui a le plus petit périmètre pour une aire donnée.

Dire que l'activité consiste à montrer ce théorème dans le cas particulier des polygones réguliers. Les seuls polygones réguliers avec lesquels on peut paver le plan sont les triangles équilatéraux, les carrés et les hexagones. Il est facile de voir qu'on ne peut pas le faire avec les autres.

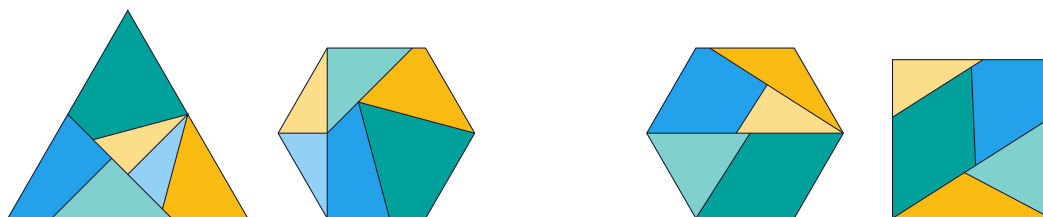
Conseil pédagogique

C'est l'occasion de réviser les noms des polygones : triangles, quadrilatères, pentagones, hexagones ... Puis des polygones réguliers (côté de même longueur et angles égaux) ; triangle équilatéral, carré, hexagone régulier ...

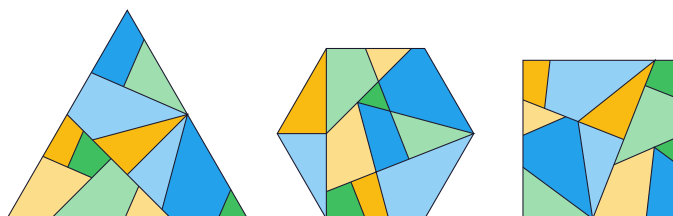
On peut aussi prendre le temps de rappeler pourquoi les seuls polygones réguliers avec lesquels on peut paver le plan sont les triangles équilatéraux, les carrés et les hexagones. En effet, il faut que la valeur des angles divise 360° . Les angles d'un pentagone régulier sont de 108° qui ne divise pas 360° . Les polygones réguliers à plus de 7 côtés ont des angles dont la valeur est strictement supérieure à 120° et strictement inférieure à 180° et donc ne divise pas 360° . Il est possible de faire une démonstration visuelle en utilisant plusieurs polygones réguliers qu'on place les uns à côté des autres autour d'un sommet pour voir que pour certains on peut compléter le tour et pour d'autre non. La figure ci-dessous illustre cela pour le carré et le pentagone régulier.



On explique donc qu'il y a 150 millions d'années les abeilles pouvaient choisir entre trois formes d'alvéoles : en triangle équilatéral, en carré ou en hexagone régulier. Et on montre les puzzles formé de ces tris formes, de même aire. Cette aire correspond donc à la quantité de miel qu'une abeille peut mettre dans une alvéole. Dans la version habituelle, le puzzle dispose de deux jeux de pièces ; un premier qui permet de former (= paver) le triangle équilatéral et l'hexagone régulier, et un deuxième qui permet de former le carré et l'hexagone régulier. Voir les dessins ci-dessous.



Dans une autre version plus complexe, dessinée ci-contre, le puzzle dispose d'un seul jeu de pièces qui permet de former (= paver) le triangle équilatéral, le carré, et l'hexagone régulier.



Le fait qu'on puisse paver le triangle équilatéral et l'hexagone régulier avec le même jeu de pièces montre qu'ils ont tous deux la même aire. De même, le fait qu'on puisse paver le carré et l'hexagone régulier avec le même jeu de pièces montre qu'ils ont tous deux la même aire. Ainsi les trois polygones ont la même aire. Autrement dit, on peut mettre autant de miel dans chacune des trois alvéoles.

Le périmètre de chaque polygone correspond à la longueur de mur en cire que l'abeille va devoir faire. Plus le périmètre est petit, moins il sera coûteux de construire la alvéole.

Les participants sont invités à émettre des hypothèses sur les périmètres des trois figures. Sont-ils tous égaux ? Y en a-t-il un plus petit que les autres ? Si oui, lequel ?

Conseil pédagogique

Il est important de rappeler qu'émettre des hypothèses est essentiel en sciences. Et qu'il est important d'en faire même si elles s'avèrent fausses par la suite. La démarche scientifique consiste ensuite à tester les hypothèses et à écarter les fausses. Faire une hypothèse fausse n'est pas une erreur, bien au contraire. Les scientifiques font cela en permanence (99% du temps). L'erreur consisterait en revanche à ne pas écarter une hypothèse qui est invalidée par l'expérience. C'est pour cela qu'on ne parle pas des hypothèses qui se sont avérées fausses.

À l'aide de cordelettes, les participants peuvent ensuite mesurer les périmètres des trois figures et confronter leurs hypothèses au résultat. Ils constatent que l'hexagone a le plus petit périmètre. On rappelle alors l'énoncé du théorème.

Réalisation des puzzles On laisse ensuite les participants réaliser les puzzles pour bien vérifier que les formes ont toute la même aire.

Si certains ont des difficultés, on peut les aider en leur donnant quelques conseils.

- Essayer de positionner les plus grosses pièces en premier.
- Si la tentative de solution laisse une partie vide où il est impossible de positionner une pièce parce que soit parce que son aire est trop petite ou parce qu'un de ses angles est trop aigu, alors on elle ne pourra pas être complétée. On peut donc abandonner cette voie et essayer d'autres positionnements.

A la fin de la séance, on rappelle l'énoncé du théorème et sa signification pour les abeilles. On peut ajouter que si les abeilles "utilisent" ce théorème depuis 150 millions d'années, ce fut bien plus tardif pour les humains : pour les polygones réguliers, c'est connu depuis 2500 ans, mais il n'a été prouvé qu'en 1943 par F. Toth pour les polygones quelconques, et qu'en 1999 par T. C. Hales pour la version générale pour des pièces avec des formes aux côtés courbes.