

Fiche pédagogique

Activité : Course dans un graphe orienté

Objectifs pédagogiques : Comprendre comment la recherche d'une stratégie gagnante peut être automatisée, et dans quelles conditions.

Notions abordées : Stratégie gagnante, position perdante ou gagnante, graphes des positions, quantificateurs logiques "quel que soit", "il existe", algorithmes, modélisation de problèmes.

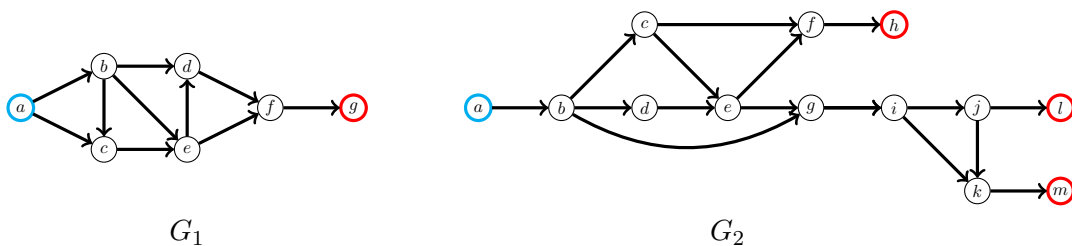
Niveau : A partir du cycle 3.

Matériel nécessaire : Photocopies individuelles des graphes, ou bache pour jouer à plusieurs, ou jeu en grandeur nature avec cerceaux et lattes.

Déroulement : On dispose un graphe orienté acyclique, c'est à dire qu'en suivant les arcs (flèches), on ne peut pas revenir sur un sommet par lequel on est déjà passé. Une manière facile de construire de tels graphes et de disposer des sommets dans le plan et de n'autoriser que des arcs qui vont de la gauche vers la droite.

Chaque graphe dispose d'un sommet de départ et d'un (ou plusieurs) sommets d'arrivée. La règle du jeu est la suivante : Initialement, un jeton se trouve sur le sommet de départ. Chacun leur tour, les joueurs doivent déplacer le jeton le long d'un arc. (Ils vont vers un autre sommet en suivant une flèche.) Le joueur qui amène le jeton vers un sommet d'arrivée gagne.

On peut par exemple utiliser un des graphes ci-dessous où les sommets de départ sont indiqués en bleu et les sommets d'arrivée en rouge.



L'activité se décompose en trois séquences. La première doit impérativement de faire avant les deux autres qui elles peuvent se faire dans un ordre indifférent.

Première séquence : Dans cette première séquence, le but est de faire émerger, verbaliser les stratégies gagnantes, puis de découvrir une manière automatique (i.e. un algorithme) pour trouver la stratégie gagnante sur n'importe quel graphe orienté acyclique

On laisse tout d'abord les élèves chercher les stratégies gagnantes pour différents graphes.

Dans un second temps, on leur explique, qu'il y a un algorithme qui permet de trouver la stratégie gagnante pour ces jeux. On détermine d'abord si les sommets sont perdants ou gagnants (pour le joueur qui doit jouer) en effectuant l'algorithme suivant :

1. Les sommets d'arrivées sont des sommets perdants. En effet, si le jeton est sur un sommet d'arrivée, le joueur adverse vient de l'y poser et on a perdu.
2. S'il existe un arc d'un sommet vers un sommet perdant, alors le sommet est gagnant.
3. Si tous les arcs qui partent d'un sommet vont vers des sommets gagnants, alors ce sommet est perdant.

Une fois cela fait, la stratégie consiste à toujours déplacer la jeton vers un sommet perdant (qui est de fait perdant pour l'adversaire).

Par exemple, pour le graphe G_1 , le sommet g est le sommet d'arrivée donc perdant par l'Etape 1 de l'algorithme (Figure 1 (i)). Le sommet f a un arc vers un sommet perdant (en l'occurrence g) et donc il est gagnant par l'Etape 2 de l'algorithme (Figure 1 (ii)). Tous les arcs partant de d (un seul ici df) vont vers des sommets gagnants donc d est perdant par l'Etape 3 de l'algorithme (Figure 1 (iii)). Les sommets b et e ont un arc vers un sommet perdant (en l'occurrence d). Ils sont donc gagnants (Figure 1 (iv)). Tous les arcs partant de c vont vers des sommets gagnants (en l'occurrence b et e) donc c est perdant (Figure 1 (v)). Enfin, il y a un arc du sommet a vers un sommet perdant (en l'occurrence c), donc le sommet a est gagnant (Figure 1 (vi)).

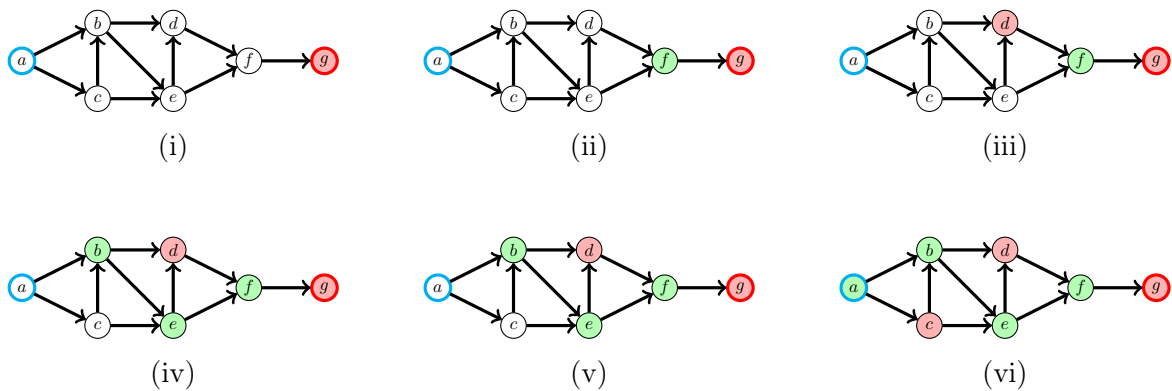


FIGURE 1 – Détermination des positions perdantes (en rouge) et gagnantes (en vert) pour le graphe G_1 .

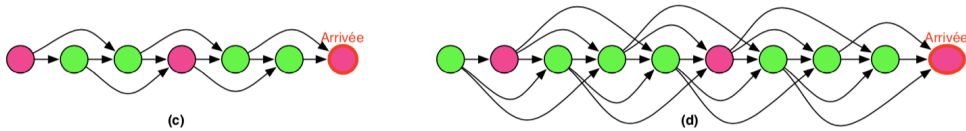
On peut vérifier que de chaque sommet gagnant vert on peut déplacer le jeton vers un sommet perdant rouge, et que de tout sommet perdant rouge on ne peut se déplacer que vers des sommets gagnants verts.

Pour terminer cette séquence, on donne des graphes orientés acycliques aux participants et le but est de trouver les

Deuxième séquence : Dans cette séquence, il est demandé de construire les graphes associés à certains jeux classiques sous forme de jeu dans un graphe orienté acyclique. Pour chacun de ces jeux, il faut (et il suffit) représenter les différentes positions possibles par des sommets et mettre un arc d'une position à une autre s'il est possible d'aller de la première à la seconde en jouant un coup valide.

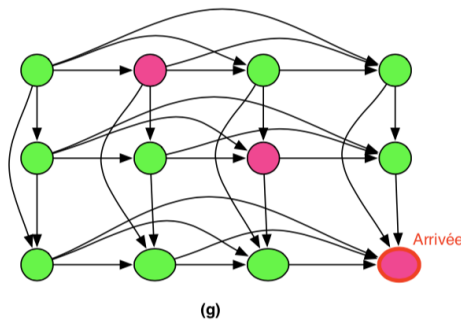
Pour des jeux tels que le Jeu des Bâtonnets ou le Jeu du Roi Buté, on obtient des graphes assez aisément visualisables.

Par exemple, pour les différents Jeu des bâtonnets. Par exemple, si on joue avec 6 bâtonnets et qu'on peut enlever 1 ou 2 bâtonnets, on obtient le graphe à gauche ci-dessous. (Les sommets correspondent de gauche à droite aux positions où il restent, 6,5,4,3,2,1, et 0 bâtonnets.) Si on joue avec 9 bâtonnets et qu'on peut enlever 1, 2, ou 3 bâtonnets, on obtient le graphe à gauche ci-dessous. Dans les deux graphes, les positions rouges sont les positions perdantes et les vertes les positions gagnantes.



Sans surprise, les stratégies gagnantes obtenues en utilisant les graphes sont les mêmes que celles obtenues directement.

Pour les jeux de la Tour Butée et de la Tablette de Chocolat Empoisonnée, on peut faire les graphes orientés pour des petites grilles ou tablettes. En revanche, pour des tailles plus grandes cela devient vite illisible. Ci-dessous le graphe pour une tablette 4×3 .

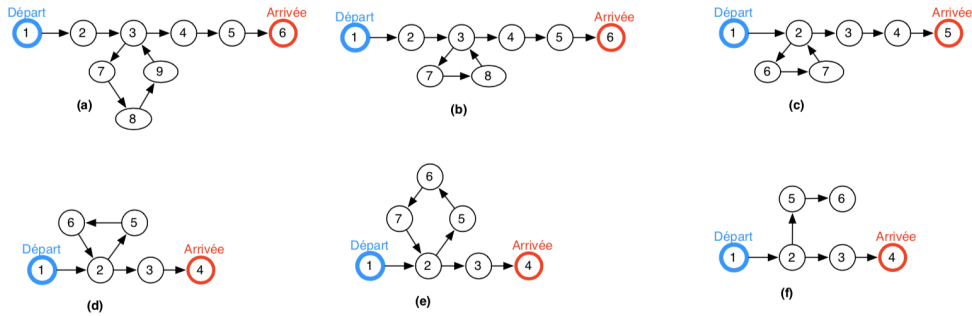


Troisième séquence : Cette séquence est libre, dans le sens où les élèves doivent créer leurs graphes orientés et essayer de trouver les stratégies gagnantes pour la course dans ces graphes.

Il y a de fortes chances que certains élèves fassent des graphes qui ne sont pas acycliques ou avec des puits (sommets n'ayant pas d'arc sortant) qui ne sont pas des sommets d'arrivées.

C'est l'occasion de rappeler que l'algorithme ci-dessus n'est garanti marcher que pour des graphes orientés acycliques et dont tous les puits sont des sommets d'arrivée.

Cela ne veut cependant pas dire qu'on ne puisse pas trouver de stratégie gagnante si le graphe orienté ne satisfait pas ces deux conditions. Pour certains c'est possible, pour d'autres non. Regardons par exemple, les graphes orientés ci-dessous..



Pour les graphes (a) et (b), le premier joueur gagne s'il déplace le jeton vers le sommet 4 lorsqu'il est sur le sommet 3. Pour le graphe (c), le second joueur gagne s'il déplace le jeton en 2 vers le sommet 3. Pour les graphes (d), (e) et (f), la stratégie qui consiste en déplacer le jeton en 2 vers le sommet 5 (quel que soit le joueur) amène à une partie sans vainqueur car on tourne alors infiniment sur le cycle 2-5-6-2 ou 2-5-6-7-2 pour (d) et (e) respectivement, et on est bloqué en 6 pour (f).