Fiche pédagogique

Activité : Les carrés magiques

Objectifs pédagogiques : Illustrer la notion d'invariant.

Notions abordées : Carré, lignes, colonnes, invariant, preuve.

Matériel nécessaire : Les carrés magiques, i. e. 16 petits carrés numérotés de 1 à 16.

Niveau : A partir du Cycle 2.

Déroulement :

Les carrés sont placés en « grand carré » de 4 lignes de 4 petits carrés. Les petits carrés sont positionnés dans l'ordre : celui numéroté 1 en haut à gauche, celui numéroté 4 en haut à droite, . . ., celui numéroté 16 en bas à droite. Comme ci-contre.
Le mathémagicien demande à un participant de choisir 4 petits carrés de telle sorte qu'il en prenne exactement un par ligne et par colonne. (Une manière de faire est de faire choisir les carrés 1 par 1, de mettre le carré choisi de côté est d'enlever ceux qui sont dans la même ligne et la même colonne que lui.) Le mathémagicien demande alors au candidat de faire la somme des nombres qu'il a choisis. Le mathémagicien fait alors mystérieusement apparaître cette somme au dos des petits carrés sélectionnés. Ceci est possible car le dos des petits carrés a été spécialement préparé comme ci-contre.

Le mathémagicien demande à un participant de choisir 4 petits carrés de telle sorte qu'il en prenne exactement un par ligne et par colonne. (Une manière de faire est de faire choisir les carrés 1 par 1, de mettre le carré choisi de côté est d'enlever ceux qui sont dans la même ligne et la même colonne que lui.) Le mathémagicien demande alors au candidat de faire la somme des nombres qu'il a choisis. Le mathémagicien fait alors mystérieusement apparaître cette somme au dos des petits carrés sélectionnés.

Cette activité permet d'appréhender des concepts simples de géométrie (carré, ligne, colonne, . . .) et de faire des additions simples. Elle permet également de les faire réfléchir au « truc » du tour.

En assistant plusieurs fois au tour, un participant s'aperçoit assez vite que le résultat est toujours le même (ici 34) et peut donc formuler l'hypothèse que c'est toujours le cas.

Cela permet de s'apercevoir que des choses intuitivement imprévisibles comme la somme de quatre nombres peuvent l'être si des contraintes sont ajoutées (ici que les nombres soient dans l'ordre et qu'on en choisisse un par ligne et par colonne).

Ceci introduit à la notion d'invariant en mathématiques.

On peut démontrer que le résultat est toujours le même à l'aide une preuve relativement simple. Tout d'abord, posons 4 jetons sur les quatre carrés de la première colonne de gauche. Leur somme vaut 28. Les jetons ne correspondent pas à un choix valide. Pour avoir un choix valide, il faut déplacer (en restant sur la même ligne) un jeton sur la deuxième colonne (donc ajouter 1), un autre sur la troisième colonne (et donc ajouter 2) et un dernier sur la quatrième colonne (et donc ajouter 3). La somme pour un choix valide de 4 carrés est donc forcément $28 + 1 + 2 + 3 = 34$.

On peut facilement généraliser ce jeu avec un plus grand nombre de petits carrés (5×5, 6×6, ...) et avec d'autres valeurs en progression arithmétique. Un exemple avec 36 carrés numérotés de 1 à 36 est donné ci-dessous.