Fiche pédagogique

Activité : Pick et Pick et calcul d'aire

Objectifs pédagogiques : • Faire découvrir le théorème de Pick qui permet de calculer l'aire de n'importe quel polygone qui est dessiné sur une grille.

- Suivre une démarche scientifique pour l'analyse et la résolution de problème.
- Redécouvrir qu'à aire égale les périmètres peuvent être différents.

Notions abordées :
Géométrie : Polygone, aire, périmètre, théorème de Pick.

Matériel nécessaire : • « Geoboards » en bois. Picots colorés sans collerette. Elastique pour délimiter le contour des polygones.

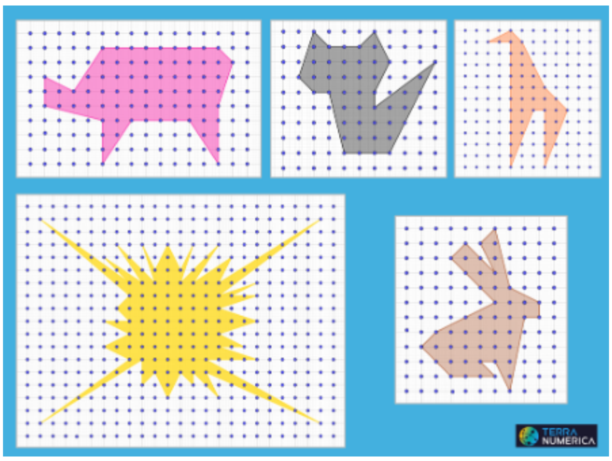
- Poster carton plume. Livret avec des exemples de polygones en forme d'animaux.
- Puzzles de pick.
- Picots colorés avec collerette (version longue).

Niveau : Cycle 3 jusqu'à la terminale.

Durée : 30 minutes pour la version simple, 1h pour la version longue.

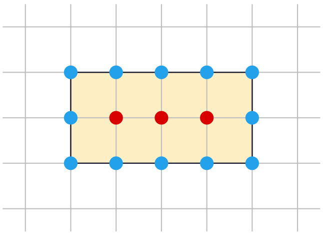
Début de l'atelier.

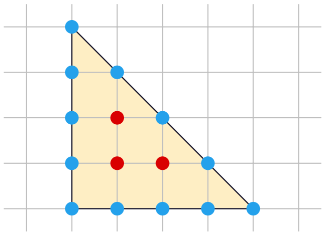
En utilisant le recto du carton de présentation, présenter l'objectif de l'atelier qui consiste à trouver la « formule » pour calculer l'aire de toute sorte de polygones, des simples et des plus compliqués. Mentionner que pour les plus simples, on peut s'en sortir en faisant la somme d'aires connues (rectangle, triangle, etc), mais cette approche ne fonctionne plus lorsque l'on doit calculer l'aire de polygones plus compliqués comme le soleil.



Demander si quelqu'un dans l'audience à une idée sur les paramètres que l'on pourrait utiliser pour développer une formule.

Distribuer les geoboards (1 pour 2 personnes et ajuster en fonction du nombre de participants dans l'atelier). Préciser que l'unité de longueur est le pas de la grille (et donc que l'unité d'aire et un carreau de la grille). Demander de faire un rectangle de taille 2×4 et un triangle rectangle isocèle avec deux côtés de longueur 4 en utilisant des picots sans collerette et en choisissant 2 couleurs différentes pour les points sur les bords et à l'intérieur. (Dans cette fiche, nous utiliserons bleu pour les bords et le rouge pour les points intérieurs.) Voir dessin-ci-dessous.





Très souvent, des personnes se trompent en faisant des côtés avec 4 picots (et donc de longueur 3) plutôt que de longueur 4. Il est alors important de repréciser que la longueur d'un côté est le nombre d'espaces entre deux sommets et donc 1 de moins que le nombre de picots sommets compris.

Demander quelles sont les aires du rectangle et du triangle. C'est l'occasion de réviser les formules ≪ aire(rectangle) = longueur × largeur ≫ et ≪ aire(triangle) = (base × hauteur)/2 ≫. Demander ce qu'on observe. L'audience devrait noter que les aires sont identiques et que le nombre de points sur les bords et à l'intérieur sont aussi identiques dans les deux figures (3 points intérieurs et 12 points sur les bords) . Demander ce qu'on peut en déduire ou quelles hypothèses on peut émettre. On note les hypothèses émises pour voir plus tard dans l'atelier celles qui s'avèrent justes. Ci-dessous, voici quelques hypothèses qui peuvent être émises.

(H1) L'aire dépend du nombre de points.

(H2) L'aire dépend du nombre de points intérieurs et du nombre de points sur le bord.

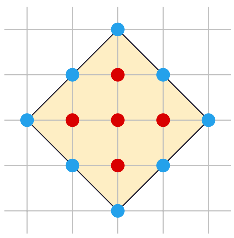
(H3) Si deux figures ont le même nombre de points, alors elles ont la même aire.

(H4) Si deux figures ont le même nombre de points sur le bord et le même nombre de points intérieurs, alors elles ont la même aire.

(H5) Si deux figures ont la même aire, alors elles ont le même nombre de points.

(H6) Si deux figures ont la même aire, alors elles ont le même nombre de points sur le bord et le même nombre de points intérieurs.

Faire réaliser ensuite le carré ci-contre avec des diagonales horizontales et verticales de longueur 4 et demander quelle est son aire. Celle-ci est également de 8. On peut le voir de différentes manières : une est de décomposer le carré en deux triangles par une diagonale avec base de 4 et hauteur de 2 ; une autre est de voir que ce carré est formé de 4 carrés unité et de 8 triangles isocèles rectangles d'une demi-unité.



Variante : Pour les plus âgés, on peut poser comme énigme comment faire un carré d'aire 8. La difficulté est de penser à ne pas le mettre parallèle aux axes, mais à 45 degrés.

On examine ensuite les hypothèses formulées au regard de cette nouvelle figure. Celle-ci a 5 points intérieurs et 8 points sur les bords. Bien qu'ayant la même aire que les autres figures, le nombre total de points, le nombre de points sur les bords et le nombre de points intérieurs diffèrent des autres figures. Cela invalide sûrement des hypothèses. Dans notre cas, les hypothèses (H5) et (H6). Cette figure peut donc amener le doute. L'idée est d'amener les participants à supposer que cela dépend du nombre de points intérieurs et du nombre de points sur le bord, mais de manière différente.

Pour les plus jeunes (jusqu'en 4e), on donne directement la formule du théorème de Pick : L'aire est égale au nombre de points intérieurs plus la moitié du nombre de points sur le bord moins 1, soit

$$A = i + b/2 - 1$$

avec A l'aire du polygone, i le nombre de points intérieurs et b le nombre de points sur le bord. Et on passe directement à la phase vérification en fin de cette fiche.

On peut faire remarquer qu'habituellement les aires sont calculées en faisant des multiplications. La formule de Pick calcule ici des aires avec des additions. En fait, la multiplication est caché, on devrait multiplier la formule par l'aire d'un carré de la grille qui ici vaut 1, car on a pris une grille unitaire.

Pour les plus grands, on leur fait découvrir la formule et on leur présente éventuellement une preuve.

Découverte de la formule.

Pour faire découvrir la formule, on propose de la faire découvrir pour les polygones rectilinéaires, c'est-à-dire dont les côtés sont parallèles aux axes (horizontaux et verticaux) et donc sur la grille. Pour cela, on met à disposition des participants des picots avec collerette. Il existe 4 types de collerettes : la collerette rouge (ou collerette entière) qui est un carré unitaire centré sur un picot rouge, la collerette jaune (ou trois quarts de collerette) qui est une collerette pleine à laquelle on a ôté un carré $1/2 \times 1/2$ sur un picot jaune, la collerette bleue (ou demi-collerette) qui est un rectangle $1/2 \times 1$ avec un picot bleu au milieu d'un des côtés de longueur 1, et la collerette verte ou (quart de collerette) qui est un carré $1/2 \times 1/2$ avec un picot vert sur un de ses sommets. Voir Figure 1. En présentant ces collerettes, éviter de donner leurs noms (pleine, demi, quart) qui correspondent à leur aire, et préférer leur couleur (rouge, jaune, bleu, et vert).

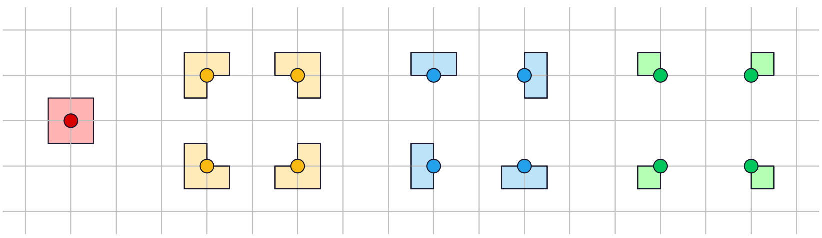
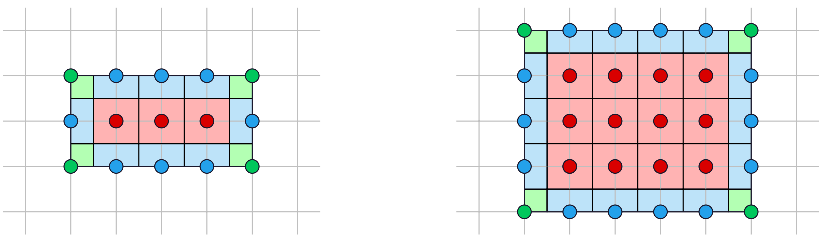


FIGURE 1 – Les picots à collerettes et leurs différentes positions (vue de haut).

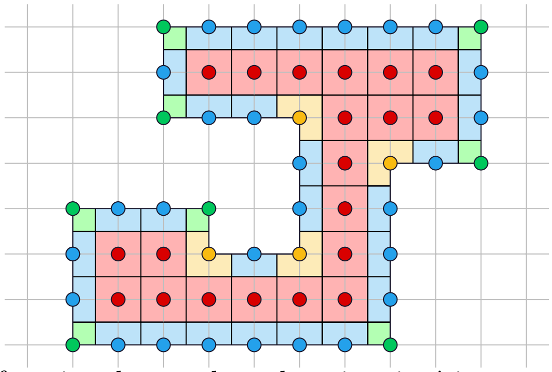
Le but du jeu est de recouvrir exactement les polygones rectilinéaires avec les collerettes. On commence avec des rectangles.



Notons c_1 le nombre de picots avec collerette verte, c_2 le nombre de picots avec collerette bleue, c_3 le nombre de picot avec collerette jaune et c_4 le nombre de picots avec collerette bleue.

Les participants devraient observer qu'une collerette verte est d'aire $1/2 \times 1/2 = 1/4$, une collerette bleue est d'aire $1/2 \times 1 = 1/2$, une collerette jaune est d'aire $1 - 1/4 = 3/4$ et une collerette rouge est d'aire 1. Pour un rectangle, on a donc $A = \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + c_4$.

On regarde ensuite des polygones rectilinéaires plus compliqués comme celui ci-contre. L'aire des collerettes jaune étant de 3/4, on obtient alors la formule générale suivante.



$$A = \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{3}{4}c_3 + c_4$$

Pour pouvoir la généraliser, on explique qu'on ne peut pas tenir compte des différents angles pour les sommets du bord (ici 90, 180, ou 270 degrés). Il faut donc transformer cette formule seulement en fonction des nombres de points intérieurs et des nombres de points sur le bord. L'idée est alors d'amener les participants à deviner la formule de Pick, puis à la prouver dans le cas des polygones rectilinéaires. Pour cela, on observe que les picots rouges correspondent aux points intérieurs donc $i = c_4$, et que les picots verts, bleus et jaunes correspondent aux points du bord donc $b = c_1 + c_2 + c_3$. On peut ensuite montrer que $c_1 = c_3 + 4$ dans tout polygone rectilinéaire. Pour voir cela, on peut prendre un point du bord et parcourir le bord dans le sens trigonométrique (inverse aux aiguilles d'une montre). On s'aperçoit qu'on tourne à gauche de 90 degrés à chaque sommet vert et à droite de 90 degrés, ou autrement dit à gauche de -90 degrés, à chaque sommet jaune. Mais au total on doit faire un tour vers la gauche, donc tourner de 360 degrés. On a donc $90 \times c_1 - 90 \times c_3 = 360$, ce qui en divisant par 90 donne $c_1 = c_3 + 4$. On a donc $b = c_1 + c_2 + c_3 = c_2 + 2c_3 + 4$, soit $c_2 + 2c_3 = b - 4$ En reportant dans notre formule de l'aire, on a

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{3}{4}c_3 + c_4 \\ &= \frac{1}{4}(c_1 + c_2 + c_3) + \frac{1}{4}(c_2 + 2c_3) + c_4 \\ &= \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}(b - 4) + i = i + b/2 - 1 \end{aligned}$$

On a ainsi trouvé la formule et montré celle-ci dans le cas des polygones rectilinéaires.

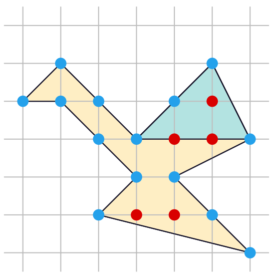
Pour les élèves de spécialités maths ou NSI, on peut ensuite donner une preuve du théorème de Pick pour tous les polygones.

Preuve du Théorème de Pick.

Preuve "naturelle" par récurrence.

On montre la formule par récurrence sur l'aire des polygones. La principale difficulté consiste à montrer la formule pour les triangles. On peut très bien admettre la formule pour les triangles pour donner un exemple simple de récurrence.

Supposons donc que la formule de Pick soit vraie pour les triangles. Prenons un polygone P qui n'est pas un triangle. Prenons un triangle T inclus dans P dont les sommets sont trois sommets de P. Soit Q le polygone obtenu en ôtant T de P. Par exemple sur la figure ci-contre T est en vert et Q est en jaune. Comme Q a une aire plus petite que P, par récurrence, la formule de Pick est vraie pour lui. On a donc $A(Q) = i(Q) + b(Q)/2 - 1$. De plus, $A(T) = i(T) + b(T)/2 - 1$, car la formule est vraie pour les triangles.

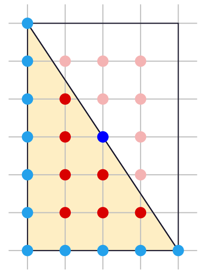


Maintenant, l'aire de P est la somme des aires de Q et T, donc $A(P) = A(Q) + A(T)$. Soit j le nombre de points intérieurs de P qui sont sur le bord de P et Q. On a $i(P) = i(Q) + i(T) + j$ et $b(Q) + b(T) = b(P) + 2j + 2$. On a donc

$$\begin{aligned} A(P) &= A(Q) + A(T) \\ &= i(Q) + b(Q)/2 - 1 + i(T) + b(T)/2 - 1 \\ &= i(Q) + i(T) + j + (b(Q) + b(T) - 2j - 2)/2 - 1 \\ &= i(P) + b(P)/2 - 1 \end{aligned}$$

ce qui montre la formule de Pick pour le polygone P.

Pour être complet, il reste à montrer la formule de Pick pour les triangles. On commence par la montrer pour les triangles rectangles dont les deux petits côtés sont parallèles aux axes. Soit T un tel triangle rectangle de petits côtés de longueurs ℓ_1 et ℓ_2. Et considérons le rectangle dont ce triangle est la moitié. L'aire du triangle T est la moitié de l'aire du rectangle, soit $A = \ell_1 \times \ell_2/2$. Soit k le nombre de points sur le bord de T qui sont des points intérieurs du rectangle (en bleu foncé sur la figure ci-contre). Le nombre de points sur le bord de T est alors $b = \ell_1 + \ell_2 + 1 + k$. Le nombre de points intérieurs du rectangle (les sommets en rouge, bleu foncé et rouge pâle) est $(\ell_1 - 1) \times (\ell_2 - 1)$, mais est aussi $2i + k$. On a donc $i = (\ell_1 - 1) \times (\ell_2 - 1)/2 - k/2$.

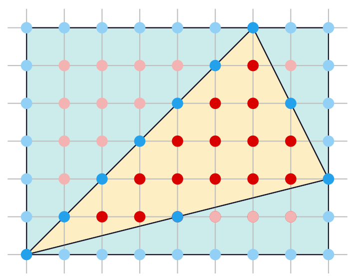


On en déduit

$$\begin{aligned} i + b/2 - 1 &= (\ell_1 + \ell_2 + 1 + k)/2 + (\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1)/2 - k/2 \\ &= (\ell_1 + \ell_2 + 1 + k + \ell_1 \times \ell_2 - \ell_1 - \ell_2 - 1 - k)/2 \\ &= \ell_1 \times \ell_2/2 = A \end{aligned}$$

La formule de Pick est donc vraie pour les triangles rectangles dont les deux petits côtés sont parallèles aux axes.

Déduisons en maintenant que la formule de Pick est vraie pour tous les triangles. Soit T un triangle quelconque. On peut l'entourer par trois triangles rectangles T_1, T_2 et T_3 pour former un rectangle R comme dans la figure ci-contre. La somme des nombres de points sur les bords de T et R est égale à la somme des nombres de points sur les bords de T_1, T_2 et T_3 (les sommets de T sont comptés deux fois dans chaque somme). Donc $b(T) + b(R) = b(T_1) + b(T_2) + b(T_3)$. Les points intérieurs du rectangle sont ceux des quatre triangles plus les points du bord de T qui ne sont pas ses sommets. On a donc $i(R) = i(T) + i(T_1) + i(T_2) + i(T_3) + b(T) - 3$.

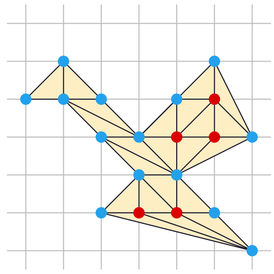


Maintenant, la formule de Pick est vraie pour les triangles rectangles T_1, T_2, T_3 et pour le rectangle R, en l'appliquant nous obtenons

$$\begin{aligned} A(T) &= A(R) - A(T_1) - A(T_2) - A(T_3) \\ &= i(R) + b(R)/2 - 1 - (i(T_1) + b(T_1)/2 - 1) - (i(T_2) + b(T_2)/2 - 1) - (i(T_3) + b(T_3)/2 - 1) \\ &= i(R) - i(T_1) - i(T_2) - i(T_3) - (b(T_1) + b(T_2) + b(T_3) - b(R))/2 + 2 \\ &= i(T) + b(T) - 3 - b(T)/2 + 2 \\ &= i(T) + b(T)/2 - 1 \end{aligned}$$

La formule de Pick est donc vraie pour le triangle.

<u>Preuve avec la Formule d'Euler.</u>



On découpe notre polygone en plein de petits triangles qui utilisent tous les points de la grille comme dans la figure ci-contre. Cela fait apparaitre t triangles qui sont de base 1 et de hauteur 1 et donc d'aire $1/2$. L'aire du polygone est donc $A = t/2$. Les sommets et les arêtes forment un graphe planaire qui a $f = t + 1$ faces, les t triangles plus la face externe. Les sommets de ce graphe sont les points sur les bords et les points intérieurs du polygone donc le nombre de sommets du graphe est $s = i + b$.

Comptons maintenant le nombre a d'arêtes de ce graphe. Chaque triangle contient trois arêtes ; chacune des arêtes intérieures de ce graphe est dans 2 triangles et chacune des arêtes du bord est dans 1 triangle. Notant a_{int} le nombre d'arêtes intérieures et a_{bd} le nombre d'arêtes sur le bord, on a $3t = 2a_{int} + a_{bd}$ et $a_{int} + a_{bd} = a$ et donc $3t = 2a - a_{bd}$. Or il y a autant d'arêtes sur le bord que de sommets sur le bord donc $a_{bd} = b$ et $3t = 2a - b$, soit $a = (3t + b)/2$.

Maintenant, la formule d'Euler pour les graphes planaires nous dit que $s + f = a + 2$. En remplaçant s, f et a par leurs valeurs obtenues précédemment. On a donc $i + b + t + 1 = (3t + b)/2 + 2$, ce qui nous donne $t/2 = i + b/2 - 1$. Comme $A = t/2$, on obtient la formule de Pick : $A = i + b/2 - 1$.

Vérification de la formule de Pick.

Faire réaliser aux élèves le polygone de leur choix, puis leur faire calculer l'aire avec la formule de Pick. Ils peuvent s'ils le souhaitent utiliser des polygones en forme d'animaux donnés dans le livret. Trois exemples sont présentés Figure 2.

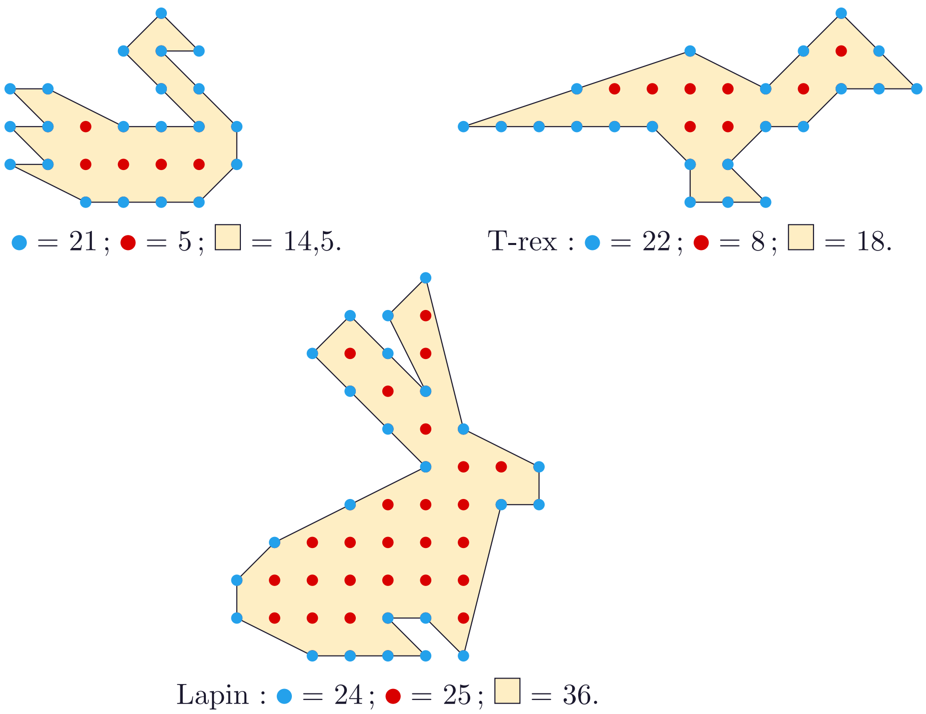


FIGURE 2 – Exemples de polygones pour vérifier la formule de Pick. D'autres sont disponibles dans le livret.

Pour certains polygones simples, on peut leur demander de vérifier la formule en calculant l'aire autrement, par exemple en découpant en plusieurs triangles ou rectangles et en sommant leurs aires qui sont faciles à calculer.

Pour vérifier la formule de Pick, on peut aussi calculer l'aire de certains en utilisant les puzzles de Pick. Ces puzzles permettent de former avec les mêmes pièces un polygone complexe et un rectangle. Cela veut donc dire que les deux formes ont la même aire. Celle du rectangle est facile à calculer, puisque c'est longueur × largeur. On trouve ainsi l'aire des deux formes et on peut vérifier que la formule de Pick donne bien cette valeur à la fois sur le polygone complexe et pour le rectangle.

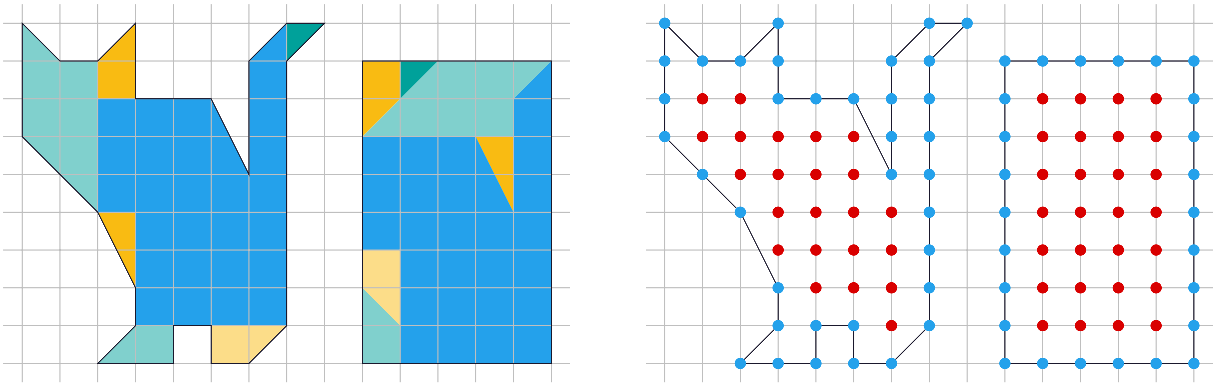


FIGURE 3 – Exemple de puzzle de Pick.

Par exemple, les pièces du puzzle de la Figure 3, permettent de faire soit le chat à gauche, soit le rectangle à droite. Ces deux polygones ont donc la même aire, à savoir $8 \times 5 = 40$, car le rectangle est de longueur 8 et largeur 5. On peut vérifier que c'est bien la valeur donnée par la formule de Pick. Le chat a 23 points intérieurs et 36 points. La formule de Pick donne bien une aire de $23 + 36/2 - 1 = 40$. De même, le rectangle a 28 points intérieurs et 26 points sur le bord. Là encore, la formule de Pick nous donne une aire de $28 + 26/2 - 1 = 40$.