TERRA NUMERICA

Fiche pédagogique

Activité : Jeu des bâtonnets

Objectifs pédagogiques : S'initier aux stratégies gagnantes au travers d'un jeu et ainsi aux algorithmes et à la preuve.

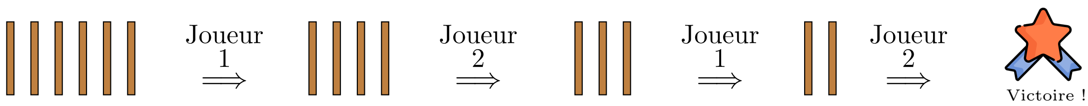
Notions abordées : Stratégie gagnante, position perdante ou gagnante, multiples, récurrence pour les plus âgés.

Matériel nécessaire : Un (ou plusieurs) jeu de bâtonnets (ou d'autres objets).

Niveau : A partir du cycle 2.

Déroulement : Faire jouer les élèves au jeu suivant. Au départ, un certain nombre de bâtonnets sont disposés devant les deux joueurs. Chacun son tour, chaque joueur ôte un ou deux bâtonnets. Celui qui gagne est celui enlève le dernier bâtonnet.

Ci-dessous un exemple de partie où le deuxième joueur gagne car, au dernier coup, il enlève les deux derniers bâtonnets (et en particulier le tout dernier).



Le premier objectif de cette activité est que les participants **découvrent par eux même une stratégie gagnante** et pour quel joueur. Ainsi **la description de la stratégie doit comprendre la décision de commencer à jouer ou pas**. Pendant cette phase, l'animateur peut jouer le rôle du cyborg infaillible. Quand un participant pense avoir trouvé une stratégie, il vient défier l'animateur qui doit être sans pitié et jouer parfaitement. Ainsi, à la moindre erreur du participant, l'animateur gagne. Si les participants ont du mal à trouver, on peut leur donner des indices, notamment leur indiquer de regarder ce qui se passe avec peu de bâtonnets.

Une fois une stratégie trouvée, il est demandé aux participants de l'expliciter clairement, c'est-à-dire de manière non ambiguë et compréhensible par un ordinateur.

Enfin, il est demandé aux participants de démontrer que leur stratégie est bien une stratégie gagnante.

Stratégie gagnante : Pour trouver une stratégie gagnante, regardons ce qui se passe quand il y a peu de bâtonnets.

S'il y a un ou deux bâtonnets, le premier joueur peut les enlever du premier coup et gagne.

Supposons maintenant qu'il y ait trois bâtonnets. Si le premier joueur ôte deux bâtonnets, il en reste un que le second joueur peut enlever pour gagner. Si le premier joueur ôte un bâtonnet, il en reste deux que le second joueur peut enlever pour gagner. Dans tous les cas, le second joueur gagne (s'il joue bien). « Trois bâtonnets » est donc une position perdante (pour le joueur qui doit jouer).

Supposons qu'il y ait quatre bâtonnets. En enlevant un bâtonnet, le premier joueur laisse trois bâtonnets et le second joueur doit jouer en premier. Or comme nous venons de le voir, ≪ trois bâtonnets ≫ est une position perdante, donc le second joueur perd (à condition que le premier joueur joue bien c'est-à-dire joue comme le second joueur au paragraphe précédent), et donc le premier joueur gagne. De même, quand il y a cinq bâtonnets, en enlevant deux bâtonnets, le premier joueur laisse trois bâtonnets qui est une position perdante au second joueur, et donc le premier joueur gagne.

S'il y a six bâtonnets, le premier joueur perd. En effet, s'il enlève un bâtonnet, le second joueur peut en enlever deux, et s'il en enlève deux, le second joueur peut en enlever un. Dans les deux cas, le joueur se retrouve avec trois bâtonnets qui est une position perdante.

Le raisonnement se poursuit ainsi. Comme ≪ 6 bâtonnets ≫ est une position perdante, alors par l'argument ci-dessus, ≪ 9 bâtonnets ≫est une position perdante. Puis comme ≪ 9 bâtonnets ≫ est une position perdante, ≪ 12 bâtonnets ≫ l'est aussi, donc ≪ 15 bâtonnets ≫ puis ≪ 18 bâtonnets ≫, etc le sont. Bref, les positions perdantes sont quand il y a 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...bâtonnets, c'est-à-dire quand le nombre de bâtonnets est un multiple de 3. Dans ce cas, le À chaque joueur a une stratégie gagnante.

Remarque : A partir du collège, on peut formaliser cela un peu plus pour introduire le principe de récurrence. Dire que ce principe permet de montrer des propriétés pour une infinité de choses (ici les multiples de 3). On montre d'abord la propriété pour la première chose : ici que $0 = 3 \times 0$ ou $3 = 3 \times 1$ est une position perdante. Ensuite on montre que si une chose a la propriété alors la chose suivante l'a aussi : ici que si un multiple de 3, disons $3 \times i$, est une position perdante, alors le multiple suivant $3 \times (i + 1) = 3 \times i + 3$ est aussi une position perdante.

Quand il y a 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...bâtonnets, c'est-à-dire quand le nombre de bâtonnets est un multiple de 3 plus 1, alors le premier joueur peut gagner en enlevant un bâtonnet, ce qui laisse don adversaire dans une position perdante. Quand il y a 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...bâtonnets, c'est-à-dire quand le nombre de bâtonnets est un multiple de 3 plus 2, alors le premier joueur peut gagner en enlevant deux bâtonnets, ce qui laisse son adversaire dans une position perdante.

La stratégie gagnante est donc la suivante :

1. **Si** le nombre de bâtonnets est un multiple de 3, **alors** laisser l'adversaire commencer. **Sinon** commencer à jouer.
2. À chaque tour, enlever un ou deux bâtonnets, de manière à ce qu'il en reste un multiple de 3.

Jouer avec des objets différents Il est classique de jouer à ce jeu avec des bâtonnets positionnés en ligne. Cela aide les élèves à trouver et appliquer les stratégies. En effet, cette présentation du jeu rend facile de grouper, physiquement ou mentalement, les bâtonnets. Il peut cependant être intéressant de les faire jouer avec différents objets, pas forcément tous de même nature, et disposés de manière aléatoire sur la table, afin de les habituer à manier des quantités (nombres) sans régularité.

Variantes On peut proposer un grand nombre de variantes différentes au jeu des bâtonnets.

Il est intéressant de changer le nombres de bâtonnets que les joueurs peuvent enlever. Par exemple, si les joueurs peuvent enlever 1, 2 ou 3 bâtonnets, (au lieu de 1 ou 2), alors ce sont les multiples de 4 qui sont les positions perdantes pour le Jeu des bâtonnets par au plus 3 et les multiples de 4 plus 1 qui sont les positions perdantes pour le Jeu des bâtonnets par au plus 3 inversé. De manière plus générale, si les joueurs peuvent enlever au plus k bâtonnets, alors ce sont les multiples de $k + 1$ qui seront les positions perdantes pour le Jeu des bâtonnets par au plus k et les multiples de $k + 1$ plus 1 qui sont les positions perdantes pour le Jeu des bâtonnets par au plus k inversé. On peut donc ainsi les faire travailler avec les multiples du nombre que l'on veut.

On peut aussi présenter la version « misère » du jeu, dans laquelle la condition de victoire a été changée en condition de défaite : dans cette version, le joueur qui enlève le dernier bâtonnet a perdu. En observant qu'en mettant un bâtonnet de côté, que nous appellerons bâtonnet spécial, et qui ne sera enlevé qu'à la fin, la version « misère » revient à jouer la version normale avec les bâtonnets non spéciaux, on en déduit que les positions perdantes de la version « misère » sont quand le nombre de bâtonnets non spéciaux est un multiple de 3, autrement dit quand le nombre total de bâtonnets est un multiple de 3 plus 1 : 1, 4, 7, etc ...

Aller plus loin A partir du niveau troisième, on peut poursuivre cette activité avec l'activité Machine I.A. qui permet d'expliquer comment une machine peut trouver la stratégie gagnante à ce jeu à l'aide de l'apprentissage par renforcement.