Fiche pédagogique

Activité : Géométrie et ballon de football (sur écran sphérique)

Objectifs pédagogiques : Expliquer que les ordinateurs se représentent le monde grâce à des modèles mathématiques, créés par les humains. Que ceux-ci sont riches et peuvent dire beaucoup de choses même sur les objets les plus simples. Rappeler et faire découvrir quelques notions et résultats de géométrie.

Notions abordées : Polygones, polyèdres, preuve par l'absurde. Triangulation.

Matériel nécessaire : Ecran sphérique.

Niveau : A partir du cycle 3.

Durée : 1/2 heure jusqu'à une heure (voire plus) si on généralise et détaille tous les ballons.

Déroulement : Commencer par expliquer aux élèves qu'en général les formes sont représentées (et donc approximées) par des unions de polygones, notamment dans les jeux videos. L'idée de l'activité est donc regarder un objet simple, un ballon de foot, comme un mathématicien (et donc les ordinateurs).

Demander aux élèves de décrire le ballon(Telstar de 1970) et sa structure. Leur faire observer que c'est une **sphère** composée de 12 **pentagones** et 20 **hexagones**, et que ceux-ci sont réguliers (côtés de même longueur et angles de même valeur). Les pentagones et les hexagones forment un pavage de la sphère.

Faire émerger ou poser la question : pourquoi deux types de polygones ? Ne serait-ce pas possible de le faire avec un seul type de polygones ? Pour répondre à cette question il faut regarder le ballon comme un mathématicien ou un ordinateur. C'est-à-dire mettre des **arêtes** à la place des coutures, et des **sommets** au jonction entre les coutures. On oublie alors le ballon et on obtient un **polyèdre** qui contient sussi des **faces**, les zones délimitées par les sommets arêtes.

Les polyèdres sont connus et étudiés depuis l'antiquité. Par exemple, un des plus grands mathématiciens de tous les temps, Leonhard Euler, a prouvé une formule sur les polyèdres, qui porte son nom : celle affirme que, dans un polyèdre, le nombre de sommets plus le nombre de faces est égal aux nombres d'arêtes plus 2.

Vérifier cette formule sur le ballon : 60 sommets, 32 faces et 90 arêtes.

Des ballons constitués d'un seul type de polygones sont des **polyèdres réguliers**.

Ceux-ci sont bien connus par les mathématiciens et ce depuis les grecs. Il n'y en a que 5. Ils sont aussi appelés les **solides de Platon**.

Faire défiler les polyèdres. Donner leur nombres de sommets, de faces et d'arêtes et vérifier la formule d'Euler sur certains d'entre eux. On peut insister sur le fairt que les faces sont les polygones sur la surface. Par exemple, dans l'octaèdre le carré qui fait l'équateur n'est pas une face.

Malheureusement, aucun de ces polyèdres ne permet de faire un ballon convenable. Faire réfléchir les enfants à pourquoi ? Parce qu'ils sont trop pointus ?

On peut mentionner qu'il n'y a pas de pointes en un sommet si la somme des angles en un sommet vaut 360 degrés. Plus cette somme est inférieure à 360, plus c'est pointu.

L'idéal aurait été de faire un ballon avec que des hexagones réguliers. Ils ont des angles de 120 degrés donc la somme fait 360 degrés, il n'y aurait pas de pointes. Malheureusement cela n'est pas possible comme on le montre.

La preuve est le moment le plus compliqué. (A partir de la 4ème.)

comment démontrer que quelque chose n'existe pas. Prouver que quelque chose existe est facile. Il est suffisant de décrire ou de présenter la chose. Par exemple, pour démontrer l'existence d'un icosaèdre, il nous a suffit de vous en montrer un. Mais, comment montrer qu'une chose n'existe pas ? On ne peut pas décrire quelque chose qui n'existe pas. Pour cela les mathématiciens ont inventé un outil très puissant : **le raisonnement par l'absurde**. On suppose que la chose existe, puis par une suite de **déductions logiques**, on arrive à une **contradiction**, c'est-à-dire un énoncé faux. Par exemple, $2 + 2 = 6$.

Supposons donc **par l'absurde** qu'il existe un polyèdre dont toutes les faces sont des hexagones. Ce polyèdre a un certain nombres de faces. Mais, on ne sait pas combien il y en a. Il pourrait en avoir 10, 20, 100, un million, on ne sait pas. Là encore, pour parler d'un nombre qu'on ne connait pas, les mathématiciens ont une astuce : **l'inconnue**. Quand on ne connait pas un nombre, on choisit une lettre pour représenter ce nombre. Ici nous noterons n le nombre de faces de notre polyèdre hypothétique.

Déterminons le nombre d'arêtes de ce polyèdre. Une face étant hexagonale, elle est entourée par 6 arêtes. Et chaque arête est dans deux faces. Ainsi si on compte 6 pour chaque face, on va compter chaque arête deux fois. Ainsi en comptant 6n on a deux fois le nombre d'arêtes. Le nombre d'arêtes vaut donc $6n/2 = 3n$.

Déterminons maintenant le nombre de sommets du polyèdre. Chaque face est entourée par 6 sommets. Et chaque somment est dans trois faces. Ainsi si on compte 6 pour chaque face, on va compter chaque sommet trois fois. Ainsi en comptant 6n on a trois fois le nombre de sommets. Le nombre de sommets vaut donc $6n/3 = 2n$.

Récapitulons, notre polyèdre hypothètique à n faces a forcément 3n arêtes et 2n sommets. Et comme tout polyèdre, il doit satisfaire la formule d'Euler. (Le nombre de sommets plus le nombre de face est égal au nombre d'arêtes plus 2.) On a donc $2n + n = 3n + 2$. Soit $3n = 3n + 2$. Aucun nombre (ici $3n$) ne peut être égal à lui même plus 2. 2 n'est pas égal à 4, 10 n'est pas égal à 12, etc ... Nous sommes donc arrivés à notre contradiction.

Cela veut dire que notre hypothèse est fausse. Il n'existe donc pas de polyèdre dont toutes les faces sont des hexagones.

Comme un ballon ne peut être fait aevc un seul type de polygones, il a fallu en faire un avec deux. Pour cela, on est parti d'un icosaèdre qu'on a tronqué en coupant les pointes autour des sommets. Ces 12 pointes sont ainsi devenues les 12 pentagones, et les 20 faces de l'icosaèdre sont devenues des hexagones.

Mentionner que toutes les formes sphériques (notamment les géodes) construites avec un seul type de pièces le plus souvent des triangles présentent des irrégularités. Autour de presque tous les sommets il y en six triangles qui forment des hexagones, mais autour de 12 d'entre eux il y en a seulement 5. Les faire chercher sur les différentes géodes.

Enfin terminer qu'on peut faire des ballons avec autre chose que des polygones. C'est le cas du ballon Brazuca, fait à partir de 6 courbes. En fait celui-ci a une structure de cube. On a cependant déformé les arêtes des carrés qui forment les faces pour que les forment s'approche plus de la sphère quand on les recollent. On peut notamment leur faire remarquer qu'en chaque sommet la somme des angles est 360 degrés et donc qu'il n'y a pas de pointe.

Supplément :
Pour des élèves en cycle 3, avant de présenter les polyèdre voire au débit de la présentation, on peut leur donner des geomag et leur demander de faire 4 triangles avec 6 bâtonnets et autant de billes qu'ils veulent. Ils sont alors forcés de faire le tétraèdre et donc de sortir du plan,
Si on veut aller plus loin ou s'il y a des questions on peut parler de recollement de deux domaines avec le théorème de Pogolerov qui dit que si les deux conditions nécessaires simples (longueurs des côtés égales et somme des courbures négatives) sont vérifiées on peut toujours recoller des pièces.

Matériel additionnel utile : Un ballon (Telstar) dégonflé pour pouvoir montrer les pointes et les angles sur les arêtes. Les polyèdres réguliers (en geomag par exemple). Des geomag.