



Fiche pédagogique

Activité : Coloration de graphes : introduction

Objectifs pédagogiques : Se familiariser avec la notion de graphe. Pratiquer les contraintes et raisonnements de type “si ... alors ...”. A partir du cycle 3, s’initier à la preuve mathématique.

Notions abordées : Graphes, coloration, contrainte, raisonnement logique, condition nécessaire.

Compétences développées :

A. Chercher :

- A1. S’engager dans une démarche scientifique.
- A2. Essayer plusieurs pistes de résolutions.

C. Représenter : C1. Utiliser des représentations de graphes.

D. Reasonner : D2. Résoudre des problèmes nécessitant la construction d’une démarche qui combine des étapes de raisonnement.

Matériel nécessaire :

Version posters/bâches : posters ou bâches avec les jeux de colorations, jetons de différentes couleurs.

Version grandeur nature : cerceaux et lattes, chapeaux (ou chasubles ou papiers ou ...) de 4 couleurs différentes.

Niveau : De la maternelle jusqu’au collège.

Messages à faire passer

Dès la maternelle :

- Apprendre à raisonner : si une hypothèse (supposition) débouche sur une contrainte non satisfaite, il faut l’éliminer.
- Se tromper n’est pas grave. Si on n’arrive pas à la solution, il est important de recommencer d’une autre manière.
- Un problème peut avoir plusieurs solutions, et pas nécessairement une seule.

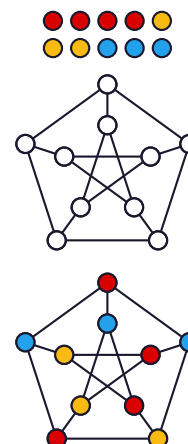
A partir du cycle 3 :

- Un jeu peut être impossible à résoudre.
- Toute réponse à un problème doit être accompagnée d’une preuve (ou à défaut d’arguments) qu’elle convient.
- En particulier, ne pas arriver à résoudre un jeu, n’est pas suffisant pour dire qu’il est impossible. Il faut prouver que personne ne peut y arriver.
- Des applications complètement différentes peuvent se modéliser par un problème identique.

Déroulement :

On commence donc par leur décrire que ce qu'ils ont devant eux sont des graphes, c'est-à-dire un ensemble de sommets (les cercles) reliés par des arêtes (des courbes reliant des paires de sommets). On insiste sur le fait que le tracé d'une arête n'a pas d'importance et que la seule chose importante est les deux sommets qu'elle relie. Au dessus de chaque graphe, se trouvent autant de cercles colorés que de sommets dans le graphe, comme dans l'exemple ci-contre.

On explique ensuite le jeu de coloration. On doit d'abord placer sur chacun des cercles colorés un jeton de la couleur du cercle. Cela nous donne le jeu de jetons. Il faut ensuite mettre sur chaque sommet du graphe un de ces jetons avec la contrainte que deux sommets reliés par une arête doivent avoir des jetons de couleurs différentes. Ci-contre est donnée une solution pour le jeu ci-dessus.



On peut par exemple utiliser certains des jeux donnés page 5, mais bien entendu on peut en créer à l'envie.

Le but de l'activité est de laisser les participants trouver par eux-mêmes. Si cela s'avère difficile, on peut cependant leur donner des conseils.

- En premier lieu, il faut les inciter à faire des suppositions de couleur sur un ou plusieurs sommets et d'essayer de voir s'ils peuvent terminer la coloration du graphe. eux-ci doivent se placer sur des sommets qui sont deux à deux non reliés.
- Pour certains jeux, on peut leur indiquer des sommets (ou ensemble de sommets) particuliers à regarder. Par exemple, les sommets au centre du graphe dans les jeux 1, 16 page 5 ou 27 page 5.

Version grandeur nature : Dans la version grandeur nature, les graphes ne sont plus représentés sur des bâches ou des posters, mais sur le sol. Les sommets des graphes sont les cerceaux et leurs arêtes sont dessinées avec les lattes.

À côté de chaque graphe se trouvent autant de chapeaux (ou chasubles ou cartons) de couleurs (bien choisies) que de sommets dans le graphe. On leur explique ensuite le jeu de coloration. Autant de personnes qu'il y a de chapeaux doivent se présenter devant chaque graphe et prendre un chapeau chacune. Chaque participant doit ensuite aller se placer sur un cerceau (un participant exactement sur chacun des cerceaux) sous la contrainte que les occupants de deux cerceaux reliés par une arête (en lattes) doivent avoir des chapeaux de couleurs différentes. L'activité peut aussi se faire avec moins de personnes que de chapeaux. Il faut alors placer des chapeaux (sans personne) sur les sommets.

A partir du cycle 3, il est intéressant de leur parler des différentes applications de la coloration comme celles évoquées page 4. On peut aussi "scénariser" le jeu grandeur nature en fonction de l'application. Par exemple, en présentant la version grandeur nature en disant à chaque participant qu'il est une antenne, et en demandant à chacun de prendre un des chapeaux de couleur tout en respectant les consignes. On peut aussi faire une approche différente dans le style de l'activité A table de la MMI de Lyon.

Didactique et pédagogie.

Cas des jeux impossibles : Pour les plus jeunes, il vaut mieux ne pas présenter de jeu impossible, pour ne pas les décourager.

En revanche, à partir du cycle 3, il est important de le faire. D'une part pour ancrer l'idée que des problèmes posés peuvent ne pas être réalisables. D'autre part, pour s'initier à la démarche scientifique : poser une hypothèse (ici "tel jeu est impossible"), accumuler des arguments étayant cette hypothèse (ici du genre "je n'y suis pas arrivé et ma voisine qui est super intelligente non plus"), et enfin donner une vraie preuve de l'impossibilité. Il est important d'insister sur deux choses : la valorisation de l'émission d'hypothèse, même celles qui s'avèreront incorrecte à la fin, et la nécessité d'avoir une preuve argumentée pour qu'une hypothèse passe du rang d'hypothèse à vérité. Pour les jeux impossibles présentés ci-dessous (à savoir les 12, 13, 16, 22, 25, 38, 39), des preuves sont données en solutions. Elles ne sont évidemment pas les seules possibles. sa zzzzzzz

Présenter des jeux impossibles présente le risque que certains participants se démobilisent pour tous les jeux et s'arrêtent rapidement de chercher en émettant l'hypothèse « C'est impossible » et en s'arrêtant là. Pour éviter ce genre de choses, un bon moyen est de présenter cinq ou six jeux et de demander d'identifier celui qui est impossible, en trouvant les solutions des autres, et si possible en donnant une preuve de l'impossibilité.

On peut faire remarquer que l'impossibilité de colorer un graphe dépend du nombre de couleurs utilisées, mais aussi de la répartition des couleurs. Le jeu 39 est impossible car le graphe n'admet pas de solution avec 2 couleurs, quelle que soit la répartition entre ces deux couleurs. Pour le graphe des jeux 37 et 38, c'est possible avec la bonne répartition : avec 6 jetons rouges et 4 bleus comme dans le jeu 37, il y a une solution ; en revanche, avec 5 jetons de chaque couleur comme dans le jeu 38, il n'y en a pas.

Nombres de solutions : Il peut être intéressant de poser la question de savoir s'il y a une ou plusieurs solutions (pour les jeux qui en admettent une).

Si on fait la version posters, avec différents groupes faisant les mêmes jeux, on peut comparer les différentes réponses. Sinon, une fois que les candidats ont trouvé une solution,

La plupart des jeux faisables ont plusieurs solutions. On peut faire remarquer que c'est en particulier des jeux où deux couleurs ont le même nombre de jetons. En effet, à partir d'une solution, on peut en créer une autre en permutant les jetons des deux couleurs. En revanche, les jeux 10, 17, 18, 37 n'ont qu'une seule solution. Ce sont des jeux où il y a exactement deux couleurs avec un nombre différent de jetons. Il n'est pas très compliqué de voir que la coloration est fixée, car une fois la couleur d'un sommet choisie, celle de tous les autres est forcée de proche en proche. (Voir 2-coloration grandeur nature.)

Complément : En classe, une activité complémentaire à la version grandeur nature consiste à demander aux élèves de représenter les graphes au sol avec les cerceaux et les lattes à partir d'un dessin. A l'inverse, on peut aussi demander aux élèves de dessiner le graphe au sol et confronter les différentes images.

Aller plus loin : Cette activité peut être suivie par les activités 2-coloration grandeur nature et Coloration gloutonne grandeur nature. D'autres activités et problèmes autour de la coloration peuvent être trouvés dans le chapitre 5 *Coloration des sommets* et la partie 6.2 *Coloration des graphes planaires* du manuel *Galejade*.

Applications de la coloration : La coloration de graphes est une notion centrale en théorie des graphes qui permet de modéliser de nombreux problèmes pratiques, typiquement des problèmes d’allocations de ressources :

- emploi du temps et plus généralement problèmes d’ordonnancement. Les sommets du graphe sont des tâches (par exemple des examens de bac). On relie deux sommets s’ils sont incompatibles, c’est-à-dire qu’ils correspondent à des tâches ne pouvant pas se faire en même temps (par exemple si des élèves doivent passer les deux examens). Les couleurs représentent ensuite des créneaux horaires disjoints. Le but est d’assigner les couleurs aux tâches de telle sorte que deux tâches incompatibles n’aient pas la même couleur.
- allocation de fréquences. Les sommets du graphe sont les antennes émettrices (radio ou de téléphonie) et les couleurs les fréquences radio. Lorsque deux antennes ont des zones d’émission qui s’intersectent, alors elles ne peuvent utiliser la même fréquence, sinon, dans l’intersection de leurs zones, il y aura des interférences empêchant une bonne réception. On relie donc les deux sommets correspondants par une arête. (Voir Figure 1.) Allouer des fréquences aux antennes pour éviter les interférences revient alors à attribuer des couleurs aux sommets du graphe de telle sorte que deux sommets reliés par une arête aient des couleurs différentes.

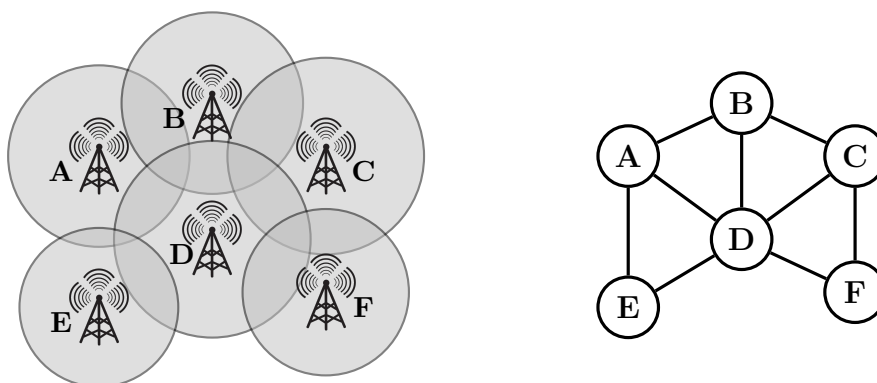
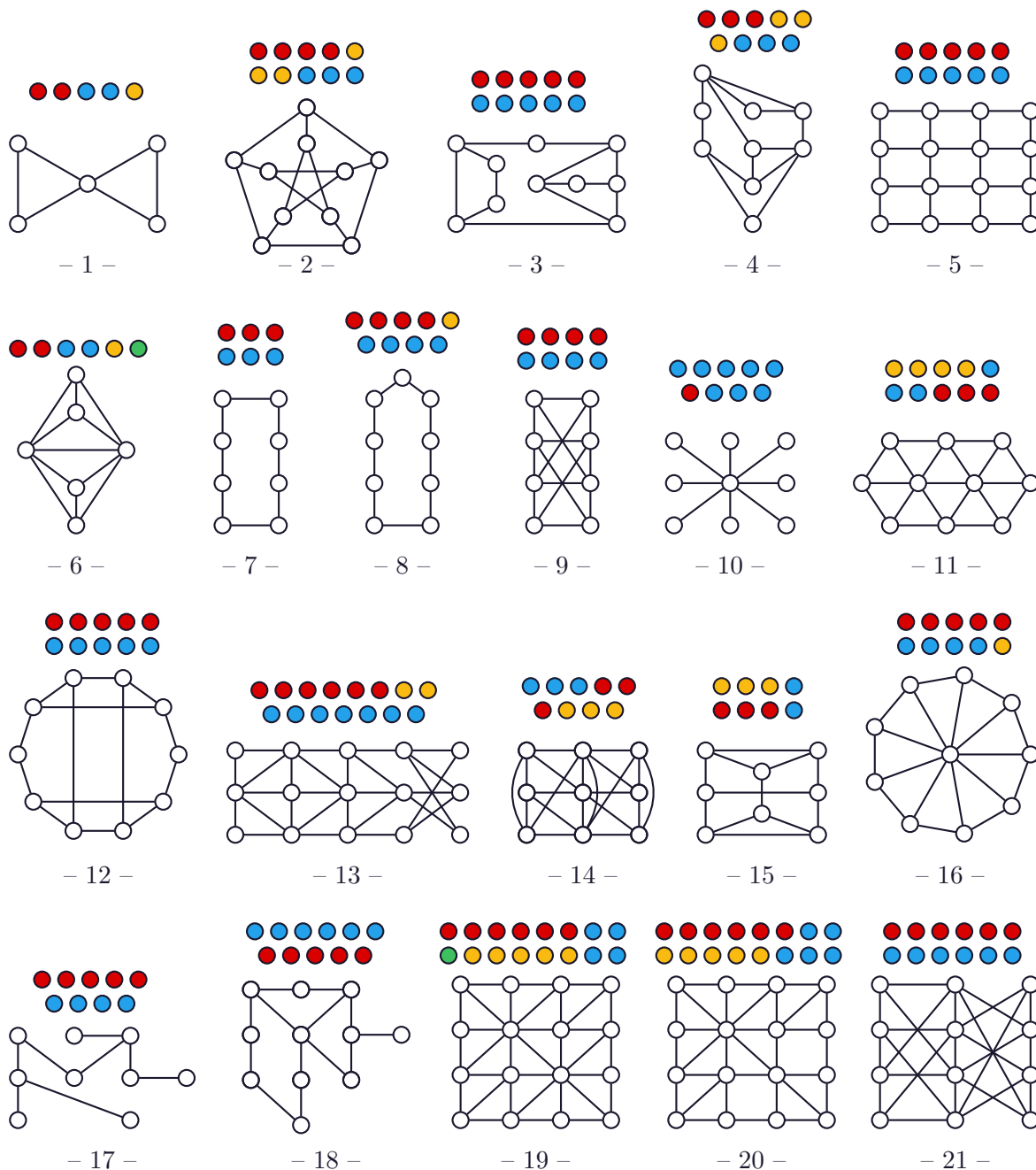


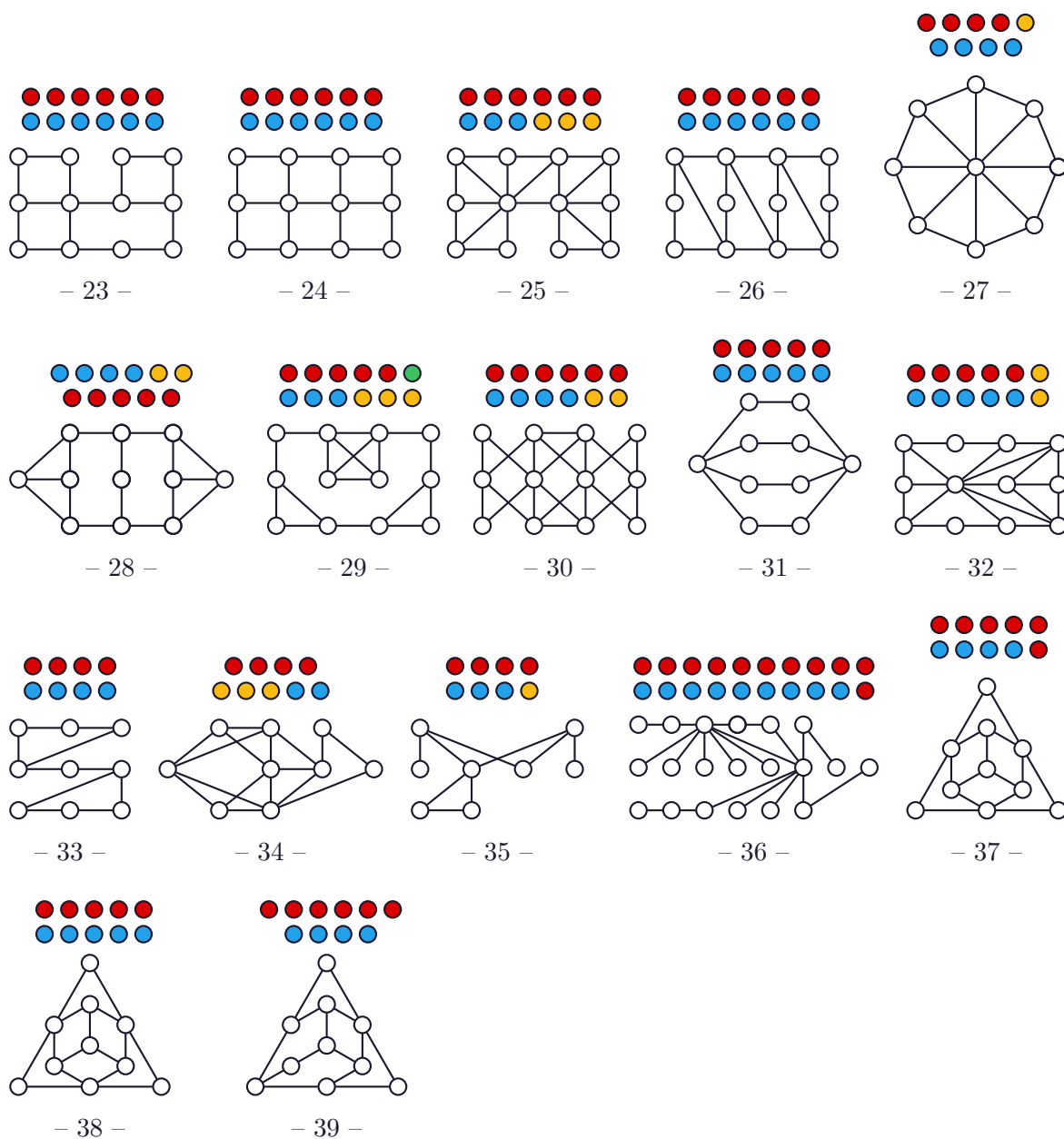
FIGURE 1 – Modélisation d’un réseau d’antennes par un graphe d’interférence.

Propositions de Jeux :

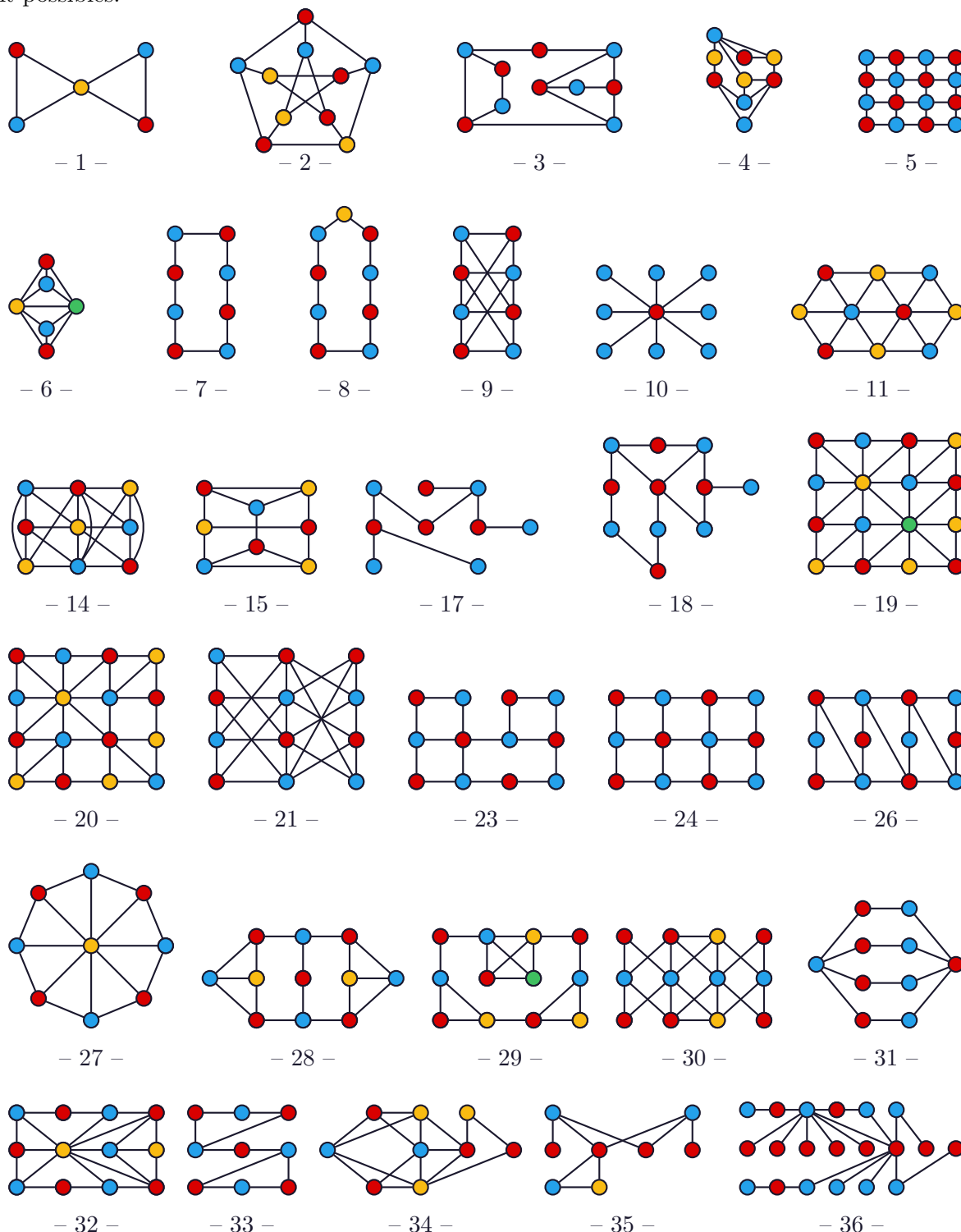
Nous donnons ici quelques exemples de jeux possibles. Ils sont de difficultés différentes et certains sont même impossibles. Voici une classification par niveaux de difficulté.

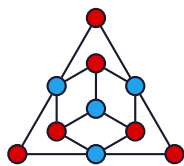
- Jeux **très faciles** : 7, 10.
- Jeux **faciles** : 1, 3, 5, 6, 8, 9, 17, 18, 21, 23, 24, 26, 27, 31, 33, 37.
- Jeux **moyens** : 2, 4, 11, 14, 15, 28, 29, 30, 32, 34, 35, 36.
- Jeux **difficiles** : 19, 20.
- Jeux **impossibles** avec **preuve facile** : 12, 16, 38, 39.
- Jeux **impossibles** avec **preuve difficile** : 13, 22, 25.



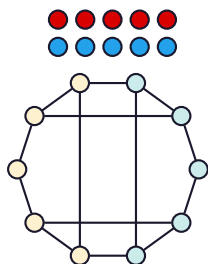


Solutions : Nous donnons ici une solution pour les jeux de coloration présentés ci-dessous. Pour la plupart d'entre eux, plusieurs solutions sont possibles. Il est donc plus que probable que ceux qui pratiquent l'activité trouvent des solutions différentes de celles présentées ici. Sept problèmes, à savoir les 12, 13, 16, 22, 25, 37 et 39, n'admettent pas de solution. Pour chacun d'entre eux, nous donnons une preuve de la non existence de solutions. Là aussi, d'autres preuves sont possibles.



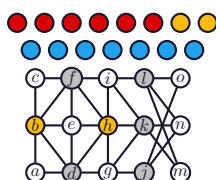


– 37 –



– 12 –

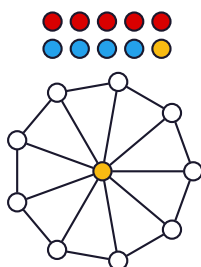
Pour ce graphe, nous avons deux couleurs à disposition (rouge et bleu). Mais, on ne peut pas colorer ce graphe avec deux couleurs. En effet, ce graphe possède deux cycles impairs (i.e. avec un nombre impair de sommets) : celui formé par les sommets en vert clair, et celui formé par les sommets en jaune dans la figure ci-contre. En effet, sur un cycle impair, il est impossible de faire alterner deux couleurs.



– 13 –

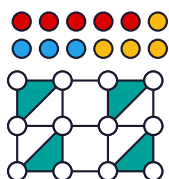
Observons que les trois sommets d'un triangle doivent être de couleurs différentes. Ainsi chacune des trois couleurs apparaît sur chaque triangle. Supposons que ce soit possible de colorer avec les jetons fournis. abc , efh et ihk sont des triangles. Comme on ne dispose que de deux jetons jaunes, l'un d'entre eux doit forcément être sur h , le seul sommet qui soit dans deux de ces triangles. De même, abc et bcf sont des triangles, donc le deuxième jeton jaune doit être sur b , le sommet commun à ces deux triangles.

Une fois placé les deux jetons jaunes, il ne reste que deux couleurs. On peut bien colorer le graphe restant avec deux couleurs. Cependant une telle coloration est fixée à permutation des couleurs près. En effet, une fois que la couleur d'un sommet est fixée, celle de ses voisins doit être différente, celles des voisins de ses voisins la même et ainsi de suite. Ainsi une coloration en deux couleurs de ce graphe a forcément 5 sommets d'une couleur (ceux en gris dans la figure ci-dessus) et 8 de l'autre (ceux en blanc). Or ici nous disposons de 6 jetons rouges et 7 jetons bleus.



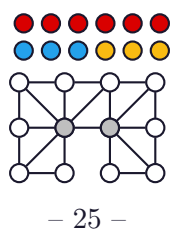
– 16 –

Pour ce graphe, nous avons un seul jeton de couleur jaune. Celui-ci doit forcément être au sommet central qui est relié à tous les autres. Il reste ensuite les deux couleurs, rouge et bleu, pour colorer le cycle externe. Mais, cela est impossible car ce cycle est impair (il a 9 sommets), et qu'on ne peut donc pas faire alterner deux couleurs sur ce cycle.

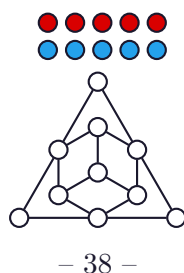


– 22 –

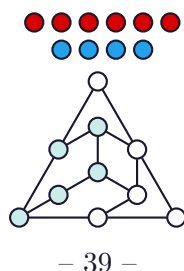
Ce graphe possède 4 triangles disjoints représentés en vert sur la figure ci-contre. Comme on ne dispose que de trois couleurs de jetons, chacun de ces triangles doit avoir un sommet de chaque couleur. Il faudrait donc au moins quatre jetons de chaque couleur pour avoir une solution, mais nous ne disposons que de trois jetons bleus.



Dans ce problème, nous disposons de 6 jetons rouges. Il faut pouvoir placer ces jetons sur un ensemble indépendant du graphe, c'est-à-dire un ensemble dont aucune paire n'est reliée par une arête. Montrons que ceci est impossible. On peut tout d'abord facilement voir qu'aucun des deux sommets en gris sur la figure ci-contre ne peut être dans un tel ensemble indépendant car ils ont trop de voisins. Les sommets non-gris forment un chemin de dix sommets sur lesquels il est impossible de mettre 6 jetons rouges. En effet, deux sommets consécutifs ne peuvent pas être rouge, donc on peut placer les jetons rouge au mieux un sommet sur deux, soit 5 fois.



Pour ce graphe, nous avons deux couleurs à disposition (rouge et bleu). On peut bien colorer ce graphe avec deux couleurs (voir la solution au problème 37). Cependant une telle coloration est fixée à permutation des couleurs près. En effet, une fois que la couleur d'un sommet est fixée, celle de ses voisins doit être différente, celles des voisins de ses voisins la même et ainsi de suite. Ainsi une coloration en deux couleurs de ce graphe a forcément 6 sommets d'une couleur et 4 de l'autre. Or ici nous disposons de 5 jetons de chaque couleur.



Pour ce graphe, nous avons deux couleurs à disposition (rouge et bleu). Mais, on ne peut pas colorer ce graphe avec deux couleurs. En effet, ce graphe possède des cycles impairs (i.e. avec un nombre impair de sommets). Par exemple, celui formé par les sommets en vert clair dans la figure ci-contre. En effet, sur un cycle impair, il est impossible de faire alterner deux couleurs.