Fiche pédagogique

Activité : Coloration gloutonne grandeur nature.

Objectifs pédagogiques : Se familiariser avec la notion de graphe et d'algorithme. Déccouvrir les problèmes d'optimisation. S'initier à appliquer un algorithme et à l'expérimenter.

Notions abordées : Graphes, coloration, algorithme, algorithme glouton,

Matériel nécessaire : Cerceaux et lattes, chapeaux de 4 couleurs différentes, feuilles numérotées.

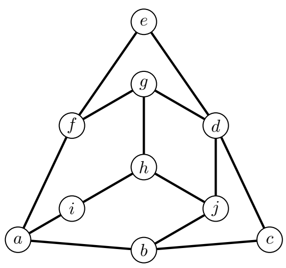
Niveau : A partir du cycle 3.

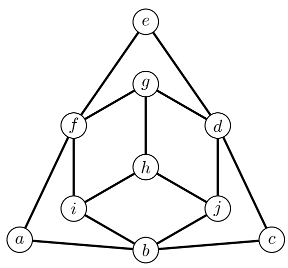
Déroulement : Sur le sol est représenté un graphe. Les sommets du graphe sont les cerceaux et les arêtes du graphe sont dessinées avec les lattes.

On commence par décrire au public que ce qu'il a devant lui est un graphe. On insiste sur le fait que le tracé d'une arête n'a pas d'importance et que la seule chose importante est les deux sommets qu'elle relie. On peut aussi donner des exemples de ce que peut modéliser un graphe : réseau routier, réseaux physiques (ordinateurs, serveurs, ...), réseaux virtuels (graphe d'amitié, ...), molécules, ... On peut aussi demander au public ce qu'il imagine pouvoir modéliser avec.

Les participants sont ensuite positionnés sur le graphe (un par sommet). On leur explique ensuite le jeu de coloration. Par exemple, en leur disant que le graphe est le graphe d'interférence d'un réseau d'antennes. Ils sont donc des antennes et chacun doit émettre avec une fréquence (couleur de chapeau). La contrainte est que deux antennes reliées par une arête (i.e qui interfèrent) doivent émettre avec des fréquences (couleurs) différentes.

On peut partir sur un des deux graphes dessinés ci-dessous. Mais bien évidemment d'autres graphes sont possibles.





On donne à chacun quatre chapeaux de couleur différentes. Une fois qu'une solution est trouvée, on leur explique que pour des raisons de coût ou de bande passante, on veut minimiser le nombre de couleurs utilisées. On retire donc les chapeaux d'une des couleurs, et on leur demande de recommencer.

Normalement, avec 4 chapeaux ils vont trouver assez rapidement une solution, puis avec trois chapeaux également. Avec deux chapeaux, ils trouvent une solution avec le graphe de droite, mais pas avec le graphe de gauche. (Voir Activité *2-coloration grandeur nature*).

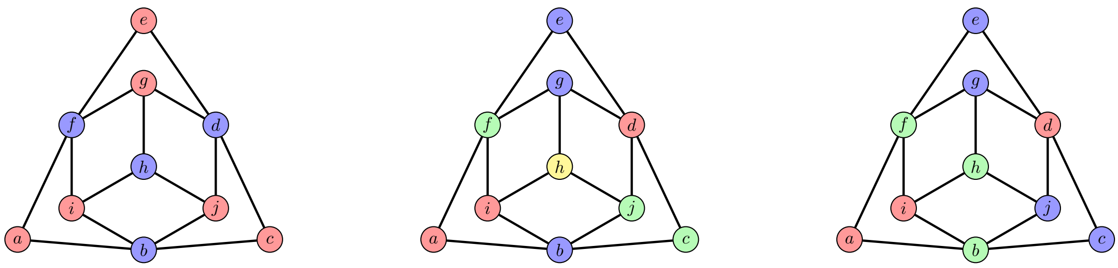
On questionne alors le public sur comment ils ont pu faire. Quelle a été leur stratégie ? Pourrait-il l'expliquer pour que cela soit "compréhensible" par un ordinateur, c'est-à-dire traduit dans un algorithme ? On peut également parler ici de la différence entre algorithme distribué et centralisé.

Ensuite, on leur explique l'algorithme glouton et on leur fait appliquer. On prend donc des feuilles numérotées (de 1 au nombre du sommet du graphe) et on en distribue une à chaque participant. Cela définit donc un ordre sur les sommets. On donne ensuite un ordre sur les couleurs, par exemple, rouge < bleu < vert < jaune. Chaque participant, dans l'ordre des numéros figurant sur les feuilles, doit appliquer la procédure suivante :

1. Si aucun voisin n'a de chapeau rouge, mettre le chapeau rouge.
2. Sinon si aucun voisin n'a de chapeau bleu, mettre le chapeau bleu.
3. Sinon si aucun voisin n'a de chapeau vert, mettre le chapeau vert.
4. Sinon si aucun voisin n'a de chapeau jaune, mettre le chapeau jaune.
5. Sinon dire que c'est impossible avec 4 couleurs.

On leur fait appliquer cet algorithme avec différents ordres des sommets. Par exemple, sur le graphe de droite ci-dessus, on peut utiliser les ordres :

- $a < b < c < d < e < f < g < h < i < j$: l'algorithme donne la coloration avec deux couleurs ci-dessous à gauche.
- $a < b < d < c < j < e < g < f < i < h$: l'algorithme donne la coloration avec quatre couleurs ci-dessous au centre.
- $a < i < d < j < b < c < e < f < g < h$: l'algorithme donne une coloration avec trois couleurs ci-dessous à droite.



On fait remarquer que, suivant l'ordre, on obtient des solutions plus ou moins bonnes. On explique que tout le problème est de trouver un bon ordre. Malheureusement la fameuse conjecture P≠ NP, dont la preuve (où le contrexemple) rapportera un million de dollars à ses auteurs, implique que ce n'est pas faisable : selon cette conjecture, il n'existe pas d'algorithme efficace pour décider si un graphe peut être coloré avec 3 couleurs.