



Fiche pédagogique

Activité : Construire (et déconstruire) des polyèdres

Objectifs pédagogiques : Découvrir de la géométrie non plane et des polyèdres.

Notions abordées : Polygones : triangles, quadrilatère, pentagones, hexagones.

Polygones réguliers: triangle équilatéral, carré. Angles.

Polyèdres : sommets, arêtes, faces, formule d'Euler.

Patrons.

Matériel nécessaire : Jeux de polygones à “oreilles” et élastiques. Voir Figure 1.

Niveau : A partir du cycle 2.

Durée : 30 minutes minimum.

Déroulement : Un jeu de polygones à “oreilles” et d'élastiques est mis à disposition des participants.

Le déroulé se fait ensuite en suivant les étapes ci-dessous. Chaque étape doit se faire de manière adaptée au public à qui on s'adresse. Ainsi, si pour les plus âgés, toutes les étapes peuvent être faites en intégralité, pour les plus jeunes, les étapes seront simplifiées voire absentes. Par exemple, pour des élèves de cycle 2, on se contente de présenter les polygones (triangle, carré, pentagone, hexagone) en les nommant et on leur fait simplement construire des polyèdres simples (tétraèdre, cube, octaèdre, pyramides, et éventuellement le dodécaèdre et l'icosaèdre) et on donne leurs noms.

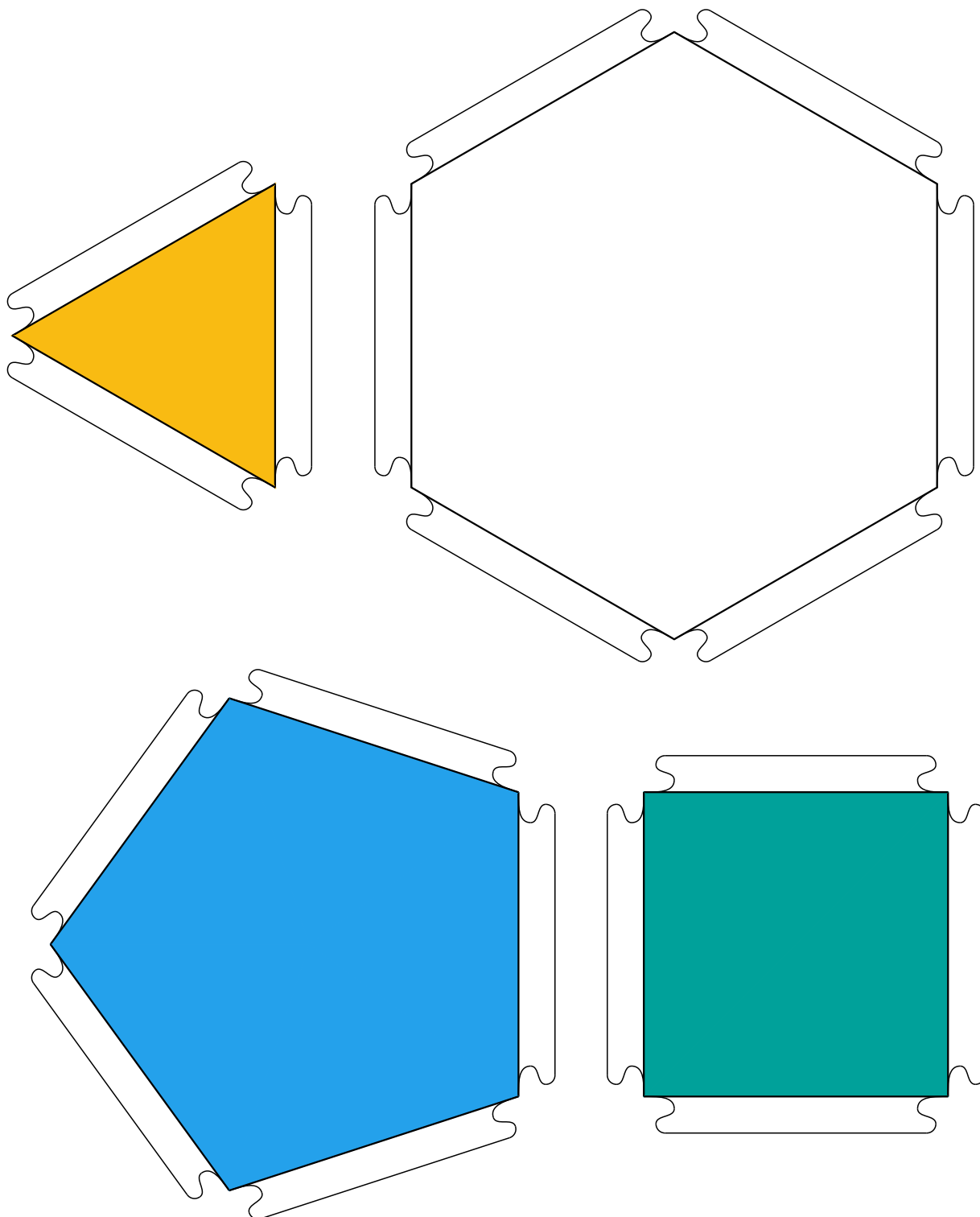


FIGURE 1 – Les polygones à “oreilles”.

Présentation des formes : Présenter les différentes pièces, que sont les différents polygones réguliers : Ce sont les polygones (formes géométriques planes dont les côtés sont droits, c'est-à-dire des segments de droites) dont tous les côtés sont de même longueur **et** dont tous les angles sont égaux. Ainsi le triangle régulier est le triangle équilatéral, et le carré est le quadrilatère régulier. Les autres polygones réguliers n'ont pas de nom spécial : on parle donc de pentagone régulier et d'hexagone régulier.

Il peut être intéressant de présenter la dénomination des polygones. A partir de cinq côtés et donc cinq angles, le nom est formé d'un préfixe grec indiquant le nombre suivi du suffixe -gone qui vient de gônia qui veut dire "angle" en grec. Les préfixes numériques grecs sont mono- (1), di- (2), tri- (3), tetra- (4), penta- (5), hexa- (6), hepta- (7), octo- ou octa- (8), ennea- (9), deca- (10), hendeca- (11), dodeca- (12), trideca- (13), ... , icosa- (20). Ainsi un polygone à cinq côtés (et angles) est un pentagone, un polygone à six côtés est un hexagone, et, suivant cette dénomination, un triangle aurait dû s'appeler un trigone et un quadrilatère aurait dû s'appeler un tretragone.

Pour un triangle, n'importe laquelle des deux conditions "avoir les côtés sont de même longueur" et "avoir tous les angles égaux" implique l'autre. Donc il suffit de vérifier une seule des deux pour savoir qu'un triangle est régulier (ou équilatéral). En revanche, pour les polygones à plus de côtés, les deux conditions sont distinctes et nécessaires pour avoir un polygone régulier. Par exemple, un quadrilatère qui a tous ses côtés de même longueur est un losange ; un quadrilatère dont tous les angles sont égaux est un rectangle ; un quadrilatère qui a tous ses côtés de même longueur et dont tous les angles sont de même longueur est à la fois un losange et un rectangle, et donc un carré. Il peut être intéressant de noter cela, afin de rappeler les définitions de losange, rectangle, et carré.

Construire des polyèdres : On montre que chacun des polygones dispose d’“oreilles”. Celles-ci permettent d’assembler deux polygones sur un de leur côté en ajoutant un élastique qui entoure une oreille de chaque polygone. Cela permet donc de construire des polyèdres. On demande ainsi aux participants de construire des polyèdres à partir de modèles. Cela nécessite donc d’**avoir au préalable construit les polyèdres** que l’on souhaite faire construire aux participants.

On peut par exemple leur faire construire les cinq polyèdres convexes réguliers, à savoir le tétraèdre, le cube, l’octaèdre, le dodécaèdre et l’icosaèdre, qui sont dessinés Figure 2.



FIGURE 2 – Les polyèdres réguliers ou solides de Platon.

On peut là aussi expliquer la formation des noms des polyèdres. Ceux-ci sont en général formés à partir d’un préfixe numérique grec suivi du suffixe -èdre qui vient de hedra qui veut dire “face”, en grec. Les faces d’un polyèdre sont les polygones qu’on a assemblés pour les former. Ainsi le tétraèdre a quatre faces, le cube, avec ses six faces, devrait s’appeler hexaèdre, l’octaèdre a huit faces, le dodécaèdre a douze faces et l’icosaèdre a vingt faces.

Note historique : Les solides de Platon avaient un rôle déterminant dans la philosophie de Platon, à partir duquel ils ont été nommés. Dans le dialogue Timée (env. 358 av. J.-C.), Platon associe chacun des quatre éléments (la terre, l’air, l’eau et le feu) à un solide régulier. La terre était associée au cube, l’Air à l’octaèdre, l’Eau à l’icosaèdre et le Feu au tétraèdre. Il existait une justification pour ces associations : la chaleur du Feu semble pointue et comme un poignard (comme un peu le tétraèdre). L’Air est constitué de l’octaèdre ; ses composants minuscules sont si doux qu’on peut à peine les sentir. L’Eau, l’icosaèdre, s’échappe de la main lorsqu’on la saisit comme si elle était constituée de petites boules minuscules. Le solide le plus stable, le cube, représente la Terre. Ces petits solides font de la poussière lorsqu’ils sont émiettés et se cassent lorsqu’on s’en saisit, une grande différence avec l’écoulement doux de l’eau. Pour le cinquième solide, le dodécaèdre, Platon remarque obscurément : « le dieu l’a utilisé pour l’Univers quand il en a dessiné l’arrangement final. » Platon mettait en correspondance le dodécaèdre avec le Tout, parce que c’est le solide qui ressemble le plus à la sphère. Aristote a nommé ce cinquième élément, aithër (aether en latin, « éther » en français) et a postulé que l’univers était fait de cet élément, et qu’il était substantiel à tous les autres, qu’il les contenait tous.

D’autres polyèdres simples à construire sont les pyramides ayant pour base les différents polygones. Voir Figure 3.

Enfin, on peut aussi leur faire construire certains solides d’Archimède, qui sont les polyèdres convexes semi-réguliers, composés de deux ou trois sortes de polygones réguliers se rencontrant à des sommets identiques. Il y en a treize qui sont dessinés Figure 4 et dont les propriétés sont décrites dans la Table 1.

Faire construire les solides d’Archimède est intéressant, car, au contraire des solides de Platon pour lesquels on n’a pas à réfléchir à quel type de polygone attacher à un autre (car ils sont tous identiques), là il faut y réfléchir. Il faut en particulier vérifier qu’en chaque sommet, la configuration est identique. Cette configuration est indiquée à la dernière colonne de la Table 1

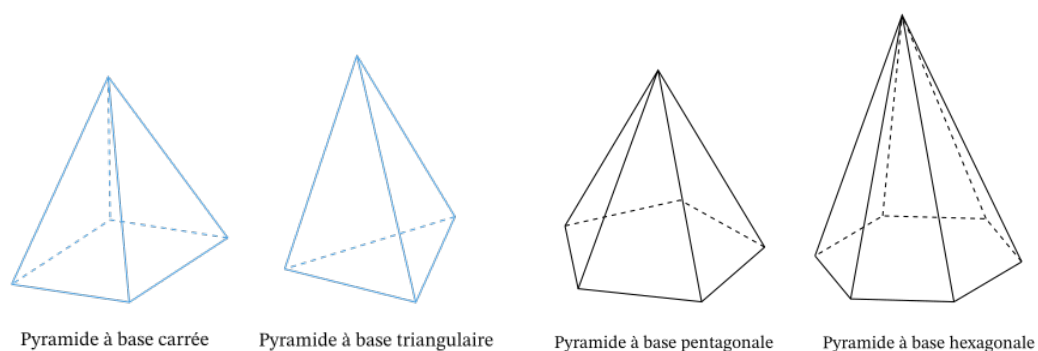


FIGURE 3 – Des pyramides.

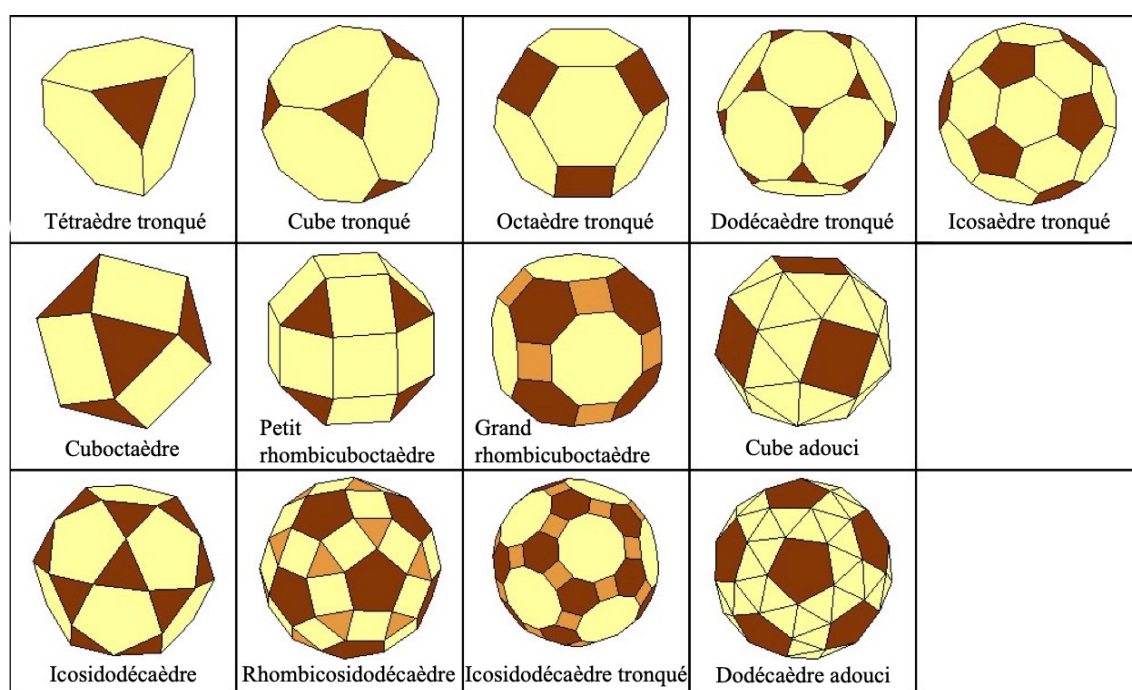


FIGURE 4 – Les polyèdres semi-réguliers ou solides d'Archimède

Nom	Faces	Type de faces	Arêtes	Sommets	Arêtes par som- met	Faces en un sommet
Tétraèdre tronqué	8	4 triangles 4 hexagones	18	12	3	3.6.6
Cube tronqué	14	8 triangles 6 octogones	36	24	3	3.8.8
Octaèdre tronqué	14	6 carrés 8 hexagones	36	24	3	4.6.6
Dodécaèdre tronqué	32	20 triangles 12 décagones	90	60	3	3.10.10
Icosaèdre tronqué	32	12 pentagones 20 hexagones	90	60	3	5.6.6
Cuboctaèdre	14	8 triangles 6 carrés	24	12	4	3.4.3.4
Cube adouci	38	32 triangles 6 carrés	60	24	5	3.3.3.3.4
Icosidodécaèdre	32	20 triangles 12 pentagones	60	30	4	3.5.3.5
Dodécaèdre adouci	92	80 triangles 12 pentagones	150	60	5	3.3.3.3.5
Petit rhombi- cuboctaèdre	26	8 triangles 18 carrés	48	24	4	3.4.4.4
Grand rhombi- cuboctaèdre	26	12 carrés 8 hexagones 6 octogones	72	48	3	4.6.8
Rhombicosi- dodécaèdre	62	20 triangles 30 carrés 12 pentagones	120	60	4	3.4.5.4
Icosidodécaèdre tronqué	62	30 carrés 20 hexagones 12 décagones	180	120	3	4.6.10

TABLE 1 – Description des solides d'Archimède

où les nombres indiquent les nombres de côtés des faces contenant chaque sommet. Par exemple, pour le tétraèdre tronqué, la dernière colonne indique 3.6.6, ce qui veut dire que chaque sommet est dans un triangle et deux hexagones. Lorsque les participants construisent des solides d'Archimède, il faut surveiller comment ils s'y prennent et leur faire remarquer leurs erreurs s'ils en font. L'erreur la plus classique est le non-respect de la configuration à chaque sommet. On peut leur faire observer cette configuration, mais on peut aussi dire des choses intermédiaires. Par exemple, pour le tétraèdre tronqué, on peut leur faire remarquer que deux triangles ne sont jamais adjacents.

Parmi les solides d'Archimède, on peut remarquer l'icosaèdre tronqué, qui n'est rien d'autre que le polyèdre correspondant au ballon de football. Voir Activité Géométrie et ballon de foot. Une manière de présenter l'atelier est de partir du ballon de football (icosaèdre tronqué), de le faire construire et de faire les différentes étapes sur ce polyèdre.

Deux solides d'Archimède, le cube adouci et le dodécaèdre adouci ont une propriété spéciale, la **chiralité** : ils ne sont pas identiques à leur image dans un miroir. Il existe ainsi deux formes, chirales l'une de l'autre, de chacun de ces polyèdres. Celles-ci sont représentées sur la Figure 5. Pour voir que le cube adouci a deux formes chirales, on peut observer qu'il a deux types de

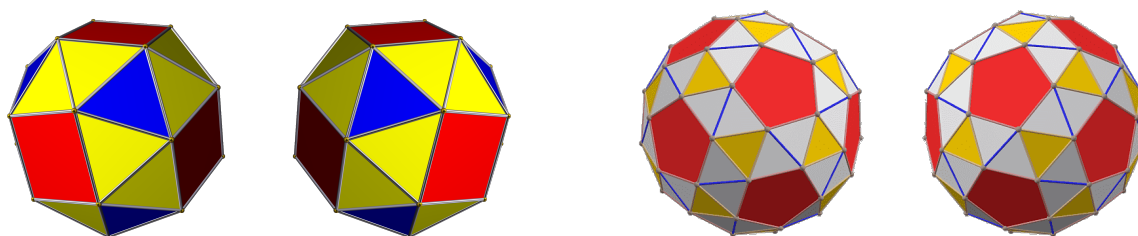


FIGURE 5 – Les formes chirales du cube adouci (gauche) et du dodécaèdre adouci (droite).

triangles : ceux qui ont un côté en commun avec un carré (en jaune) et ceux qui n'ont pas de côté en commun avec un carré (en bleu). Autour de chaque sommet, ces triangles n'apparaissent pas dans le même ordre en partant du carré et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre : dans la forme chirale du cube adouci la plus à gauche sur la Figure 5, les triangles apparaissent dans l'ordre jaune-jaune-bleu-jaune, alors qu'ils apparaissent dans l'ordre jaune-bleu-jaune-jaune sur l'autre forme à sa droite. De même, dans les deux formes du dodécaèdre adouci, il y a des triangles blancs qui partagent un côté avec un pentagone et des triangles jaunes qui ne partagent aucun côté avec les pentagones. Autour d'un sommet, en partant du carré et en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, l'ordre des triangles est blanc-jaune-blanc-blanc dans la forme chirale du dodécaèdre adouci la plus à droite sur la Figure 5, et blanc-blanc-jaune-blanc sur l'autre forme à sa gauche.

La chiralité est une propriété très importante en physique-chimie. Par exemple, le limonène est une molécule qui a deux formes chirales. L'un des, le (R)-limonène donne l'odeur de l'orange alors que l'autre, le (S)-limonène, donne celle du citron.

Double comptage et formule d'Euler : Considérons un polyèdre. Notons par S son nombre de sommets, A son nombre d'arêtes et F son nombre de faces.

On peut faire remarquer que chaque arête est dans exactement deux faces. Si toutes les faces sont des polygones à p côtés, alors en comptant p pour chacune des faces, on obtient pF et chaque arête aura été comptée deux fois. Ainsi $pF = 2A$.

De la même manière, tous les sommets sont dans le même nombre q de faces, alors en comptant q pour chaque face, on obtient qF et chaque sommet aura été compté q fois. Ainsi

$$pF = 2A = qS. \quad (1)$$

L'égalité gauche de cette équation n'est valable que si toutes les faces ont le même nombre de côtés. De même, l'égalité de droite ne vaut que si tous les sommets sont dans le même nombre de faces. Elles peuvent cependant se généraliser pour tous les polyèdres. Pour cela, il est nécessaire d'introduire la notion de degré d'une face ou d'un sommet. Le *degré* d'une face est le nombre de côtés de cette face. Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes (ou de manière équivalente de faces) incidentes à ce sommet. Le degré d'une face f est noté $d(f)$ et, de même, le degré d'un sommet v est noté $d(v)$. Si on fait la somme des degrés des faces, chaque arête sera comptée deux fois puisqu'elle est dans deux faces. Donc **la somme des degrés des faces est égale à deux fois le nombre d'arêtes**. De même, si on fait la somme des degrés des sommets, chaque arête sera comptée deux fois puisqu'elle relie deux sommets. Donc **la somme des degrés des sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes**. On a donc

$$\sum_{v \text{ sommet}} d(v) = 2A = \sum_{f \text{ face}} d(f). \quad (1')$$

Enfin, le grand mathématicien Leonhard Euler (1707–1783) a montré que dans un polyèdre **le nombre de sommets plus le nombre de faces est toujours égal au nombre d'arêtes plus 2** :

$$S + F = A + 2. \quad (2)$$

On peut présenter ces formules (et l'explication des deux premières) et les faire vérifier sur de petits polyèdres, comme le tétraèdre, le cube et l'octaèdre. Prenons le cube par exemple : il a six faces ($F = 6$), huit sommets ($S = 8$), et douze arêtes ($A = 12$) ; les faces sont des carrés ($p = 4$) et chaque sommet est dans trois faces ($q = 3$). On a bien $pF = 4 \times 6 = 2 \times 12 = 2A$, $qS = 3 \times 8 = 2 \times 12 = 2A$, et $S + F = 8 + 6 = 12 + 2 = A + 2$.

Pour des polyèdres plus gros, on peut utiliser ces formules pour calculer le nombre d'arêtes (qui correspond au nombre d'élastiques qu'on utilise pour construire le polyèdre) et de sommets. Considérons par exemple le dodécaèdre. Celui-ci est formé de douze pentagones et chaque sommet est dans trois faces. Donc, par la formule (1), nous avons $5 \times 12 = 2A = 3S$, donc $A = 60/2 = 30$ et $S = 60/3 = 20$: le dodécaèdre a 30 arêtes et 20 sommets. On peut là aussi vérifier la formule d'Euler pour le dodécaèdre : $S + F = 20 + 12 = 30 + 2 = A + 2$.

Pour l'icosaèdre tronqué, qui est le ballon de football, on peut là aussi trouver le nombre d'arêtes et de sommets, à partir de la connaissance de ces faces, à savoir 12 pentagones et 20 hexagones. On peut procéder de deux manières. La première consiste à utiliser la formule (1'). La somme des degrés des faces vaut $12 \times 5 + 20 \times 6 = 180$. Le nombre d'arêtes est donc $A = 180/2 = 90$. Comme chaque sommet est de degré 3, on a $S = 180/3 = 60$. Une autre consiste à remarquer que tous les sommets sont sur un pentagone et un seul et que le nombre de sommets de l'icosaèdre tronqué est donc égal à la somme des degrés des pentagones soit $12 \times 5 = 60$. On peut alors appliquer la formule (2) d'Euler puisque le nombre de faces et le nombre de pentagones plus le nombre d'hexagones : $F = 12 + 20 = 32$. On a donc $A + 2 = S + F = 60 + 32 = 92$, donc $A = 90$.

Angles et pointes :

Une chose intéressante à faire observer est que les polyèdres ne sont pas lisses, mais présentent des pointes en chaque sommet. Ces pointes sont plus ou moins aiguës selon les polyèdres. En fait, on peut quantifier le caractère pointu en chaque sommet. Pour qu'il n'y ait pas de pointe, il faudrait que la somme des angles des polygones en ce sommet soit égale à 360 degrés. Plus cette somme est éloignée de 360 degrés, plus la pointe sera aigüe. Ainsi, en un sommet du tétraèdre, la somme des angles vaut $3 \times 60 = 180$ ce qui est très éloigné de 360. Le tétraèdre est donc très pointu. En un sommet du cube, la somme des angles vaut $3 \times 90 = 270$ ce qui est mieux que 180 mais est encore éloigné de 360. Le cube est donc pointu, mais moins que le tétraèdre. En un sommet de l'icosaèdre tronqué (le ballon de foot), la somme des angles vaut $120 + 120 + 108 = 348$. Ceci est proche de 360, donc l'icosaèdre tronqué est peu pointu. C'est une des raisons pour lesquelles il a été choisi pour faire un ballon.

Avant de faire les calculs de somme des angles, il peut être bon de dire (ou rappeler) le fait suivant :

Si un polygone à p côtés, alors la somme de ses angles vaut $(p - 2)180$ degrés.

Le cas particulier $p = 3$ est très connu : la somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés. Il implique les cas général puisqu'un polygone à n côtés peut être divisé en $p - 2$ triangles. Ainsi, la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360 degrés, la somme des angles d'un pentagone vaut 540 degrés, la somme des angles d'un hexagone vaut 720 degrés, etc. On peut ainsi retrouver la valeur des angles d'un polygone régulier. Si celui-ci a p côtés, cela vaut $\frac{p-2}{p}180$ degrés. Donc les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60 degrés, ceux d'un carré 90 degrés, ceux d'un pentagone régulier 108 degrés et ceux d'un hexagone régulier 120 degrés.

Patrons : Une fois les polyèdres construits, on peut demander aux participants de retirer peu à peu des élastiques de manière à obtenir un patron des polyèdres construits. Une des premières choses à remarquer est que ce patron n'est pas unique. Par exemple, à rotation et symétrie près, le tétraèdre possède deux patrons différents (voir Figure 6), le cube onze (voir Figure 7) et l'octaèdre onze (voir Figure 8) également. Le dodécaèdre et l'icosaèdre en ont eux chacun 43380. Un patron de chacun de ces polyèdres est dessiné Figure 9.



FIGURE 6 – Les deux patrons du tétraèdre.

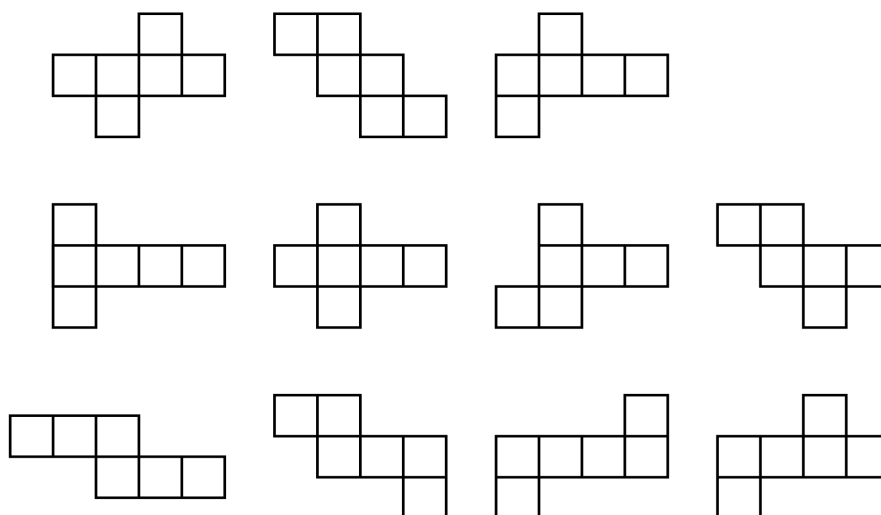


FIGURE 7 – Les onze patrons du cube.

Après avoir fait faire des patrons et remarquer qu'un même polyèdre peut avoir de nombreux patrons différents, on peut toutefois faire observer que dans un patron, il reste toujours le même nombre d'élastiques, à savoir le nombre de faces moins 1.

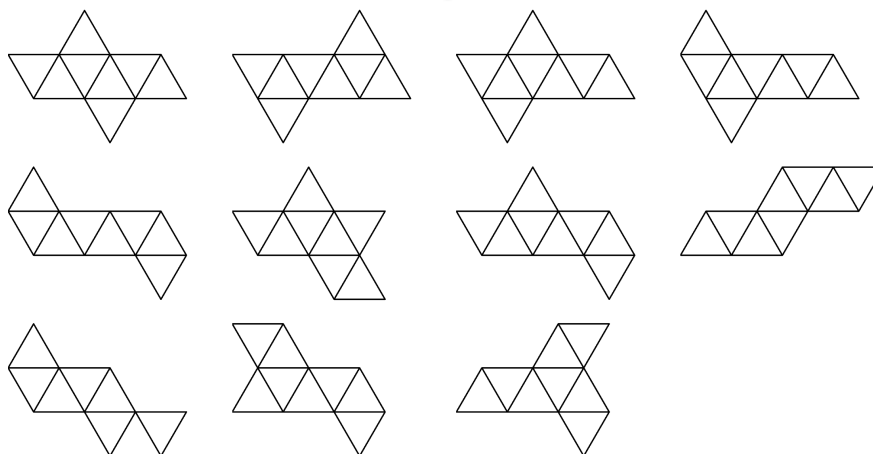


FIGURE 8 – Les onze patrons de l'octaèdre.

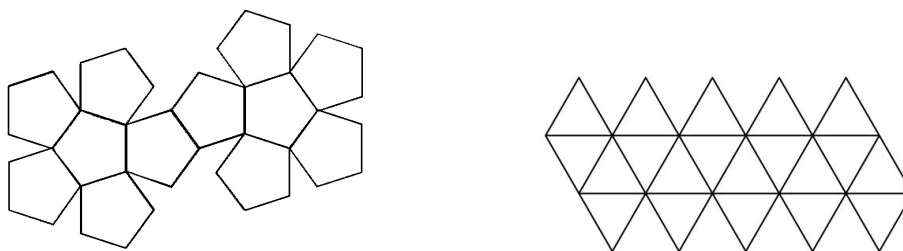


FIGURE 9 – Un patron du dodécaèdre (gauche) et un patron de l'icosaèdre (droite).

Unicité des solides de Platon : En utilisant, les formules établies précédemment, on peut démontrer que les seuls polyèdres réguliers sont les solides de Platon. Un polyèdre régulier doit en effet avoir toutes ses faces identiques donc avec le même nombre de côtés p et tous les sommets doivent être dans le même nombre de faces, disons q .

Maintenant, avec la formule d'Euler $S + F = A + 2$. La formule $qS = 2A$ divisée par q donne $S = 2A/q$ tandis que la formule $pF = 2A$ divisée par p donne $F = 2A/p$. En remplaçant S et F par leurs valeurs données par ces égalités dans la formule d'Euler, on obtient

$$\frac{2A}{q} + \frac{2A}{p} = A + 2.$$

En divisant par $2A$, il vient

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A}.$$

Puisque A est strictement positif, nous devons avoir

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}.$$

Enfin, en utilisant le fait que p et q doivent, tous deux, être au moins égaux à 3, on peut facilement voir qu'il existe seulement cinq possibilités pour $\{p, q\}$: $\{3, 3\}$, $\{4, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 3\}$ qui donne le $\{3, 5\}$ qui donne le.

- Dans un polyèdre pour $\{p, q\} = \{3, 3\}$, les faces ont $p = 3$ côtés, et sont donc des triangles, et chaque sommet est dans $q = 3$ faces : c'est le tétraèdre.
- Dans un polyèdre pour $\{p, q\} = \{4, 3\}$, les faces ont $p = 4$ côtés, et sont donc des carrés, et chaque sommet est dans $q = 3$ faces : c'est le cube.
- Dans un polyèdre pour $\{p, q\} = \{3, 4\}$, les faces ont $p = 3$ côtés, et sont donc des triangles, et chaque sommet est dans $q = 4$ faces : c'est l'octaèdre.
- Dans un polyèdre pour $\{p, q\} = \{5, 3\}$, les faces ont $p = 5$ côtés, et sont donc des pentagones, et chaque sommet est dans $q = 3$ faces : c'est le dodécaèdre.
- Dans un polyèdre pour $\{p, q\} = \{3, 5\}$, les faces ont $p = 3$ côtés, et sont donc des triangles, et chaque sommet est dans $q = 5$ faces : c'est l'icosaèdre.

En fait, une fois que p et q sont fixés, les nombres de sommets S , d'arêtes A et de faces F sont fixés. On peut facilement déduire des formules (1), et (2), que

$$S = \frac{4p}{4 - (p - 2)(q - 2)}, \quad A = \frac{2pq}{4 - (p - 2)(q - 2)}, \quad \text{et} \quad F = \frac{4q}{4 - (p - 2)(q - 2)}.$$