

Fiche pédagogique

Activité : Bit de parité

Objectifs pédagogiques : Introduire les codes correcteurs.

Notions abordées : Code correcteur, nombres pairs et impairs, bit de parité, coordonnées cartésiennes.

Matériel nécessaire : Jeu de cartes. (On peut utiliser des cartes bicolores, c'est-à-dire avec le recto et le verso de couleurs différentes que l'on peut fabriquer avec du papier à origami.) Grilles avec des jetons carrés de deux couleurs.

Niveau : A partir du Cycle 2.

Déroulement du tour : Ce tour de magie se fait à deux. Le mathémagicien envoie un devin (un partenaire qui connaît le tour) en dehors de la pièce.

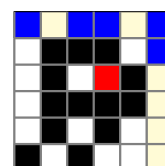
Il dispose des cartes pour faire une grille, par exemple 5×5 . Il demande au public de retourner certaines des cartes comme bon lui semble. Le mathémagicien rajoute ensuite une ligne de cartes au dessus de la grille et une à droite. Ce faisant il retourne les cartes de manière à ce que chaque ligne et chaque colonne ait un nombre pair de cartes face cachée.

Par exemple, sur la figure ci-dessous à gauche, les cartes face cachée sont en noir. En rajoutant une ligne et une colonne (cases jaunes et bleues sur la figure de droite avec les cartes face cachée en bleues) on obtient la disposition à droite sur la figure.



Le mathémagicien demande alors à quelqu'un de retourner une carte de son choix. Il fait alors rentrer son partenaire qui identifie cette carte. Pour cela, il lui suffit d'identifier la ligne et la colonne où il y a un nombre impair de cartes face cachée.

Par exemple, sur la figure ci-contre, si la carte en rouge est retournée et se retrouve face cachée, alors la troisième ligne (en partant du haut) se retrouve avec 5 cartes face cachée et la quatrième colonne (en partant de la gauche) avec 3 cartes face cachée. 5 et 3 sont des nombres impairs, donc la carte retournée est sur la troisième ligne et la quatrième colonne. C'est donc est la carte indiquée en rouge.



Lien avec les correcteurs d'erreur Une fois le tour présenté, il convient d'expliquer que le principe de ce tour est une technique de base en code correcteur d'erreur. Un message informatique (actuel) utilise le codage binaire et est donc une suite de 0 et de 1. Lors d'une transmission, il peut arriver qu'un bit (chiffre 0 ou 1) soit mal transmis : un 0 devient un 1 ou un 1 devient un 0.

Cela arrive très rarement mais peut fortement dénaturer le message ou le rendre ininterprétable. Comment garantir une transmission sans erreur ?

Une possibilité est d'envoyer trois fois le même message. Si une erreur se glisse, alors comme il n'y en a qu'une, elle n'apparaît que sur un des trois messages, et la bonne valeur apparaît sur les deux autres. Ainsi en prenant pour chaque bit la valeur qui apparaît sur au moins deux des messages, on a le message original.

Cette méthode a un désavantage : elle nécessite d'envoyer trois fois le message, ce qui est assez coûteux. Des techniques plus évoluées et beaucoup moins coûteuses ont été développées : les fameux codes correcteurs d'erreur. On envoie toujours un message plus long que l'original qui permet de retrouver l'original si une erreur se cache, mais celui-ci n'est pas beaucoup plus long que l'original, juste un peu.

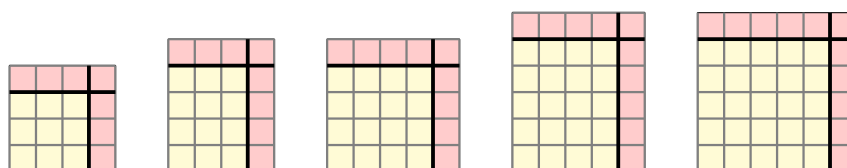
Le code correcteur plus simple est la méthode du bit de parité qui est utilisée pour le tour. On place le message sur une grille, généralement une grille $n \times n$ (dans le tour une grille 5×5). On ajoute des bits sur le bord de la grille, en prenant bien soin que sur chaque ligne et chaque colonne, il y a un nombre pair de 1 (équivalent des faces cachées). On envoie alors la grille $(n + 1) \times (n + 1)$ (dans le tour une grille 6×6) qui est légèrement plus grosse, mais permet de retrouver où se situe une erreur en détectant la ligne et la colonne où il y a un nombre impair de 1. Avec ce système, le message envoyé est beaucoup moins grand qu'avec la méthode précédente. En effet, pour un message de 25 bits (comme dans le tour), la méthode d'envoi de trois messages, envoie un message de 75 bits, alors que celle des bits de parités envoie un message de 36 bits seulement. De manière générale, pour un message à $N = n^2$ bits, la méthode des trois envoie $3N$ bits alors que celle des bits de parité envoie $N + 2n + 1 = N + \sqrt{N} + 1$. Pour $N = 1\,000\,000 = 1\,000 \times 1\,000$ par exemple, on enverra 3 000 000 de bits avec la méthode des trois envois et seulement 1 002 001 avec celle du bit de parité.

Attention : Les méthodes que nous venons de décrire ne permettent que de détecter et corriger qu'une seule erreur !! Si on augmente trop la taille du message, il y a des chances qu'il y ait plusieurs erreurs. Il faut alors des méthodes qui réparent plus d'erreurs. Il en existe, comme par exemple les codes de Hamming.

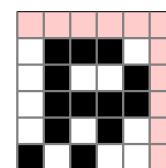
Animation de l'atelier : Une possibilité pour présenter cet atelier est de faire le tour de magie aux participants, afin de créer un intérêt, puis de leur faire comprendre (en essayant de leur faire deviner) le truc, et enfin de leur expliquer le lien avec les codes correcteurs d'erreur. Si on fait le tour plusieurs fois, il est intéressant de le faire avec des grilles de tailles différentes. Pour ensuite faire remarquer que cela marche avec n'importe quelle grille.

L'inconvénient de faire de la sorte est que cela nécessite d'être deux animateurs (ou alors d'avoir briefé un des participants au préalable).

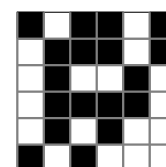
Une autre manière de présenter l'atelier, qui elle ne réclame qu'un seul animateur est la suivante. On commence par présenter la méthode du bit de parité de la manière suivante. On distribue à chaque participant deux grilles identiques comme celles ci-dessous. S'il faut distribuer des grilles identiques à un participant, il est intéressant d'en distribuer des différentes aux participants pour faire remarquer à la fin que la méthode du bit de parité marche sur toutes les grilles.



On commence par demander à chaque participant de prendre une première grille et de remplir le rectangle interne jaune en posant des carrés de deux couleurs dessus (nous prendrons blanc et noir ici) comme il le souhaite. Chaque participant obtient alors une grille comme celle ci-contre dont les cases rouges n'ont pas encore été recouvertes.



On demande ensuite à chaque participant de finir de compléter la grille en mettant des cases blanches sur les bords rouges de la manière suivante. On considère d'abord les colonnes (sauf la dernière) l'une après l'autre. S'il y a un nombre pair de carrés noirs sur la colonne, alors on met un carré blanc sur celle du haut ; sinon on y met un noir. On considère ensuite les lignes l'une après l'autre. S'il y a un nombre pair de carrés noirs sur la ligne, alors on met un carré blanc sur celle de droite ; sinon on y met un noir. Ainsi à partir de la grille précédente, on obtient celle ci-contre.



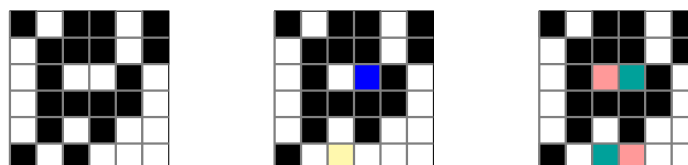
On demande alors à chaque participant de reproduire le même motif sur la seconde grille, mais d'y introduire une erreur (et une seule). On récupère la deuxième grille (avec erreur) de chaque participant. On identifie la case où il y a l'erreur (elle est à l'intersection de la ligne et la colonne qui ont un nombre impair de cases noires) et on remplace le carré qui est dessus par un de l'autre couleur pour retrouver le dessin sur la première.

Ensuite, on fait comme dans la précédente manière de présenter : on leur fait comprendre (en essayant de leur faire deviner) le truc, et puis on leur explique le lien avec les codes correcteurs d'erreur.

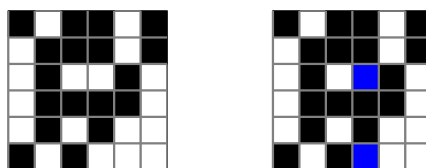
On peut terminer la séance on peut leur montrer le tour de magie à deux avec des cartes.

Détecter deux erreurs en corriger une : A la fin du tour, le mathémagicien peut demander de retourner non pas une carte, mais zéro, une ou deux. Si aucune carte n'est retournée alors chaque ligne et chaque colonne ont un nombre pair de cartes face cachée. Quand une carte a été retournée, il peut la localiser comme ci-dessus. Quand il y en a deux, alors il peut le détecter, mais il ne peut pas les localiser précisément.

Par exemple, si on part de la situation ci-dessous à gauche et qu'on retourne les deux cartes colorées au centre (la bleue était face visible et devient face cachée, la jaune était face cachée et devient face visible), alors il y a un nombre impair de cartes face cachée sur la première et quatrième ligne en partant du bas et sur les troisième et quatrième colonnes. On peut dire qu'il y a eu deux erreurs, une sur chacune des lignes et colonnes suscitées. On ne peut cependant pas savoir si la paire de cartes retournée est celle effectivement retournée, en vert à droite, ou la paire de carte en rouge à droite.



Si on part de la même situation, mais qu'on retourne deux cartes de la même colonne, par exemple deux cartes de la quatrième colonne (les deux bleues ci-dessous à droite), alors toutes les colonnes vont avoir un nombre pair de cartes face cachée, et deux lignes (ici la première et la quatrième en partant du bas) vont avoir un nombre impair de cartes face cachée. On sait donc que deux cartes ont été retournées, qu'elles étaient sur ces lignes, toutes les deux sur la même colonne sans qu'on puisse savoir laquelle.



Allons plus loin : le bit de multiplicté Le tour de magie fonctionne avec des carrés de deux couleurs (Blanc et Noir), mais on peut faire le tour de magie avec des carrés de plus de deux couleurs.

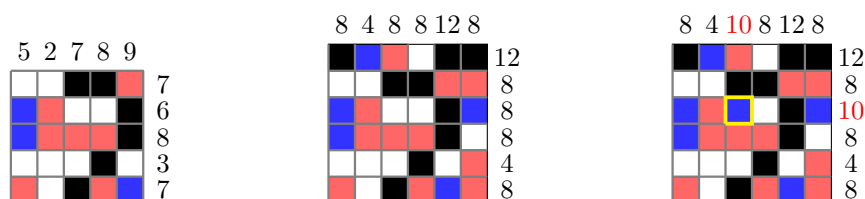
Prenons par exemple quatre couleurs, Blanc, Rouge, Bleu et Noir. On fait correspondre à chaque couleur un chiffre entre 0 et 3. Par exemple, Blanc $\hat{=}$ 0, Rouge $\hat{=}$ 1, Bleu $\hat{=}$ 2, et Noir $\hat{=}$ 3. A partir d'une grille avec des cases de ces quatre couleurs, on peut pour chaque ligne et chaque colonne faire la somme des valeurs sur cette colonne. Par exemple sur la ligne du bas de la grille ci-dessous à gauche, la somme pour chaque ligne est donnée à droite de celle-ci, et celle pour chaque colonne est donnée au dessus de celle-ci. En particulier, pour la ligne du bas, la suite des couleurs des cases est Rouge, Blanc, Noir, Rouge, Bleu. La somme sur cette ligne est donc $1 + 0 + 3 + 1 + 2 = 7$.

Ensuite, on ajoute des cases au-dessus et à droite de la grille. On ajoute d'abord une case sur chaque colonne de manière à ce que le total sur chaque colonne soit un multiple de 4.

- Si (avant l'ajout) la somme sur la colonne est un multiple de 4 plus 1, il faut ajouter une case noire qui vaut 3. C'est le cas de la première colonne sur l'exemple ci-dessous.
- Si (avant l'ajout) la somme sur la colonne est un multiple de 4 plus 2, il faut ajouter une case bleue qui vaut 2. C'est le cas de la deuxième colonne sur l'exemple ci-dessous.
- Si (avant l'ajout) la somme sur la colonne est un multiple de 4 plus 3, il faut ajouter une case rouge qui vaut 1. C'est le cas de la troisième colonne sur l'exemple ci-dessous.
- Si (avant l'ajout) la somme sur la colonne est un multiple de 4, il faut ajouter une case blanche qui vaut 0. C'est le cas de la quatrième colonne sur l'exemple ci-dessous.

On fait ensuite de même sur les lignes, y compris la nouvelle ligne créée. On obtient alors une grille telle que sur chaque ligne et sur chaque colonne, la somme des valeur est un multiple de 4. C'est la grille au centre dans notre exemple ci-dessous.

Cette grille permet de détecter et corriger une erreur. En effet, si une case change de couleur, alors sa ligne et sa colonne seront les seules dont la somme n'est pas un multiple de 4. On peut donc identifier cette case. On peut également facilement voir quelle couleur mettre à la place pour que ces sommes redeviennent des multiples de 4 et ainsi corriger l'erreur. Dans notre exemple ci-dessous, si on modifie la case entourée de jaune de Blanc à Bleu. Alors la somme des valeurs sur sa ligne et sa colonne passe de 8 à 10 qui est un multiple de 4 plus 2. Les autres valeurs de lignes et colonnes restent inchangées, donc des multiples de 4. Voir ci-dessous à droite. Sa colonne et sa ligne étant identifiées, la case où se trouve l'erreur l'est. Cette case est de couleur Bleu qui vaut 2 et les sommes sur la ligne et sa colonne sont des multiples de 4 plus 2. On voit alors qu'en changeant la couleur en Blanc qui vaut 0, les deux sommes diminueraient de 2 et deviendraient des multiples de 4. Blanc était donc la couleur originale. Il suffit de la remettre sur cette case pour corriger l'erreur.



De la même manière, si on a n symboles différents, en attribuant des valeurs de 0 à $n - 1$ à ces symboles et en ajoutant les cases sur le bord de façon à ce que, sur chaque ligne et sur chaque colonne, la somme des valeurs soit un multiple de n , on peut détecter et corriger une erreur.

Les codes d'erreur ont principalement été développés pour le binaire car les ordinateurs électroniques utilisent le binaire qui n'utilise que deux symboles (0 et 1). Les méthodes peuvent souvent se généraliser ou être adaptées pour des représentations avec plus de symboles. Actuellement, les codes d'erreur à 4 symboles sont étudiés pour le stockage sur ADN qui utilise quatre symboles, correspondant aux quatre nucléotides (adénine, cytosine, guanine et thymine) de l'ADN.