Fiche pédagogique

Activité : 2-coloration grandeur nature.

Objectifs pédagogiques : Se familiariser avec la notion de graphe. Expérimenter et concevoir des algorithmes. assimiler que la validité d'un algorithme peut être démontrée. Comprendre la notion de preuve, de condition nécessaire et suffisante.

Notions abordées : Graphes, coloration, équivalence des couleurs, algorithme, preuve de validité, pair/impair.

Matériel nécessaire : Cerceaux et lattes.

Niveau : A partir du cycle 3.

Durée : 30 minutes à 1 heure.

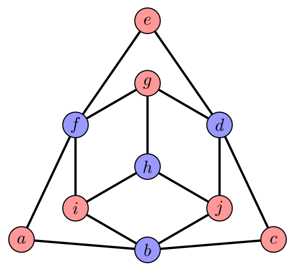
Déroulement : Sur le sol est représenté un graphe. Les sommets du graphe sont les cerceaux et les arêtes du graphe sont dessinées avec les lattes.

On commence par décrire au public que ce qu'il a devant lui est un graphe. On insiste sur le fait que le tracé d'une arête n'a pas d'importance et que la seule chose importante est les deux sommets qu'elle relie. On peut aussi donner des exemples de ce que peut modéliser un graphe : réseau routier, réseaux physiques (ordinateurs, serveurs, ...), réseaux virtuels (graphe d'amitié, ...), molécules, ... On peut aussi demander au public ce qu'il imagine pouvoir modéliser avec.

On lui explique ensuite le jeu de 2-coloration. Par exemple, en disant que le graphe est un graphe d'incompatibilité. Chaque sommet représente une personne et deux sommets sont reliés par une arête si les personnes sont incompatibles. Le but sera de répartir les sommets en deux équipes de personnes compatibles.

Pour cela, on place une personne sur chaque cerceau. Une partie des personnes devra s'accroupir et l'autre devra rester debout de manière à ce que deux personnes qui sont sur des cerceaux reliés par une arête ne soient pas dans la même position.

On peut commencer par leur faire faire sur graphe pour lequel il y a une solution (mais l'inverse est possible également). Par exemple, celui à droite.



Quand une solution est trouvée, on va voir une personne accroupie et on demande une solution mais avec cette personne debout.

On laissent les participants trouver une nouvelle solution qui est forcément l'inverse de la précédente. Chaque personne a changé de position.

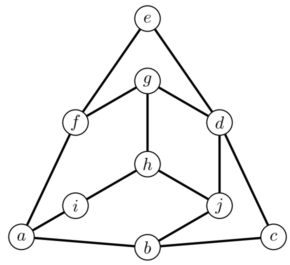
On peut alors interroger l'audience sur ce fait, et les amener à voir qu'il y a une solution unique à permutation des couleurs (inversion des positions) près.

On peut aussi les faire réfléchir à un algorithme pour trouver la coloration. Celui-ci se trouve assez naturellement. Il consiste en deux étapes.

Algorithme de 2-coloration

1. Prendre une personne/sommet référente qui choisit sa position.
2. Quand une personne/sommet sans position est reliée à une personne ayant une position, elle prend la position inverse.

On peut ensuite faire l'activité sur un graphe pour lequel il n'y a pas de solution, comme le graphe dessiné à droite (qui a l'avantage de pouvoir être obtenu à partir du précédent en retirant les arêtes f-i et i-h et en ajoutant a-i). Le problème est impossible sur ce graphe car il y a des cycles impairs comme a-b-j-h-i-a. Le but est que les participants s'aperçoivent que ce n'est pas possible et trouvent pourquoi. En général, c'est le cas, car ils passent leur temps à faire le piston (changer de position) autour des cycles impairs.



Il est important d'insister sur le fait que si quelque chose est impossible il faut apporter la preuve que ca l'est et pas seulement dire que c'est impossible car on n'a pas réussi (même si le "on" désigne l'ensemble de tous les plus grands savants depuis le début de l'humanité).

Le fait que ca ne soit possible avec un cycle impair peut se montrer assez facilement. Pour un cycle de longueur impaire donnée, disons 5, les élèves peuvent trouver l'argument. En effet, suivons par exemple le cycle a-b-j-h-i-a. Si a est en position debout, alors b doit être accroupi, donc j doit être debout, puis h doit être accroupi, puis i debout. Mais alors on a une incompatibilité entre i et a qui sont voisins et tous les deux debout. De manière plus générale, si on a un cycle impair 1-2-$\cdots$-n-1 avec n impair. Si v_1 est debout alors tous sommets de numéro pair doivent être accroupi et les sommets de numéro impair doivent être debout. En particulier, comme n est impair, il est debout. Et comme il est voisin de 1 qui est aussi debout, c'est une incompatibilité. On en peut donc pas colorer un graphe avec deux couleurs s'il y a un cycle impair.

On a ainsi une **condition nécessaire** (ne pas avoir de cycle impair) pour qu'un graphe puisse être coloré avec deux couleurs. On leur pose alors la question de savoir si cette condition nécessaire est aussi une **condition suffisante**, autrement dit, s'il suffit qu'un graphe n'ait pas de cycle impair pour qu'il puisse être coloré avec deux couleurs. Il se trouve que c'est vrai. On peut laisser le public essayer sur des graphes qu'il construit lui même. (A noter qu'il n'est pas forcément facile de construire un graphe sans cycle impair.)

Il est possible de démontrer que ne pas avoir de cycle impair est suffisant pour être colorable avec deux couleurs, en utilisant l'algorithme décrit ci-dessus. En fait, on va montrer que si l'algorithme ci-dessus rencontre un problème, alors le graphe avait un cycle impair. Ce qui va montrer que pour les graphes sans cycle impair l'algorithme rend une coloration avec deux couleurs. Prenons donc un graphe avec un cycle impair (celui dessiné ci-dessus par exemple), et appliquons l'algorithme. A l'étape 1, une personne/sommet référente choisit sa position disons debout. Ensuite, à chaque fois qu'une personne prend une position à cause d'un de ses voisins (qui est dans une position inverse à celle qu'elle prend), elle tend le bras vers ce voisin.

Supposons qu'à la fin de l'algorithme, il y ait un problème car deux personnes voisines sont dans la même position. Par exemple, dans le graphe ci-dessus b est référrent et se met accroupi. Ensuite a se met debout et pointe vers b, puis i et f vont se mettre accroupis et pointer vers a, et ensuite g va se mettre debout en pointant vers f et h va se mettre debout en pointant vers i. On a alors un problème car g et h sont voisins et dans la même position. On peut partir de ces deux sommets voisins dans la même position on peut suivre les chemins vers le référents indiqués par les directions vers lesquelles pointent chaque sommet. Ainsi g pointe vers f qui pointe vers a qui pointe vers b. De même, h pointe vers i qui pointe vers a qui pointe vers b. En prenant le premier chemin (ici g-f-a-b) à l'endroit, puis le second (ici h-i-a-b) jusqu'à leur permier point commun (ici a), on obtient un chemin (ici g-f-a-i-h) entre les deux voisins dans la même position qui est nécessairement de longueur paire car les deux sommets son dans le même position et celles-ci alternent le long du chemin. Ainsi avec l'arête entre les deux voisins, nous obtenons un cycle impair (ici g-f-a-i-h-g).

Nous venons de montrer que si la coloration rendue par l'algorithme n'est pas valide, alors le graphe avait un cycle impair. Comme déjà énoncé, cela implique que si le graphe n'a pas de cycle impair, alors la coloration rendue est valide.

Complément 1 : Une activité préliminaire à celle-ci peut être de demander aux élèves de représenter les graphes au sol avec les cerceaux et les lattes à partir d'un dessin.

Complément 2 : Plutôt que d'utiliser les deux positions (accroupi/debout), on peut distribuer aux participants deux chapeaux de couleurs différentes et leur demander d'en mettre un sur leur tête. C'est notamment pratique si on veut faire cette activité couplée à l'activité *Coloration gloutonne grandeur nature.*

Complément 3 : Cette activité peut également être couplée avec l'activité *Magie du biparti (la traque)* qui nécessite de partir d'avoir un graphe coloré avec deux couleurs pour faire le tour.