

Fiche pédagogique

Activité : Pavages d'Escher

Objectifs pédagogiques : Apprendre à identifier les isométries d'un pavage.

Notions abordées : Translation. Rotation. Réflexion. Réflexion glissée. Vecteurs.

Matériel nécessaire : Feuilles ou poster avec des pavages (d'Escher mais pas forcément), papier calque.

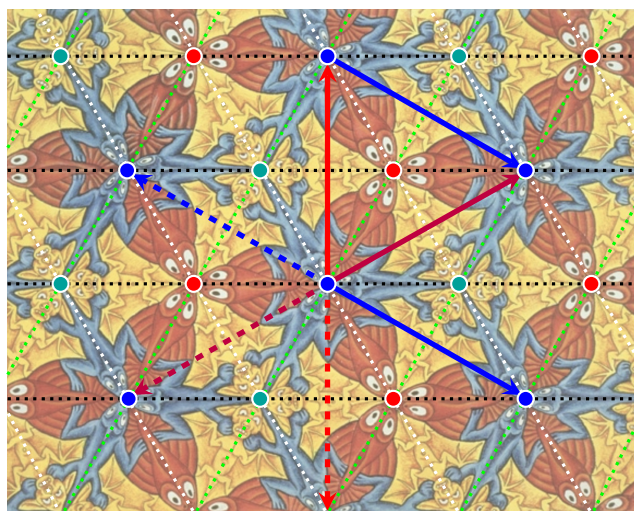
Niveau : Cycle 3 jusqu'à la terminale.

Durée : 30 minutes.

Déroulement.

Différents pavages d'Escher sont présentés aux participants qui doivent retrouver les différentes isométries de ces pavages, c'est-à-dire les différentes réflexions (symétries axiales)¹, rotations, et translations qui laissent le pavage invariant. Pour cela, l'utilisation d'un calque qu'on peut retourner, faire tourner ou déplacer peut être pratique, notamment pour les plus jeunes.

Pour les réflexions, on demande de représenter les axes de ces réflexions, et pour les rotations, on demande de placer les centres de rotations et d'expliciter l'angle minimum de rotation ou de manière équivalente l'ordre de la rotation, c'est-à-dire le nombre de rotations maximum qu'on peut faire avant de retomber sur la position initiale. Par exemple sur l'œuvre *Escher 85* ci-contre, les différents axes de réflexion sont indiqués en pointillés, et les centres des rotations sont indiqués par un disque coloré (vert, rouge ou bleu) bordé de blanc. L'angle de rotation minimum est de 120 degrés, ce qui donne un ordre de $360/120=3$.



Escher 85

Pour les translations, on demande de représenter les vecteurs de translations. Ces vecteurs peuvent évidemment être placés partout, mais on peut insister pour qu'ils partent d'un centre de rotation, (et donc finissent sur un autre centre de rotation). Dans la figure *Escher 85* ci-dessus, ces vecteurs sont tous ceux qui partent d'un centre de rotation d'une couleur donnée (vert, rouge

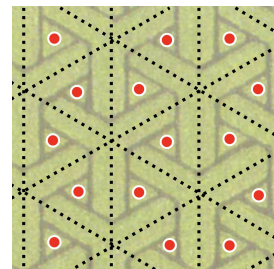
1. Pour éviter les confusions entre les deux types de symétries, symétries axiales et symétries centrales, nous utilisons ici le terme réflexion pour symétrie axiale. Nous ne parlons pas de symétries centrales car celles-ci sont des rotations à 180 degrés. Mais si on veut travailler la symétrie centrale, on peut demander de les repérer.

ou bleu) vers un autre centre de même couleur. Nous avons montré tous les vecteurs possibles partant d'un centre bleu vers les autres sommets bleus visibles.

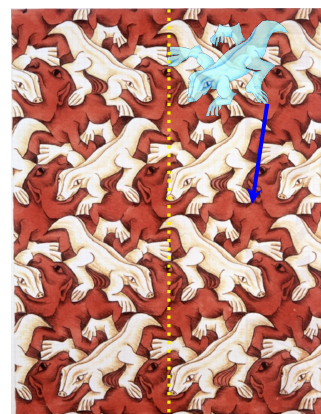
Il n'est pas obligatoire d'exiger de trouver toutes les isométries d'un pavage. On peut en exiger plus ou moins selon l'âge. De plus, si on veut travailler sur un type d'isométries en particulier, on peut se concentrer uniquement sur celles-ci.

Pour les plus âgés, on peut faire ressortir plusieurs choses :

- **Une rotation transforme un axe de réflexion en un autre axe de réflexion.** Donc si un centre est sur un axe de réflexion alors il est forcément à l'intersection de plusieurs axes. C'est le cas sur la figure *Escher 85* ci-dessus. Il y a cependant des cas, où les centres de rotations ne sont pas sur les axes. Par exemple, sur le motif ci-contre où les axes de réflexions sont indiqués en pointillé, il y a des axes de rotations aux de ces axes, mais également à l'endroit des points rouges.
- **Une translation peut être représentée par différents représentants d'un même vecteur.** Par exemple, les deux flèches bleues en trait plein sur la figure *Escher 85* ci-dessus sont des représentants du même vecteur. Autrement dit, la translation qui déplace d'origine d'une ces deux flèches vers la pointe de celle-ci, déplace également l'origine de l'autre vers la pointe de l'autre.
- **Une translation admet une translation inverse qui consiste à faire le déplacement suivant le vecteur opposé.** Par exemple, sur la figure *Escher 85* ci-dessus, pour chacune des translations suivant un vecteur en trait plein, la translation inverse est la translation suivant le vecteur opposé, de même couleur mais en trait interrompu. Faire une translation, puis son inverse revient à ne rien faire.
- **La composée de deux translations est une translation.** Ainsi sur la figure *Escher 85* ci-dessus, faire la translation dont le vecteur est la flèche rouge en trait plein puis la translation dont le vecteur est la flèche bleue en trait plein revient à faire la translation dont le vecteur est la flèche pourpre. Ceci permet d'introduire sans le dire la somme de deux vecteurs pour ceux qui ne connaissent pas les vecteurs, ou de faire le lien avec les vecteurs pour ce qui les connaissent. Pour ces derniers, on peut également leur demander explicitement de trouver deux vecteurs qui vont engendrer toutes les translations du pavage, c'est-à-dire telle que chaque translation puisse être obtenue en effectuant une succession de ces translations et de leurs inverses. Cette paire de vecteurs n'est bien entendu pas unique. Par exemple, n'importe quelle paire parmi les trois vecteurs en trait plein (rouge, bleu et pourpre) fait l'affaire. A noter, que comme le plan est un espace à deux dimensions, il faut et il suffit de deux translations pour les générer toutes. Pour des pavages en trois dimensions, il faudrait trois vecteurs pour pouvoir générer toutes les translations.



- Une **réflexion glissée** est la composition d'une réflexion suivie d'une translation. Evidemment, à chaque fois qu'un pavage admet des réflexions, alors il admet aussi des réflexions glissées. Mais un pavage peut aussi avoir des réflexions glissées, qui ne sont pas des compositions de réflexions et translations du pavage. Considérons par exemple, la figure *Escher 61* ci-contre. il est facile de voir que cette figure n'a pas de réflexion qui la préserve. En revanche, les lézards sur la deuxième ligne apparaissent clairement comme les images miroir de ceux de la première ligne. En fait, en faisant d'abord une réflexion par rapport à l'axe en pointillé jaune, puis une translation suivant le vecteur en bleu, le pavage est inchangé. Le lézard blanc en haut à gauche se transforme par réflexion en le lézard bleu transparent qui devient le deuxième lézard en partant de la gauche sur la deuxième ligne par translation.



Escher 61

Allons plus loin Pour ceux qui maîtrisent suffisamment bien les différentes isométries, on peut leur faire deviner le type de pavage de chacune des œuvres d'Escher proposé. Il y a exactement 17 types différents de pavages du plan. On peut identifier le type de pavage du plan en utilisant un algorithme simple qui est décrit dans le tableau ci-dessous. Par exemple, dans *Escher 85* le plus petit angle (non-nul) d'une rotation est 120 degrés, il y a des réflexions sur les axes desquels se trouvent les centres de rotations, donc le type de pavage d'*Escher 85* est **p31m**.

		Contient une réflexion ?			
		OUI		NON	
Plus petit angle de rotation ?	$360^\circ/6=60^\circ$	p6m		p6	
	$360^\circ/4=90^\circ$	Axe de réflexion à 45° ?		p4	
		Oui : p4m	Non : p4g		
	$360^\circ/3=120^\circ$	Centre de rotation hors des axes ?		p3	
		Oui : p31m	Non : p3m1		
	$360^\circ/2=180^\circ$	Réflexion d'axes perpendiculaires ?		Contient une réflexion glissée ?	
		OUI		NON	
		Centre de rotation hors des axes ?		p2mg	
		Oui : c2mm	Non : p2mm	Oui : p2gg Non : p2	
	Aucun = 360°	Axe de réflexion glissée en dehors des axes de réflexion ?		Contient une réflexion glissée ?	
		Oui : cm	Non : pm	Oui : pg Non : p1	