



Fiche pédagogique

Activité : Construire (et déconstruire) des polyèdres

Objectifs pédagogiques : Découvrir de la géométrie non plane et les polyèdres.

Notions abordées : Polygones : triangles, quadrilatères, pentagones, hexagones.

Polygones réguliers: triangle équilatéral, carré. Angles.

Polyèdres : sommets, arêtes, faces, formule d'Euler.

Patrons.

Compétences développées :

- **Représenter :**

- Reconnaître et utiliser les premiers éléments de codages d'une figure plane ou d'un solide.
- Utiliser et produire des représentations de solides et de situation spatiale.

- **Raisonner :** Amorcer des raisonnements s'appuyant uniquement sur des propriétés des figures et des relations entre objets.

- **Communiquer :** Utiliser un vocabulaire adéquat pour décrire une situation, exposer une argumentation.

Matériel nécessaire : Jeux de polygones à "oreilles" et élastiques. Voir Figure 1.

Niveau : A partir du cycle 2.

Durée : 30 minutes minimum.

Messages à faire passer

Un polyèdre est la généralisation en 3 dimensions de ce que sont les polygones en 2 dimensions.

Un polyèdre est constitué de faces polygonales reliées le long de leurs arêtes. Il a des arêtes et des sommets qui sont celles et ceux de ses faces.

Il y a des relations liant les nombres de faces, d'arêtes, et de sommets d'un polyèdre.

Déroulement :

Un jeu de polygones à "oreilles" (voir Figure 1) et d'élastiques est mis à disposition des participants. Il est souvent préférable d'avoir préparé une pile avec les polygones nécessaires à

Le déroulé se fait ensuite en suivant les étapes ci-dessous. Chaque étape doit se faire de manière adaptée au public à qui on s'adresse. Ainsi, si pour les plus âgés, toutes les étapes peuvent être faites en intégralité, pour les plus jeunes, des étapes seront simplifiées voire absentes.

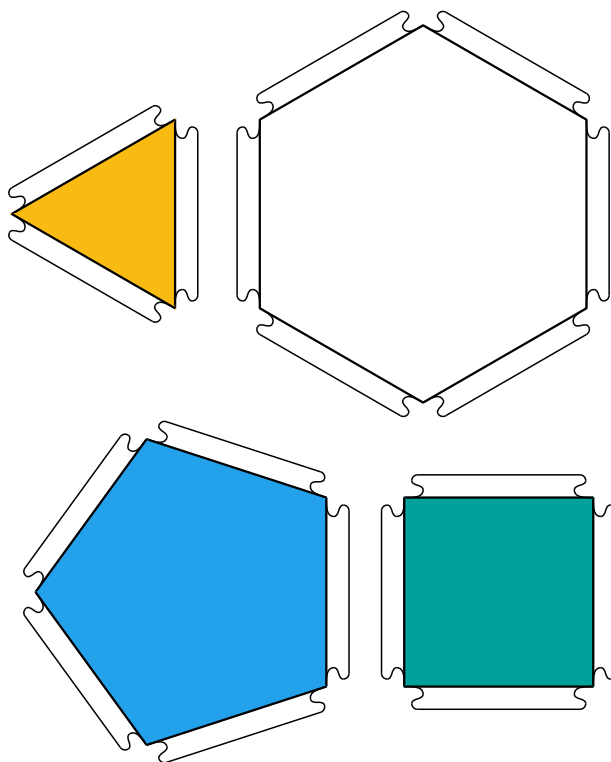


FIGURE 1 – Les polygones à “oreilles”.

- Pour des élèves de cycle 2, on se contente de présenter les polygones (triangle, carré, pentagone, hexagone) en les nommant et on leur fait simplement construire des polyèdres simples (tétraèdre, cube, octaèdre, pyramides, et éventuellement le dodécaèdre et l’icosaèdre) et on donne leurs noms.
- Pour des élèves de cycle 3 et 4, on fait le déroulé ci-dessous en faisant construire le dodécaèdre.
- Pour des élèves de lycée, on peut faire construire des polyèdres plus complexe et ajouter des preuves générales comme celles décrites au paragraphe *Double comptage et formule d’Euler* page 8.

Présentation des formes : Présenter les différentes pièces. Demander s’ils savent nommer les différentes pièces (sans oreilles) et quel est le nom générique pour de telles pièces. On espère que les participants donnent d’eux même les noms de triangle, carré, pentagone, hexagone et polygones. Rappeler qu’un polygone est une forme géométrique plane dont tous les côtés sont rectilignes. Un polygone a des arêtes (ses côtés) et des sommets (les extrémités des côtés). (Ces notions sont au programme du cycle 3).

Insister sur le fait qu’ici nous avons des polygones réguliers, c’est-à-dire des polygones dont tous les côtés sont de même longueur **et** dont tous les angles sont égaux. Ainsi le triangle régulier est le triangle équilatéral, et le carré est le quadrilatère régulier. Les autres polygones réguliers n’ont pas de nom spécial : on parle donc de pentagone régulier et d’hexagone régulier. Pour un triangle, n’importe laquelle des deux conditions “avoir les côtés sont de même longueur” et “avoir tous les angles égaux” implique l’autre. Donc il suffit de vérifier une seule des deux pour savoir qu’un triangle est régulier (ou équilatéral). En revanche, pour les polygones à plus de côtés, les deux conditions sont distinctes et nécessaires pour avoir un polygone régulier. Par

exemple, un quadrilatère qui a tous ses côtés de même longueur est un losange ; un quadrilatère dont tous les angles sont égaux est un rectangle ; un quadrilatère qui a tous ses côtés de même longueur et dont tous les angles sont de même longueur est à la fois un losange et un rectangle, et donc un carré. Il peut être intéressant de noter cela, afin de rappeler les définitions de losange, rectangle, et carré.

Il peut être intéressant de présenter la dénomination des polygones. A partir de cinq côtés et donc cinq angles, le nom est formé d'un préfixe grec indiquant le nombre suivi du suffixe -gone qui vient de gônia qui veut dire "angle" en grec. Les préfixes numérique grecs sont mono- (1), di- (2), tri- (3), tetra- (4), penta- (5), hexa- (6), hepta- (7), octo- ou octa- (8), ennea- (9), deca- (10), hendeca- (11) , dodeca - (12), trideca- (13), ... , icoso- (20). Ainsi un polygone à cinq côtés (et angles) est un pentagone, (Voir Table 1), un polygone à six côtés est un hexagone, et, suivant cette dénomination, un triangle aurait dû s'appeler un trigone et un quadrilatère aurait dû s'appeler un tetragone.

Nb côtés	Nom	Nb côtés	Nom	Nb côtés	Nom
3	triangle	10	décagone	20	icosagone
4	quadrilatère	11	hendécagone	21	icosakaihenagone
5	pentagone	12	dodécagone	30	triacontagone
6	hexagone	13	tridécagone	50	pentacontagone
7	heptagone	14	tetradécagone	100	hectogone
8	octogone	15	pentadécagone	1 000	chiliagone
9	ennéagone	16	hexadécagone	10 000	myriagone

TABLE 1 – Noms de quelques polygones en fonction de leur nombre de côtés.

Présentation des polyèdres : On présente ensuite aux participants des polyèdres. Cela nécessite d'**avoir au préalable construit les polyèdres** que l'on souhaite montrer et faire construire. Généralement, on présente les polyèdres réguliers ou solides de Platon (voir Figure 2) et éventuellement quelques autres comme l'icosaèdre tronqué (ballon de foot). Demander s'ils



FIGURE 2 – Les polyèdres réguliers ou solides de Platon.

savent nommer les différentes formes et quel est le nom générique pour de telles formes.

S'il ne savent pas, ce qui est souvent le cas, on leur présente les polyèdres. Un polyèdre est la généralisation en 3 dimensions de ce que sont les polygones en 2 dimensions. Ils sont constitués de faces polygonales (éléments à 2 dimensions), d'arêtes (éléments à 1 dimension) et de sommets (éléments à 0 dimension).

On peut là aussi expliquer la formation des noms des polyèdres. Ceux-ci sont en général formés à partir d'un préfixe numérique grec suivi du suffixe -èdre qui vient de hedra qui veut

dire “face”, en grec. Les faces d’un polyèdre sont les polygones qu’on a assemblés pour les former. Ainsi le tétraèdre a quatre faces, le cube, avec ses six faces, devrait s’appeler hexaèdre, l’octaèdre a huit faces, le dodécaèdre a douze faces et l’icosaèdre a vingt faces.

Construire des polyèdres : On montre que chacun des polygones dispose d’“oreilles”. Celles-ci permettent d’assembler deux polygones sur un de leur côté en ajoutant un élastique qui entoure une oreille de chaque polygone. Cela permet donc de construire des polyèdres. On demande ainsi aux participants de construire des polyèdres à partir de modèles.

Conseil pédagogique

Jusqu’au collège, il est pratique de faire construire leurs polyèdres par groupe de 2. Cela rend la phase de construction plus rapide et plus simple aussi. Il n’est pas toujours facile, notamment pour les plus petits, de mettre seul les élastiques autour des “oreilles”. On peut les inciter à le faire à deux avec un participant qui tient ensemble les deux “oreilles” et l’autre qui passe l’élastique autour.

Le rythme de construction des polyèdres varie d’un participant/groupe à un autre. Prévoir d’autres polyèdres à construire afin de maintenir les plus rapides actifs en attendant que les autres aient finis.

Nombres d’élastiques utilisés : Une fois les polyèdres construits, on rappelle le nom des polyèdres construits et leur nombre de faces, c’est-à-dire le nombre de formes polygonales utilisées. On demande combien les polyèdres ont d’arêtes, ce qui correspond au nombre d’élastiques utilisés. Pour les petits polyèdres comme le tétraèdre, ou le cube il est aisé de les compter un par un. Pour de gros polyèdres en revanche, cela devient fastidieux et propice à une erreur. On leur propose donc de faire un raisonnement pour calculer ce nombre. Le but est de laisser les participants trouver, quitte à les guider. Prenons l’exemple du dodécaèdre. Deux remarques essentielles sont à faire émerger :

- Le dodécaèdre est constitué de 12 faces pentagonales, qui ont 5 côtés chacune. Il y a donc $12 \times 5 = 60$ **oreilles** (côtés de pentagones).
- Lors de la construction du dodécaèdre, en assemblant deux polygones, on met **un élastique autour de deux oreilles**.

Ainsi le nombre d’élastiques utilisés pour construire un dodécaèdre est $60 \div 2 = 30$.

On dit ensuite aux participants que ce raisonnement fonctionne pour tous les polyèdres : quel que soit le polyèdre, **la somme des côtés des polygones (le nombre d’oreilles) est égale à deux fois le nombre d’arêtes (élastiques)**.

Pour les lycéens, on peut faire la preuve de cette égalité de manière formelle (voir paragraphe *Double comptage et formule d’Euler* page 8. Pour tous, si on a fait la formule dans le cas d’un polyèdre formé d’un seul type de polygone, il est intéressant de calculer le nombre d’arêtes/élastiques pour un polyèdre avec plusieurs types de polygones. On peut par exemple le faire pour l’icosaèdre tronqué (ballon de football).

- L’icosaèdre tronqué est constitué de 12 faces pentagonales, qui ont 5 côtés chacune, et vingt faces hexagonales, qui ont 6 côtés chacune. Il y a donc $12 \times 5 = 60$ **côtés de pentagones** et $20 \times 6 = 120$ **côtés d’hexagones** donc **180 oreilles** en tout .
- Le nombre d’oreilles est égal à deux fois le nombre d’arêtes (élastiques).

Ainsi le nombre d’élastiques utilisés pour construire un icosaèdre tronqué est $180 \div 2 = 90$.

Aller plus loin : En fonction du temps qu'il reste, des éventuelles questions des participants et de leur niveau, on peut poursuivre de plusieurs manières.

- En abordant la formule d'Euler : en la faisant vérifier pour les petits polyèdres et en l'utilisant pour calculer le nombre de sommets d'un polyèdre par exemple. Au passage, on peut calculer le nombre de sommets d'un polyèdre par un double comptage similaire à celui fait pour les arêtes. Voir paragraphe *Double comptage et formule d'Euler* page 8.
- En abordant le cas des pointes des polyèdres et comment on mesure l'acuité de la pointe. Voir paragraphe *Pointes d'un polyèdre* page 10.
- En faisant défaire les polyèdres de manière à obtenir des patrons de ceux-ci. Voir paragraphe *Patrons* page 12.
- En abordant la chiralité de certains polyèdres. Voir paragraphe *Chiralité* page 8.

1 Didactique et pédagogie

Note historique : Les solides de Platon avaient un rôle déterminant dans la philosophie de Platon, à partir duquel ils ont été nommés. Dans le dialogue *Timée* (env. 358 av. J.-C.), Platon associe chacun des quatre éléments (la terre, l'air, l'eau et le feu) à un solide régulier. La terre était associée au cube, l'Air à l'octaèdre, l'Eau à l'icosaèdre et le Feu au tétraèdre. Il existait une justification pour ces associations : la chaleur du Feu semble pointue et comme un poignard (comme un peu le tétraèdre). L'Air est constitué de l'octaèdre ; ses composants minuscules sont si doux qu'on peut à peine les sentir. L'Eau, l'icosaèdre, s'échappe de la main lorsqu'on la saisit comme si elle était constituée de petites boules minuscules. Le solide le plus stable, le cube, représente la Terre. Ces petits solides font de la poussière lorsqu'ils sont émiettés et se cassent lorsqu'on s'en saisit, une grande différence avec l'écoulement doux de l'eau. Pour le cinquième solide, le dodécaèdre, Platon remarque obscurément : « le dieu l'a utilisé pour l'Univers quand il en a dessiné l'arrangement final. » Platon mettait en correspondance le dodécaèdre avec le Tout, parce que c'est le solide qui ressemble le plus à la sphère. Aristote a nommé ce cinquième élément, aîthêr (aether en latin, « éther » en français) et a postulé que l'univers était fait de cet élément, et qu'il était substantiel à tous les autres, qu'il les contenait tous.

Cette théorie de la constitution de la matière a été progressivement abandonnée entre le XVII^e et la fin du XVIII^e siècle, le *Traité élémentaire de chimie* de Lavoisier en 1789 pouvant être considéré comme la réfutation définitive de la théorie des quatre éléments dans la chimie moderne.

Construire d'autres polyèdres : D'autres polyèdres simples à construire sont les pyramides ayant pour base les différents polygones. Voir Figure 3.

Enfin, on peut aussi leur faire construire certains solides d'Archimède, qui sont les polyèdres convexes semi-réguliers, composés de deux ou trois sortes de polygones réguliers se rencontrant à des sommets identiques. Il y en a treize qui sont dessinés Figure 4 et dont les propriétés sont décrites dans la Table 2.

Faire construire les solides d'Archimède est intéressant, car, au contraire des solides de Platon pour lesquels on n'a pas à réfléchir à quel type de polygone attacher à un autre (car ils sont tous identiques), là il faut y réfléchir. Il faut en particulier vérifier qu'en chaque sommet, la configuration (c'est-à-dire la suite de polygones en tournant autour d'un sommet) est identique. Cette configuration est indiquée à la dernière colonne de la Table 2 où les nombres indiquent les nombres de côtés des faces contenant chaque sommet. Par exemple, pour le tétraèdre tronqué, la dernière colonne indique la configuration 3.6.6, ce qui veut dire que chaque sommet est dans un triangle et deux hexagones. Lorsque les participants construisent des solides d'Archimède, il faut surveiller comment ils s'y prennent et leur faire remarquer leurs erreurs s'ils en font.

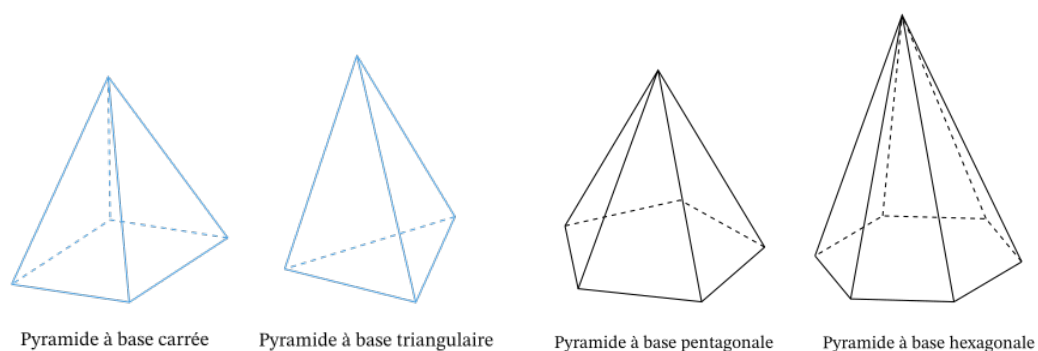


FIGURE 3 – Des pyramides.

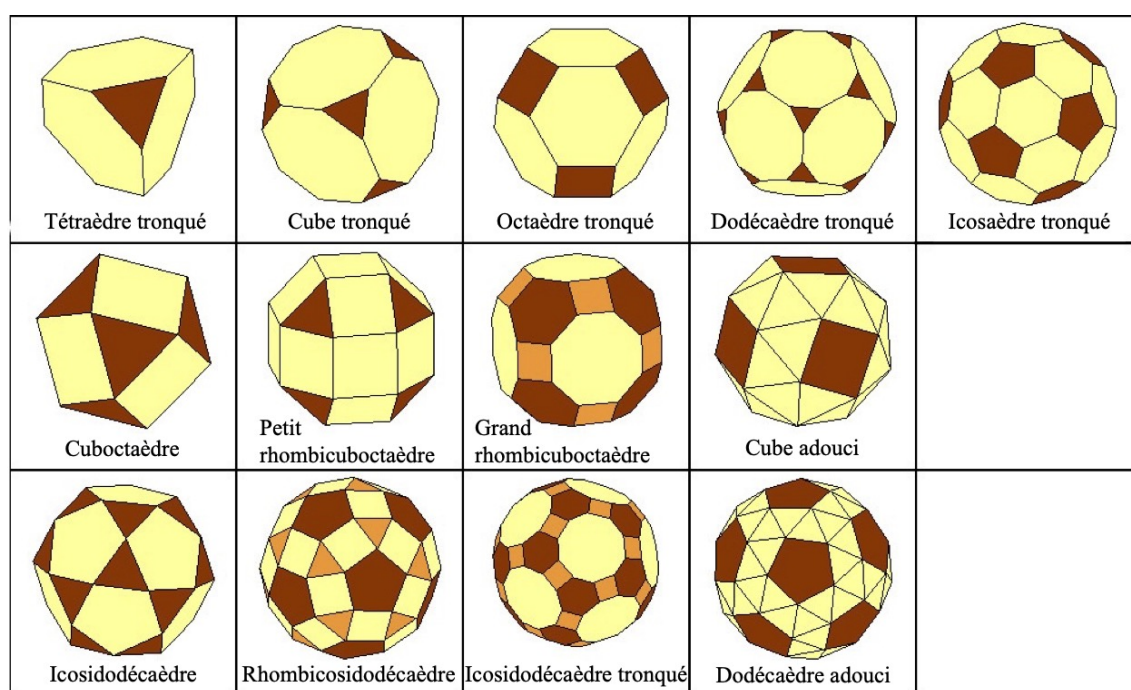


FIGURE 4 – Les polyèdres semi-réguliers ou solides d'Archimède

Nom	Faces	Type de faces	Arêtes	Sommets	Arêtes par som- met	Faces en un sommet
Tétraèdre tronqué	8	4 triangles 4 hexagones	18	12	3	3.6.6
Cube tronqué	14	8 triangles 6 octogones	36	24	3	3.8.8
Octaèdre tronqué	14	6 carrés 8 hexagones	36	24	3	4.6.6
Dodécaèdre tronqué	32	20 triangles 12 décagones	90	60	3	3.10.10
Icosaèdre tronqué	32	12 pentagones 20 hexagones	90	60	3	5.6.6
Cuboctaèdre	14	8 triangles 6 carrés	24	12	4	3.4.3.4
Cube adouci	38	32 triangles 6 carrés	60	24	5	3.3.3.3.4
Icosidodécaèdre	32	20 triangles 12 pentagones	60	30	4	3.5.3.5
Dodécaèdre adouci	92	80 triangles 12 pentagones	150	60	5	3.3.3.3.5
Petit rhombi- cuboctaèdre	26	8 triangles 18 carrés	48	24	4	3.4.4.4
Grand rhombi- cuboctaèdre	26	12 carrés 8 hexagones 6 octogones	72	48	3	4.6.8
Rhombicosi- dodécaèdre	62	20 triangles 30 carrés 12 pentagones	120	60	4	3.4.5.4
Icosidodécaèdre tronqué	62	30 carrés 20 hexagones 12 décagones	180	120	3	4.6.10

TABLE 2 – Description des solides d'Archimède

L'erreur la plus classique est le non-respect de la configuration à chaque sommet. On peut leur faire observer cette configuration, mais on peut aussi dire des choses intermédiaires. Par exemple, pour le tétraèdre tronqué, on peut leur faire remarquer que deux triangles ne sont jamais adjacents.

Parmi les solides d'Archimède, on peut remarquer l'icosaèdre tronqué, qui n'est rien d'autre que le polyèdre correspondant au ballon de football. Voir Activité Géométrie et ballon de foot. Une manière de présenter l'atelier est de partir du ballon de football (icosaèdre tronqué), de le faire construire et de faire les différentes étapes sur ce polyèdre.

Chiralité : Deux solides d'Archimède, le cube adouci et le dodécaèdre adouci ont une propriété spéciale, la **chiralité** : ils ne sont pas identiques à leur image dans un miroir. Il existe ainsi deux formes, chirales l'une de l'autre, de chacun de ces polyèdres. Celles-ci sont représentées sur la Figure 5. Pour voir que le cube adouci a deux formes chirales, on peut observer qu'il a deux

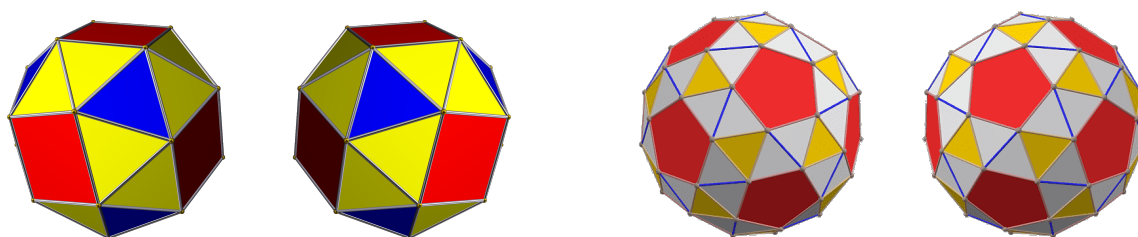


FIGURE 5 – Les formes chirales du cube adouci (gauche) et du dodécaèdre adouci (droite).

types de triangles : ceux qui ont un côté en commun avec un carré (en jaune) et ceux qui n'ont pas de côté en commun avec un carré (en bleu). Autour de chaque sommet, ces triangles n'apparaissent pas dans le même ordre en partant du carré et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre : dans la forme chirale du cube adouci la plus à gauche sur la Figure 5, les triangles apparaissent dans l'ordre jaune-jaune-bleu-jaune, alors qu'ils apparaissent dans l'ordre jaune-bleu-jaune-jaune sur l'autre forme à sa droite. De même, dans les deux formes du dodécaèdre adouci, il y a des triangles blancs qui partagent un côté avec un pentagone et des triangles jaunes qui ne partagent aucun côté avec les pentagones. Autour d'un sommet, en partant du pentagone et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, l'ordre des triangles est blanc-jaune-blanc-blanc dans la forme chirale du dodécaèdre adouci la plus à droite sur la Figure 5, et blanc-blanc-jaune-blanc sur l'autre forme à sa gauche.

La chiralité est une propriété très importante en physique-chimie. Par exemple, le limonène est une molécule qui a deux formes chirales. L'un des, le (R)-limonène donne l'odeur de l'orange alors que l'autre, le (S)-limonène, donne celle du citron.

Double comptage et formule d'Euler : Considérons un polyèdre. Notons par S son nombre de sommets, A son nombre d'arêtes et F son nombre de faces.

On peut faire remarquer que chaque arête est dans exactement deux faces. Si toutes les faces sont des polygones à p côtés, alors en comptant p pour chacune des faces, on obtient pF et chaque arête aura été comptée deux fois. Ainsi $pF = 2A$.

De la même manière, si tous les sommets sont dans le même nombre q de faces, alors en comptant p pour chaque face, on obtient pF et chaque sommet aura été compté q fois. Ainsi

$$pF = 2A = qS. \quad (1)$$

L'égalité gauche de cette équation n'est valable que si toutes les faces ont le même nombre de côtés. De même, l'égalité de droite ne vaut que si tous les sommets sont dans le même nombre

de faces. Elles peuvent cependant se généraliser pour tous les polyèdres. Pour cela, il peut être pratique d'introduire la notion de degré d'une face ou d'un sommet. Le *degré* d'une face est le nombre de côtés de cette face. Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes (ou de manière équivalente de faces) incidentes à ce sommet. Le degré d'une face f est noté $d(f)$ et, de même, le degré d'un sommet v est noté $d(v)$. Si on fait la somme des degrés des faces, chaque arête sera comptée deux fois puisqu'elle est dans deux faces. Donc **la somme des degrés des faces est égale à deux fois le nombre d'arêtes**. De même, si on fait la somme des degrés des sommets, chaque arête sera comptée deux fois puisqu'elle relie deux sommets. Donc **la somme des degrés des sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes**. On a donc

$$\sum_{v \text{ sommet}} d(v) = 2A = \sum_{f \text{ face}} d(f). \quad (1')$$

Le grand mathématicien Leonhard Euler (1707–1783) a montré que dans un polyèdre le **nombre de sommets plus le nombre de faces est toujours égal au nombre d'arêtes plus 2** :

$$S + F = A + 2. \quad (2)$$

On peut présenter ces formules (et l'explication des deux premières) et les faire vérifier sur de petits polyèdres, comme le tétraèdre, le cube et l'octaèdre. Prenons le cube par exemple : il a six faces ($F = 6$), huit sommets ($S = 8$), et douze arêtes ($A = 12$) ; les faces sont des carrés ($p = 4$) et chaque sommet est dans trois faces ($q = 3$). On a bien $pF = 4 \times 6 = 2 \times 12 = 2A$, $qS = 3 \times 8 = 2 \times 12 = 2A$, et $S + F = 8 + 6 = 12 + 2 = A + 2$.

Pour des polyèdres plus gros, on peut utiliser ces formules pour calculer le nombre d'arêtes (qui correspond au nombre d'élastiques qu'on utilise pour construire le polyèdre) et de sommets. Considérons par exemple le dodécaèdre. Celui-ci est formé de douze pentagones et chaque sommet est dans trois faces. Donc, par la formule (1), nous avons $5 \times 12 = 2A = 3S$, donc $A = 60/2 = 30$ et $S = 60/3 = 20$: le dodécaèdre a 30 arêtes et 20 sommets. On peut là aussi vérifier la formule d'Euler pour le dodécaèdre : $S + F = 20 + 12 = 30 + 2 = A + 2$.

Pour l'icosaèdre tronqué, qui est le ballon de football, on peut là aussi trouver le nombre d'arêtes et de sommets, à partir de la connaissance de ces faces, à savoir 12 pentagones et 20 hexagones. On peut procéder de deux manières. La première consiste à utiliser la formule (1'). La somme des degrés des faces vaut $12 \times 5 + 20 \times 6 = 180$. Le nombre d'arêtes est donc $A = 180/2 = 90$. Comme chaque sommet est de degré 3, on a $S = 180/3 = 60$. Une autre consiste à remarquer que tous les sommets sont sur un pentagone et un seul et que le nombre de sommets de l'icosaèdre tronqué est donc égal à la somme des degrés des pentagones soit $12 \times 5 = 60$. On peut alors appliquer la formule (2) d'Euler puisque le nombre de faces et le nombre de pentagones plus le nombre d'hexagones : $F = 12 + 20 = 32$. On a donc $A + 2 = S + F = 60 + 32 = 92$, donc $A = 90$.

Unicité des solides de Platon : En utilisant, les formules établies précédemment, on peut démontrer que les seuls polyèdres réguliers sont les solides de Platon. Un polyèdre régulier doit en effet avoir toutes ses faces identiques donc avec le même nombre de côtés p et tous les sommets doivent être dans le même nombre de faces, disons q .

Maintenant, avec la formule d'Euler $S + F = A + 2$. La formule $qS = 2A$ divisée par q donne $S = 2A/q$ tandis que la formule $pF = 2A$ divisée par p donne $F = 2A/p$. En remplaçant S et F par leurs valeurs données par ces égalités dans la formule d'Euler, on obtient

$$\frac{2A}{q} + \frac{2A}{p} = A + 2.$$

En divisant par $2A$, il vient

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}.$$

Puisque A est strictement positif, nous devons avoir

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}.$$

Enfin, en utilisant le fait que p et q doivent, tous deux, être au moins égaux à 3, on peut facilement voir qu'il existe seulement cinq possibilités pour $\{p, q\}$: $\{3, 3\}$, $\{4, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 3\}$ qui donne le $\{3, 5\}$ qui donne le.

- Dans un polyèdre pour $\{p, q\} = \{3, 3\}$, les faces ont $p = 3$ côtés, et sont donc des triangles, et chaque sommet est dans $q = 3$ faces : c'est le tétraèdre.
- Dans un polyèdre pour $\{p, q\} = \{4, 3\}$, les faces ont $p = 4$ côtés, et sont donc des carrés, et chaque sommet est dans $q = 3$ faces : c'est le cube.
- Dans un polyèdre pour $\{p, q\} = \{3, 4\}$, les faces ont $p = 3$ côtés, et sont donc des triangles, et chaque sommet est dans $q = 4$ faces : c'est l'octaèdre.
- Dans un polyèdre pour $\{p, q\} = \{5, 3\}$, les faces ont $p = 5$ côtés, et sont donc des pentagones, et chaque sommet est dans $q = 3$ faces : c'est le dodécaèdre.
- Dans un polyèdre pour $\{p, q\} = \{3, 5\}$, les faces ont $p = 3$ côtés, et sont donc des triangles, et chaque sommet est dans $q = 5$ faces : c'est l'icosaèdre.

En fait, une fois que p et q sont fixés, les nombres de sommets S , d'arêtes A et de faces F sont fixés. On peut facilement déduire des formules (1), et (2), que

$$S = \frac{4p}{4 - (p-2)(q-2)}, \quad A = \frac{2pq}{4 - (p-2)(q-2)}, \quad \text{et} \quad F = \frac{4q}{4 - (p-2)(q-2)}.$$

Pointes d'un polyèdre : Une chose intéressante à faire observer est que les polyèdres ne sont pas lisses, mais présentent des pointes en chaque sommet. Ces pointes sont plus ou moins aiguës selon les polyèdres. En fait, on peut quantifier le caractère pointu en chaque sommet. Pour qu'il n'y ait pas de pointe, il faudrait que la somme des angles des polygones en ce sommet soit égale à 360 degrés. Plus cette somme est éloignée de 360 degrés, plus la pointe sera aigüe. Ainsi, en un sommet du tétraèdre, la somme des angles vaut $3 \times 60 = 180$ ce qui est très éloigné de 360. Le tétraèdre est donc très pointu. En un sommet du cube, la somme des angles vaut $3 \times 90 = 270$ ce qui est mieux que 180 mais est encore éloigné de 360. Le cube est donc pointu, mais moins que le tétraèdre. En un sommet de l'icosaèdre tronqué (le ballon de foot), la somme des angles vaut $120 + 120 + 108 = 348$. Ceci est proche de 360, donc l'icosaèdre tronqué est peu pointu. C'est une des raisons pour lesquelles il a été choisi pour faire un ballon.

Conseil pédagogique

Avant de faire les calculs de somme des angles, il peut être bon de dire (ou rappeler) le fait suivant :

Si un polygone à p côtés, alors la somme de ses angles vaut $(p-2)180$ degrés.

Le cas particulier $p = 3$ est très connu : la somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés.

Il implique les cas général puisqu'un polygone à n côtés peut être divisé en $p-2$ triangles.

Ainsi, la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360 degrés, la somme des angles d'un pentagone vaut 540 degrés, la somme des angles d'un hexagone vaut 720 degrés, etc.

On peut ainsi retrouver la valeur des angles d'un polygone régulier. Si celui-ci a p côtés,

cela vaut $\frac{p-2}{p}180$ degrés. Donc les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60 degrés, ceux d'un carré 90 degrés, ceux d'un pentagone régulier 108 degrés et ceux d'un hexagone régulier 120 degrés.

Patrons : Une fois les polyèdres construits, on peut demander aux participants de retirer peu à peu des élastiques de manière à obtenir un patron des polyèdres construits. Cela veut dire qu'on enlève des élastiques pour que obtenir une forme plane d'un seul morceau qui contient tous les polygones. Une des premières choses à remarquer est que ce patron n'est pas unique. Par exemple, à rotation et symétrie près, le tétraèdre possède deux patrons différents (voir Figure 6), le cube onze (voir Figure 7) et l'octaèdre onze (voir Figure 8) également. Le dodécaèdre et l'icosaèdre en ont eux chacun 43 380. Un patron de chacun de ces polyèdres est dessiné Figure 9.



FIGURE 6 – Les deux patrons du tétraèdre.

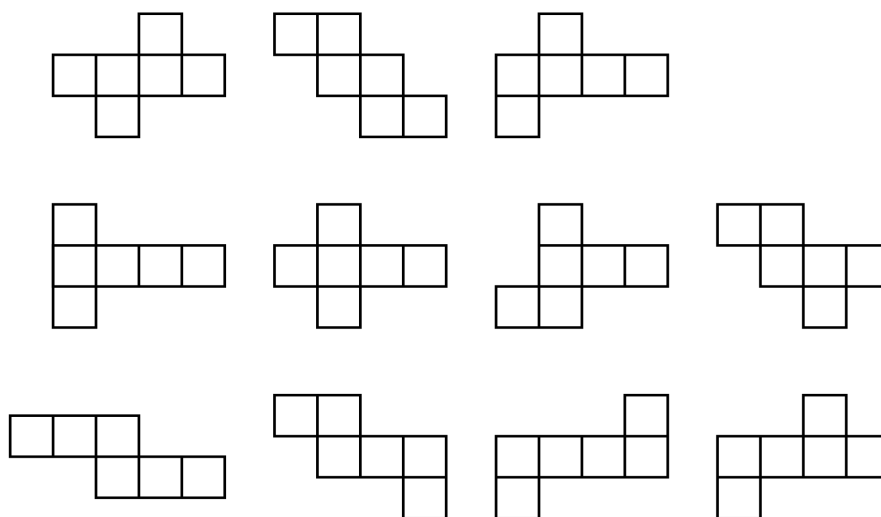


FIGURE 7 – Les onze patrons du cube.

Après avoir fait faire des patrons et remarquer qu'un même polyèdre peut avoir de nombreux patrons différents, on peut toutefois faire observer que dans un patron, il reste toujours le même nombre d'élastiques, à savoir le nombre de faces moins 1.

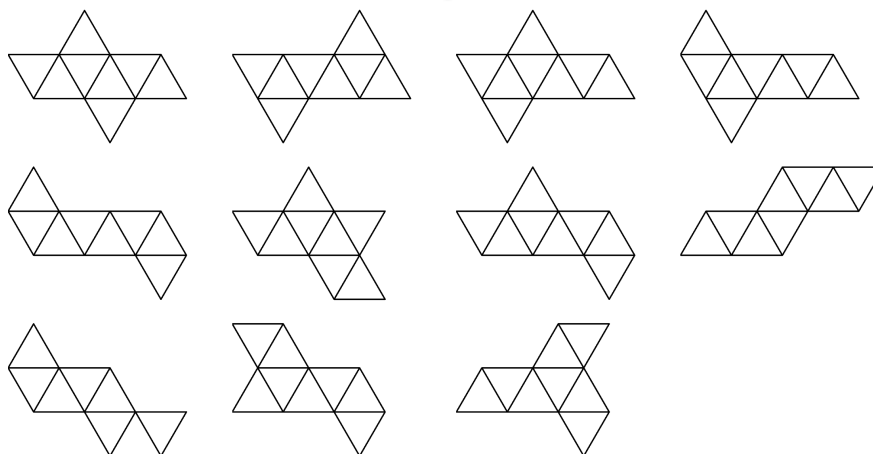


FIGURE 8 – Les onze patrons de l'octaèdre.

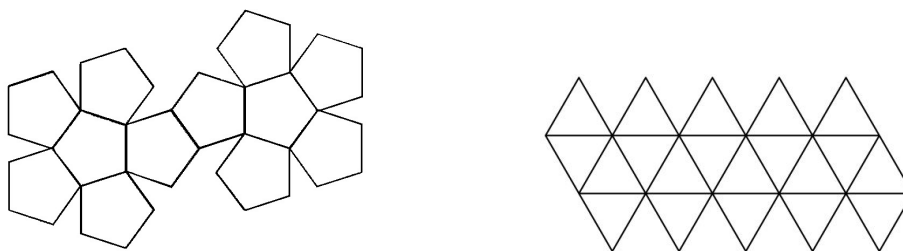


FIGURE 9 – Un patron du dodécaèdre (gauche) et un patron de l'icosaèdre (droite).