

## Fiche pédagogique

### Activité : Dichotomie

**Objectifs pédagogiques :** Découvrir et comprendre le principe de la recherche par dichotomie.

**Notions abordées :** Dichotomie, arbre binaire, tri, puissances de 2.

**Matériel nécessaire :** Cerceaux, lattes et fiches avec les objets/personnages à trouver et avec questions pour la version grandeur nature.

Poster ou bâche avec le réseau et les fiches pour la version sur table.

**Niveau :** Cycle 3 jusqu'à la terminale.

**Durée :** 30 minutes.

**Déroulement.** Nous détaillons ci-dessous la version grandeur nature, la version sur table s'en déduisant très facilement.

Pour commencer, on prend un ensemble d'objets, personnages ou autres, de taille une puissance de 2, disons  $2^k$ , que l'on peut différencier avec  $k$  caractéristiques. Typiquement on prend un ensemble de taille  $16 = 2^4$  avec 4 caractéristiques ou un ensemble de taille  $32 = 2^5$  avec 5 caractéristiques. Comme exemple pour cette fiche, nous prendrons un ensemble de 16 personnages avec 4 caractéristiques : la couleur du pantalon la couleur du T-Shirt, la couleur des cheveux et le genre. Le tableau ci-dessous donne les caractéristiques de chaque personnage.

caractéristiques	Pantalon	T-shirt	Cheveux	Genre
Alex	blanc	bleu	bruns	garçon
Betty	blanc	bleu	blonds	fille
Chris	noir	bleu	bruns	garçon
Dina	noir	bleu	blonds	fille
Enzo	noir	jaune	bruns	garçon
Fanny	noir	jaune	blonds	fille
Gaspard	blanc	jaune	bruns	garçon
Helen	blanc	jaune	blonds	fille
Ilan	blanc	jaune	blonds	garçon
Jade	blanc	jaune	bruns	fille
Kevin	noir	jaune	blonds	garçon
Lea	noir	jaune	bruns	fille
Malo	noir	bleu	blonds	garçon
Nadia	noir	bleu	bruns	fille
Oscar	blanc	bleu	blonds	garçon
Peggy	blanc	bleu	bruns	fille

On procède comme pour un tour de magie. On demande aux participants de choisir une carte personnage parmi les 16 à disposition, sans la montrer. On leur dit qu'on va les faire passer sur le réseau magique et qu'on devinera ensuite quel est leur personnage. On les envoie alors vers l'arbre binaire représenté Figure 1 fait avec des cerceaux et des lattes. Chaque participant ayant une carte commence sur le sommet :cerceaux le plus à gauche (ici en rouge). A chaque fois qu'un participant arrive sur un cerceau, il se pose une question suivant la caractéristique de son personnage. La question correspond à la couleur du cerceau. Les questions sont les suivantes :

- Cerceau rouge : le pantalon de votre personnage est-il blanc ou noir ?
- Cerceau bleu : le T-shirt de votre personnage est-il jaune ou bleu ?
- Cerceau rouge : votre personnage est-il brun ou blond ?
- Cerceau rouge : votre personnage est-il une fille ou un garçon ?

A chaque cerceau, le candidat poursuit faire un prochain cerceau en prenant la direction de gauche si la réponse à la question est la première proposition (blanc, jaune, brun fille) et le direction de droite si si la réponse à la question est la deuxième proposition (noir, bleu, blond garçon), comme indiqué sur la Figure 1.

Une fois les participants arrivé sur le cerceau final (en noir sur la Figure 1), on devine quel personnage avait tiré chaque participant. Cela est facile en suivant le chemin en fonction des questions, chaque personnage arrive vers un cerceau final différent. Ainsi Jade arrive sur le cerceau le plus à gauche (en haut sur la Figure 1), Gaspard sur le suivant, et caetera, comme indiqué sur la Figure 1. Plutôt que de deviner oralement, on peut très bien, notamment quand il y a beaucoup de participants, placer au préalable sur chaque cerceau final, la carte représentant le personnage qui termine sur ce cerceau, face cachée. En arrivant à son cerceau terminal, chaque participant retourne alors la carte qui s'y trouve et découvre qu'on a bien prédit son personnage.

Evidemment, il n'y a rien de magique, et on interroge les participants sur comment on a fait. Il trouve en général, que cela dépend des questions, qu'un personnage arrive toujours au même cerceau terminal, et qu'un seul personnage arrive à un cerceau terminal. On peut éventuellement parler de bijection ou correspondance entre les cerceaux terminaux et les personnages.

On énonce alors qu'en fait ce qui a été fait est une recherche dichotomique et on explique précisément ce que c'est. Pour rechercher un élément dans un ensemble, on cherche des critères pour différencier des éléments entre eux. Ici nous avons quatre critères (couleur du pantalon, couleur du T-shirt, couleur des cheveux, genre) et deux personnages différents différent sur au moins un de ces critères. Ainsi en posant les quatre questions, on est sûr de différencier les personnages. Il est également à noter que pour chaque combinaison des quatre critères, on a exactement un personnage qui vérifie cette combinaison. Comme il y a deux possibilités par critères on a  $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  personnages. La première question sépare l'ensemble en deux sous-ensembles de huit personnages : ceux qui ont un pantalon blanc à gauche et ceux qui ont un pantalon noir de l'autre qui correspondent aux cerceaux bleus. La deuxième question redivise chaque sous-ensemble en deux en fonction de la couleur du T-shirt. On se retrouve alors avec quatre sous-ensembles de quatre personnages : ceux avec pantalon blanc et T-shirt jaune, ceux avec pantalon blanc et T-shirt bleu, ceux avec pantalon noir et T-shirt jaune, et ceux avec pantalon noir et T-shirt bleu, dans cet ordre de gauche à droite. Ces ensembles correspondent aux cerceaux jaunes. La troisième question divise chacun de ces sous-ensembles en deux, ce qui nous donne huit ensembles de deux personnages (les cerceaux vert). Enfin, la dernière question divise en deux chacun de ces ensembles pour donner 16 ensembles d'un seule personnage, les cerceaux noirs. On peut illustrer cette séparation en faisant avancer les 16 cartes personnages dans l'arbre binaire de la Figure 1.

**Lien avec le binaire** Expliquer ensuite qu'implicitement on a ordonné les personnages selon l'ordre des cerceaux noirs de gauche à droite : Jade < Gaspard < Helen < ... < Dina < Malo.

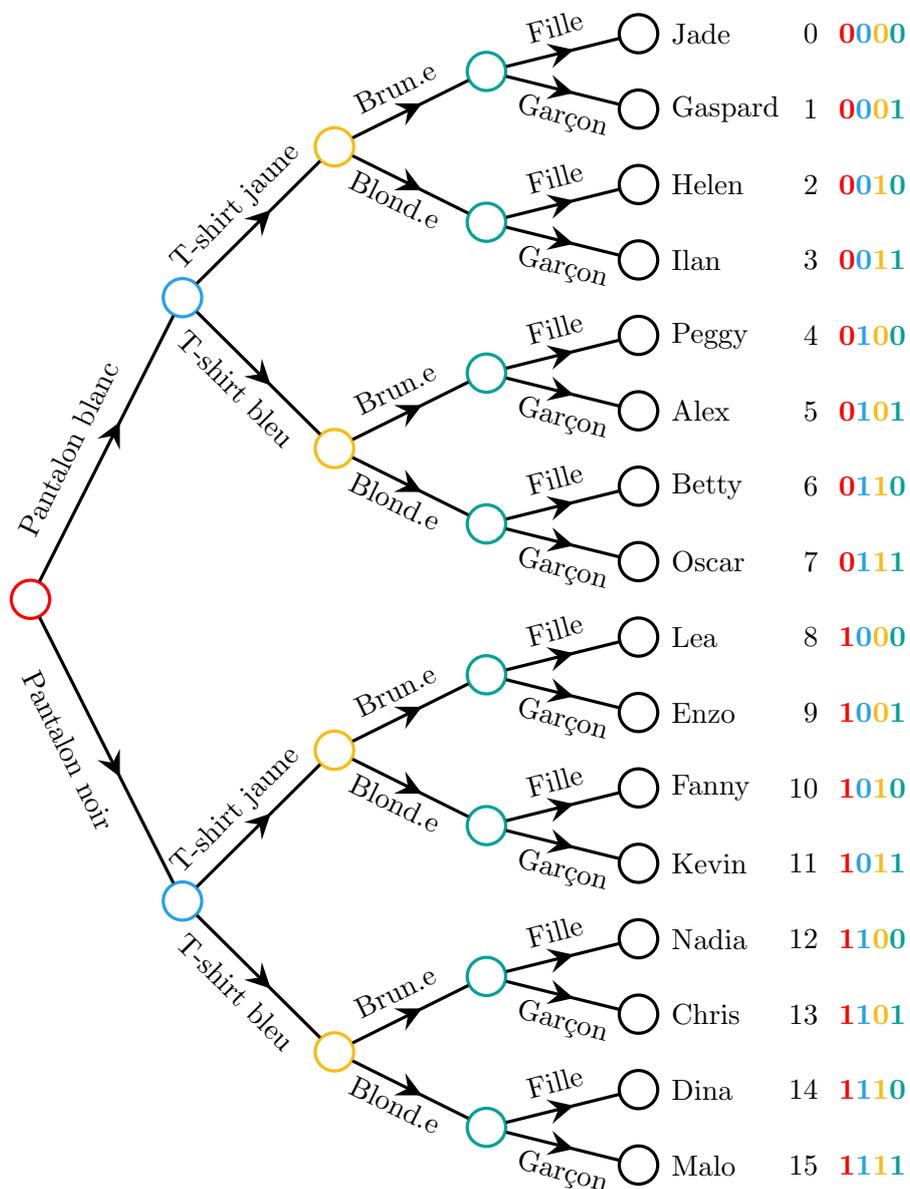


FIGURE 1 – L'arbre de tri binaire

On peut voir cet ordre comme en ayant numéroté les personnages avec des entiers croissants en commençant par 0. Jade aurait ainsi pour numéro 0, Garpard aurait 1, Helen aurait 2, ... Dina aurait 14 et Malo aurait 15. En fait, avec cette numérotation, notre recherche dichotomique revient à poser les questions suivantes :

- Cerceau rouge : le numéro du personnage est-il entre 0 et 7, ou bien entre 8 et 15 ?
- Cerceau bleu : le numéro du personnage est-il entre 0 et 3 ou entre 8 et 11, ou bien entre 4 et 7 ou entre 12 et 15 ?
- Cerceau rouge : le numéro du personnage est-il parmi 0,1,4,5, 8, 9, 12,13, ou bien parmi 2,3, 6,7, 10, 11, 14, 15 ?
- Cerceau rouge : votre personnage est-il pair ou impair ?

En fait, si on écrit 0 à chaque fois que la réponse à la question était la première proposition (c'est-à-dire quand le personnage allait vers la gauche) et si on écrit 1 à chaque fois que la réponse à la question était la deuxième proposition (c'est-à-dire quand le personnage allait vers la droite), alors on obtient pour chaque personnage un code propre qui correspond au chemin qu'il a effectué. Par exemple, dans la Figure 1, Alex qui est allé à gauche, puis à droite, puis à gauche puis à droite a pour code 0101 ; Jade qui est tout le temps allée à gauche a le code 0000 et Malo qui est allé tout le temps à droite a le code 1111. En fait, ce code est le code binaire du numéro du cerceau terminal où arrive le personnage. 0101 est le code binaire pour 5, 0000 est le code binaire pour 0 et 1111 est le code binaire pour 15. Avec ce codage binaire les questions posées sont les suivantes :

- Cerceau rouge : le premier chiffre du numéro du personnage est-il un 0 ou un 1 ?
- Cerceau bleu : le deuxième chiffre du numéro du personnage est-il un 0 ou un 1 ?
- Cerceau rouge : le troisième chiffre du numéro du personnage est-il un 0 ou un 1 ?
- Cerceau rouge : le quatrième chiffre du numéro du personnage est-il un 0 ou un 1 ?

A chaque fois, qu'on a un ensemble, on peut toujours ordonner ces éléments, c'est-à-dire les numéroté dans l'ordre croissant et à poser les questions ci-dessus pour obtenir le code binaire du numéro et à décoder le code binaire correspondant. C'est notamment ce qui est fait dans le tour de magie Devin binaire. La numérotation peut être arbitraire, et non explicite. C'était le cas au début quand on a posé nos questions sur les caractéristiques des personnages. C'est ce qui en général utilisé en biologie pour la classification des espèces ou les clés d'identification. C'est aussi ce qui à la base des systèmes experts, la technique d'intelligence artificielle fortement développée dans les années 1980.

Il peut parfois être nécessaire de créer la numérotation, mais on peut aussi utiliser un ordre préexistant. Plutôt que les caractéristiques des personnages, on aurait pu utiliser l'ordre alphabétique de leur nom et faire la recherche dichotomique basée sur cet ordre. On obtient alors l'arbre de tri donné Figure 2. On peut faire observer que cet arbre nous donne un codage binaire pour les lettres (ici les initiales de nos personnages). Celui correspond presque à la fin du codage ASCII utilisé pour coder les lettres dans les ordinateurs. Le codage ASCII, donné dans le Tableau 1, est décalé de un, car le premier caractère (codé par 0) n'est pas A, mais @.

Il est à noter qu'avec nos quatre caractéristiques (couleur du pantalon, couleur du T-shirt, couleur des cheveux, genre). En effet, les huit premiers personnages par ordre alphabétique n'ont aucune de ces caractéristiques en commun, ce qui est nécessaire pour que la première question sépare en deux.

Il est intéressant de noter que pour identifier un personnage parmi 16 il suffit de quatre questions, ce qui est considérablement plus rapide que de poser les 16 questions "est-ce untel?". En fait, comme une question permet de séparer un ensemble en deux, à chaque fois qu'on rajoute une question on double la taille de l'ensemble dans lequel on peut chercher. Ainsi avec  $k$  questions, on peut identifier un élément dans un ensemble de taille  $2^k$  (2 multiplié par lui

A : 1000001	B : 1000010	C : 1000011	D : 1000100
E : 1000101	F : 1000110	G : 1000111	H : 1001000
I : 1001001	J : 1001010	K : 1001011	L : 1001100
M : 1001101	N : 1001110	O : 1001111	P : 1010000
Q : 1010001	R : 1010010	S : 1010011	T : 1010100
U : 1010101	V : 1010110	W : 1010111	X : 1011000
Y : 1011001	Z : 1011010		

TABLE 1 – Code ASCII des lettres de l’alphabet.

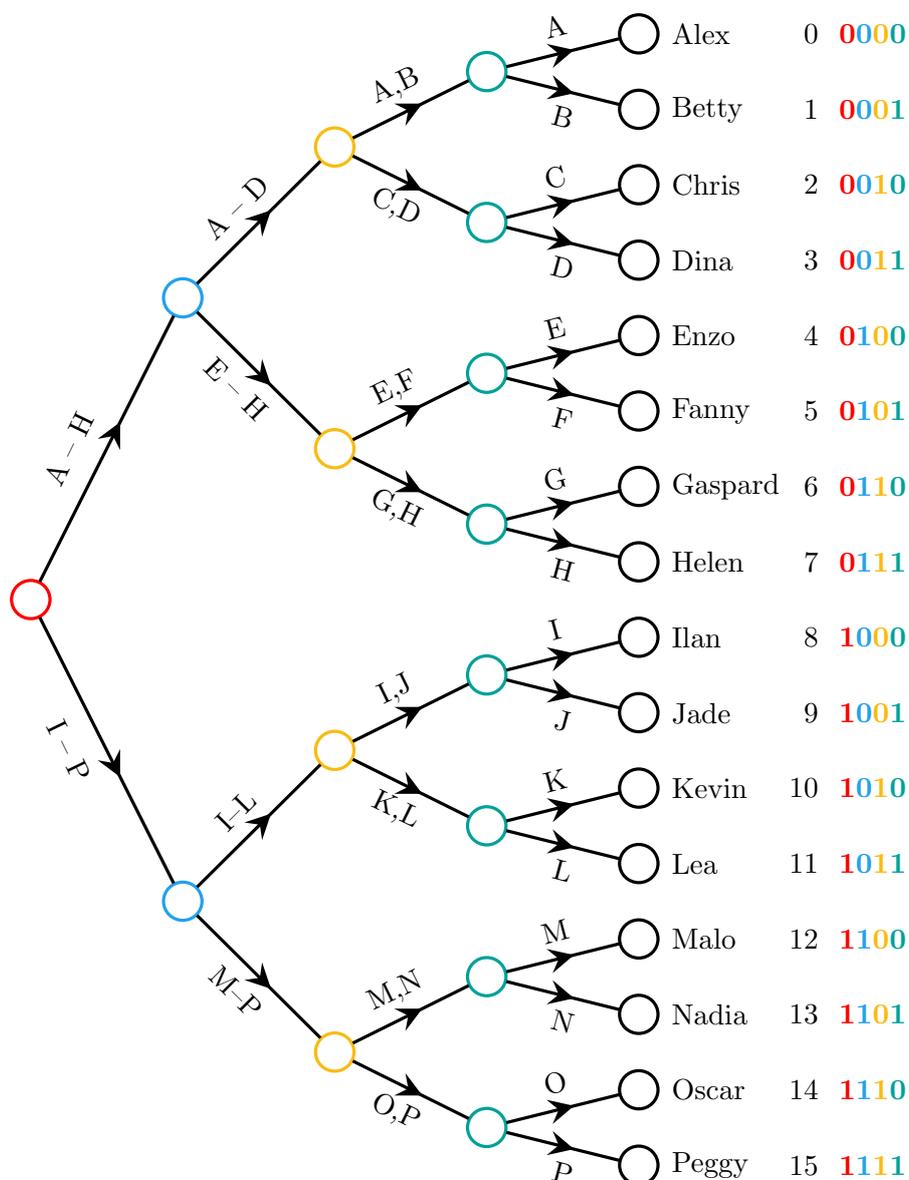


FIGURE 2 – L’arbre de tri par ordre alphabétique

même  $k$  fois). Par exemple, pour identifier un élément dans un ensemble de 32, il suffit de 5 questions. En particulier, cela devrait suffire pour le "Jeu qui est-ce?" où chaque joueur dispose de 24 personnages. Pour identifier un élément d'un ensemble de 1000 (et même  $1\ 024 = 2^{10}$ ), il suffit de 10 questions. Pour identifier une personne parmi la population française, il fallait 26 questions jusqu'en 2016, où la population était encore inférieure à  $2^{26} = 67\ 108\ 864$ , mais il faut désormais 27 questions tant qu'elle reste inférieure à  $2^{27} = 134\ 217\ 728$  (la population française est d'un peu moins de 70 millions d'habitants). Pour identifier une personne parmi la population mondiale (8 milliards de personnes) il suffit de 32 questions. En seulement 270 questions, on est capable d'identifier n'importe quel atome de l'univers, à condition toutefois de les avoir numérotés au préalable.

La recherche dichotomique est donc une méthode de recherche rapide qui est très largement utilisée en informatique.