

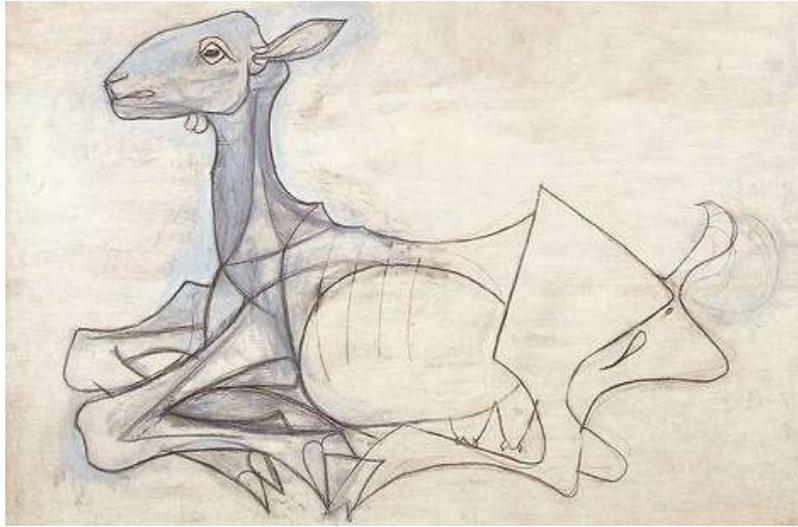
L'élégance en Mathématiques



Institut
Esope 21



TERRA
NUMERICA



La chèvre, P. Picasso, 1946.



L'homme qui marche,
A. Giacometti, 1960

Le Poète est semblable au prince des nuées
Qui hante la tempête et se rit de l'archer ;
Exilé sur le sol au milieu des huées,
Ses ailes de géant l'empêchent de marcher.

Der ritt der Walküren

IV. Sisk. (Reed)
III. Sax. (Dall)
II. Clar. (Daps. 8 & 16 ft.)
I. Clar. (Full) - III
Pd. (Full with Reed, without 32 ft.)

R. Wagner
Transcribed by Edwin H. Lemare

Leibhaft. $\text{♩} = 100$

Manual

Pedal

Copyright this edition © 2001 by Bardon Bismarck

La chevauchée des Walkyries,
R. Wagner, 1856.

L'albatros, C. Baudelaire, 1861

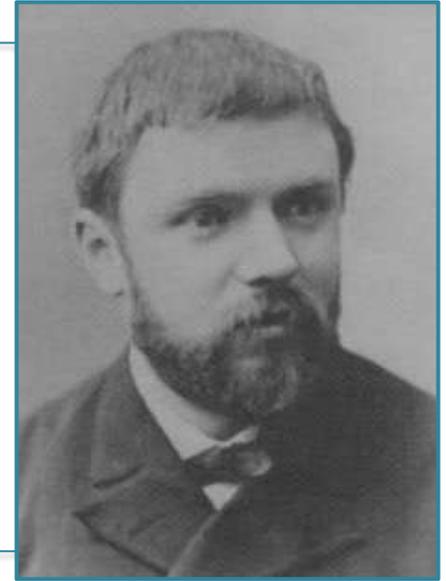
L'AVIS DES MATHÉMATICIENS

« On peut s'étonner de voir invoquer la sensibilité à propos de démonstrations mathématiques. [...]

Ce serait oublier le **sentiment de la beauté mathématique**, de l'harmonie des nombres et des formes, de l'élégance géométrique. C'est un **véritable sentiment esthétique que tous les vrais mathématiciens connaissent.** »

Science et Méthode 1908.

H. Poincaré (1854-1912)



« **Les compositions du mathématicien**, comme celles du peintre ou du poète, **doivent être magnifiques** ; les idées, comme les couleurs, doivent s'agencer de manière harmonieuse. La beauté est le premier test : **il n'y a pas de place permanente en ce monde pour les mathématiques laides.** »

G. Hardy (1877-1947)

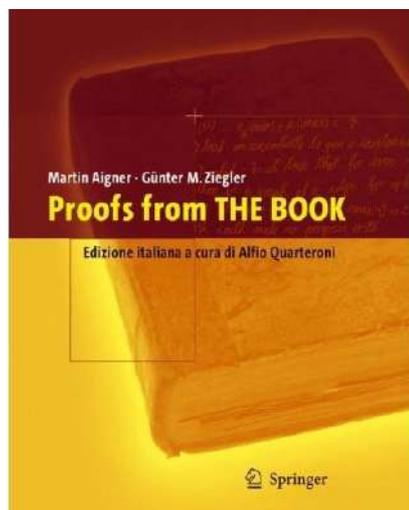
LE LIVRE

« Il y a **Le Livre** où Dieu conserve les preuves parfaites.

[...]

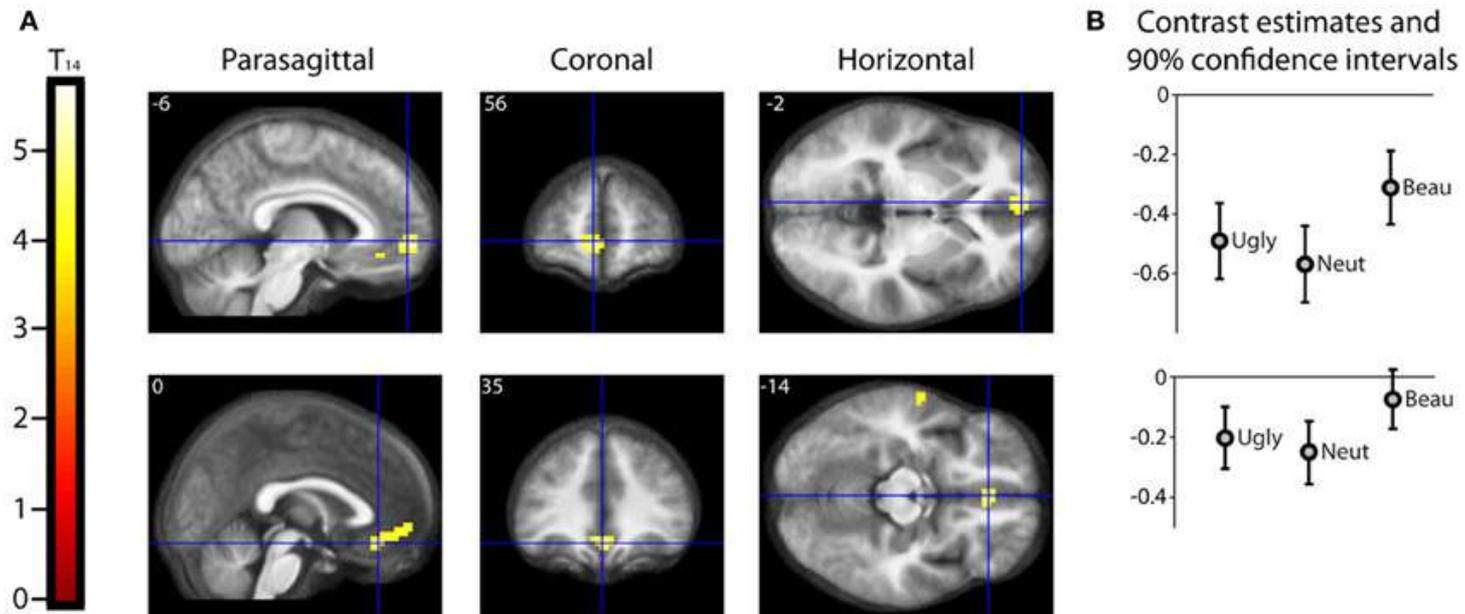
Il n'est pas nécessaire de croire en Dieu, mais en tant que mathématicien, **vous devez croire en Le Livre.** »

P. Erdős (1913-1996)



ACTIVITÉ CEREBRALE

Activation des **mêmes régions cérébrales** que la beauté soit artistique ou mathématique.

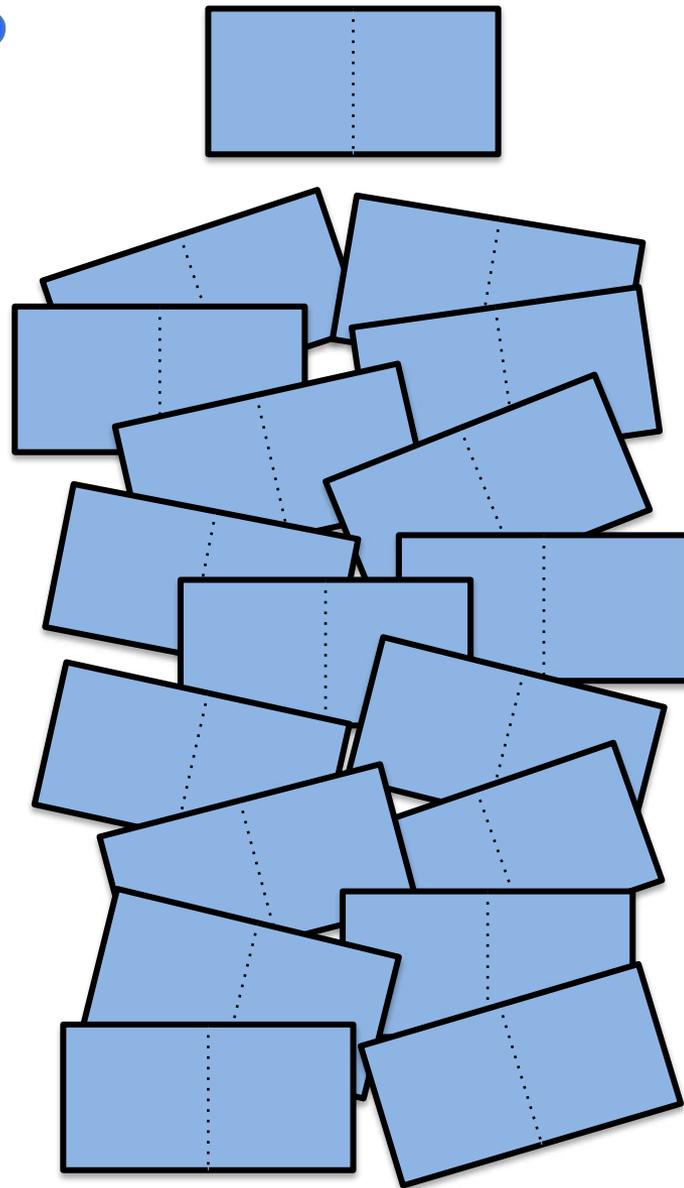
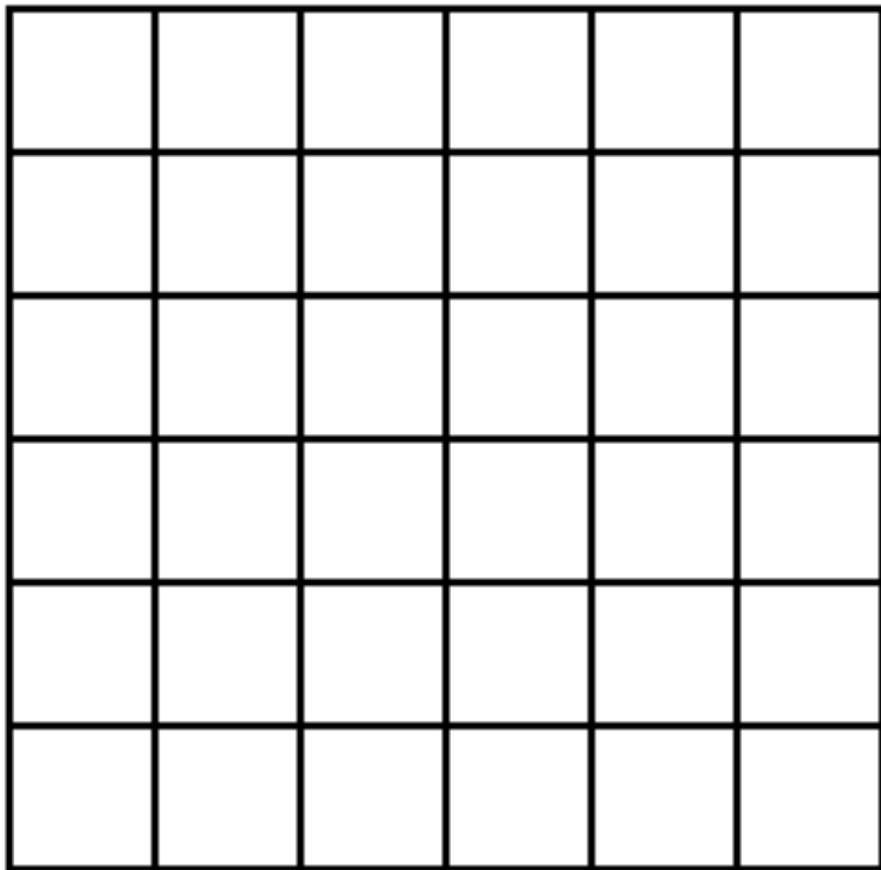


S. Zeki, P. Romaya, D. M. T. Benincasa, M. F. Altiyah

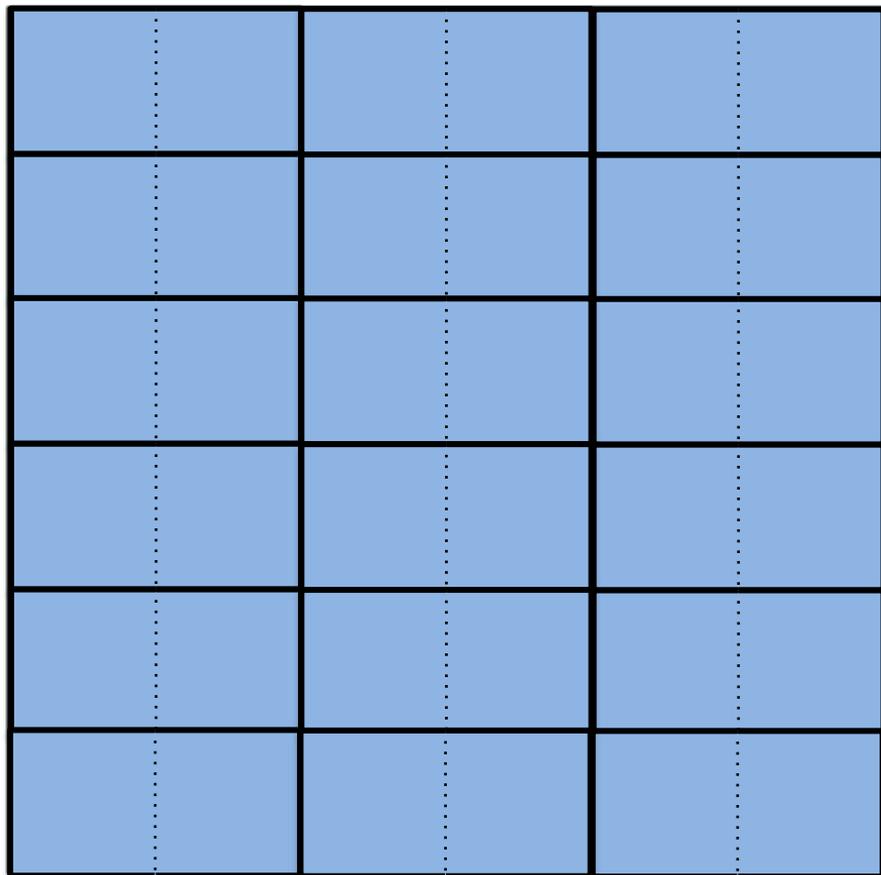
The experience of mathematical beauty and its neural correlates

Front. Hum. Neurosci., 13 February 2014

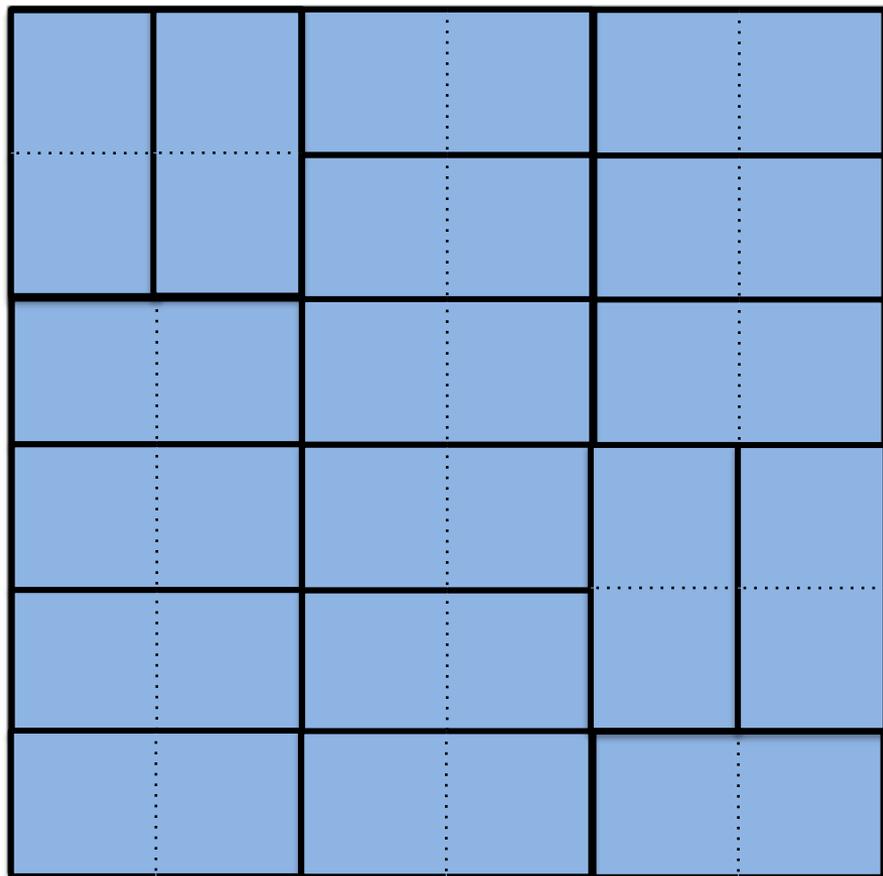
PAVAGE AVEC DES DOMINOS



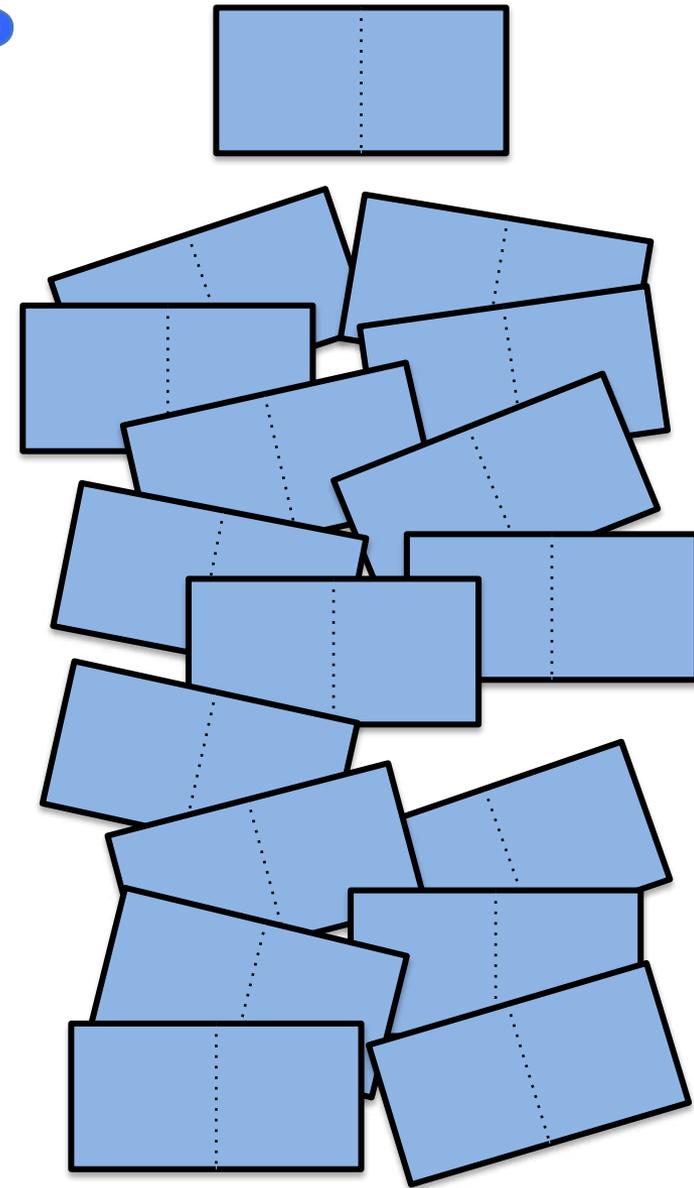
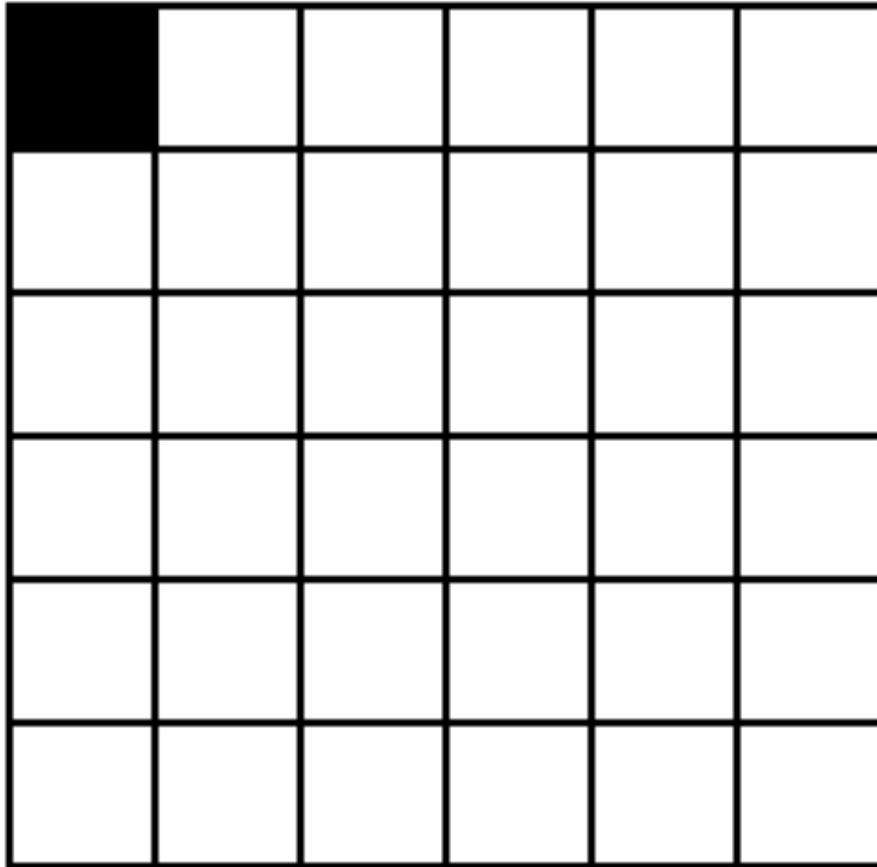
PAVAGE AVEC DES DOMINOS



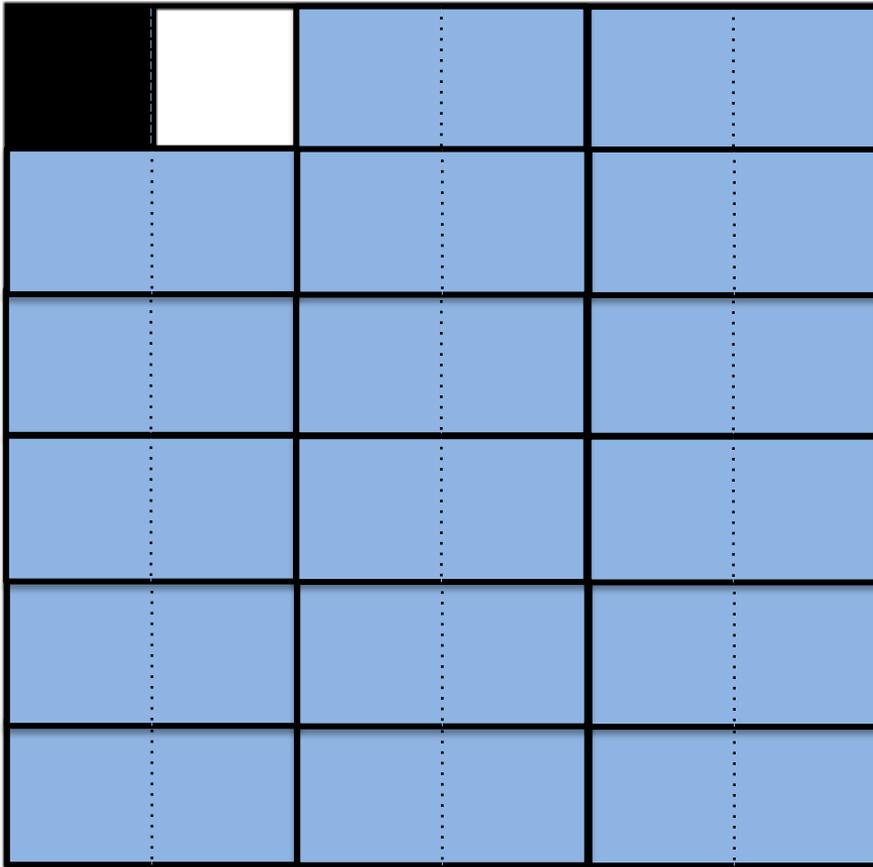
PAVAGE AVEC DES DOMINOS



PAVAGE AVEC DES DOMINOS

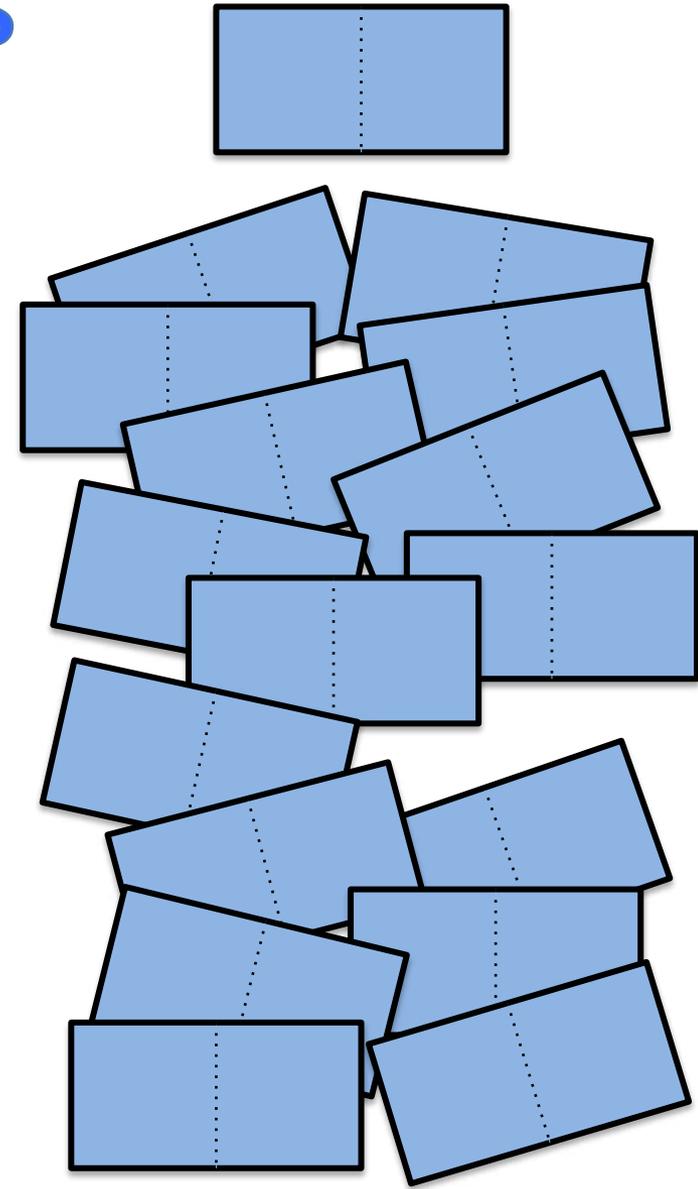
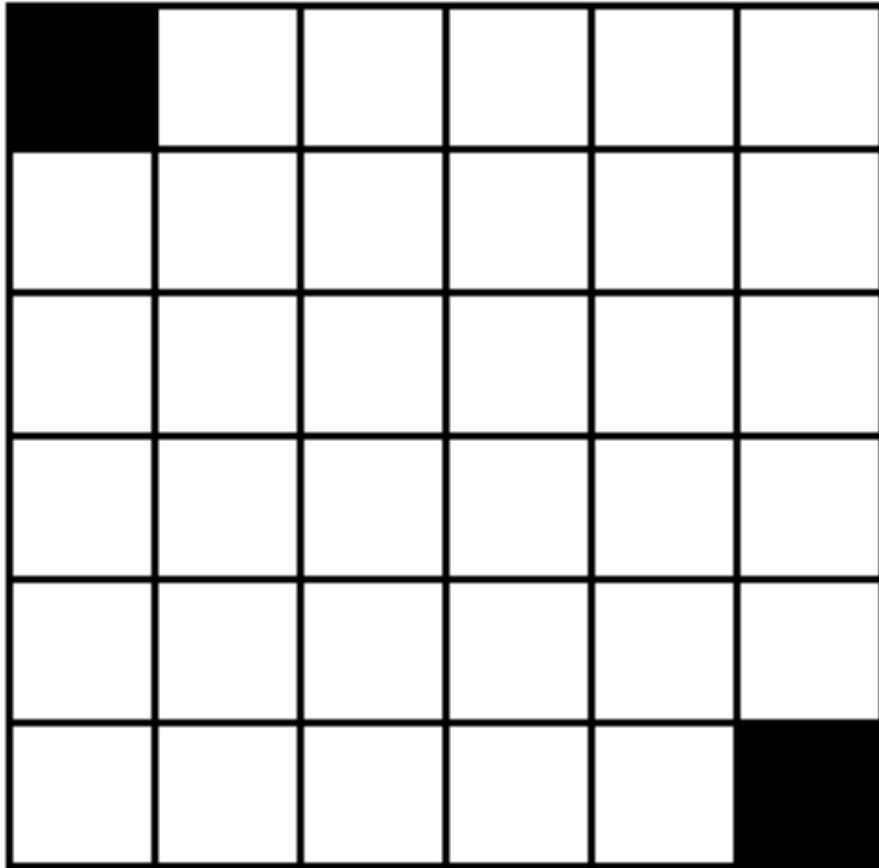


PAVAGE AVEC DES DOMINOS

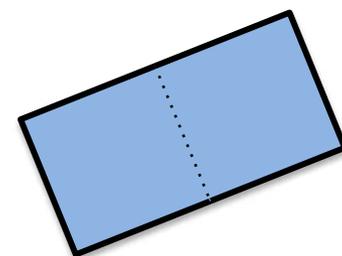
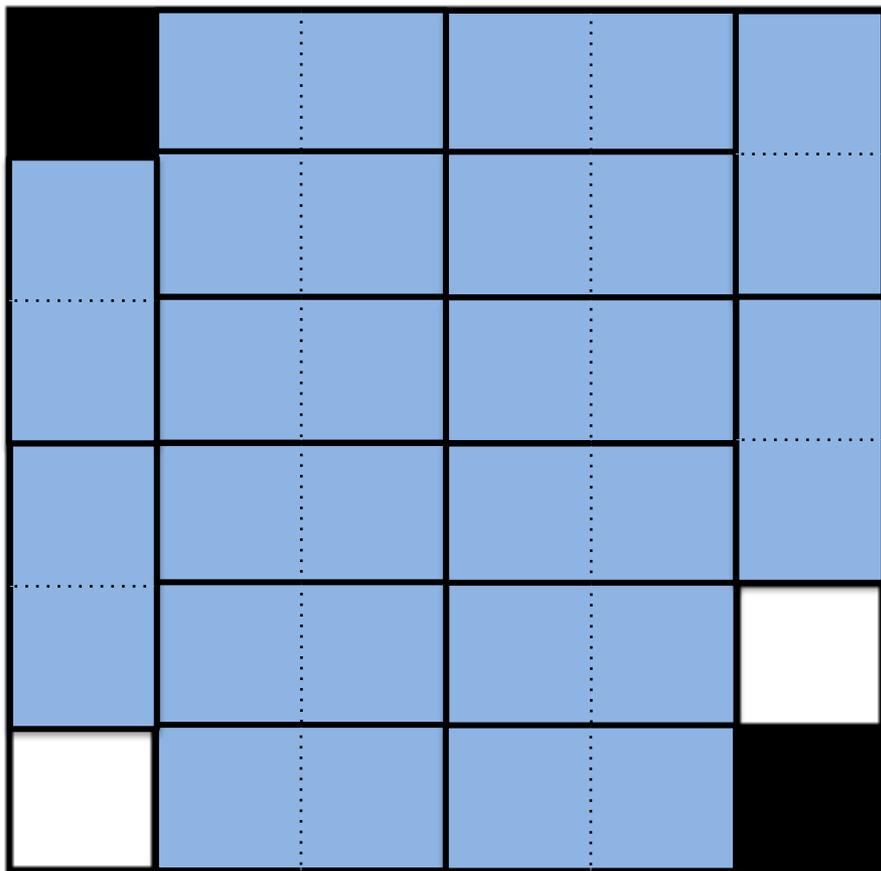


IMPOSSIBLE : nombre impair de cases.

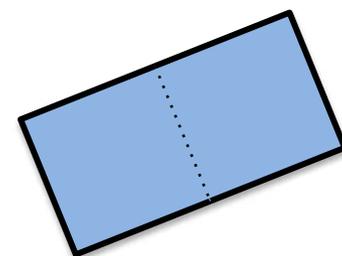
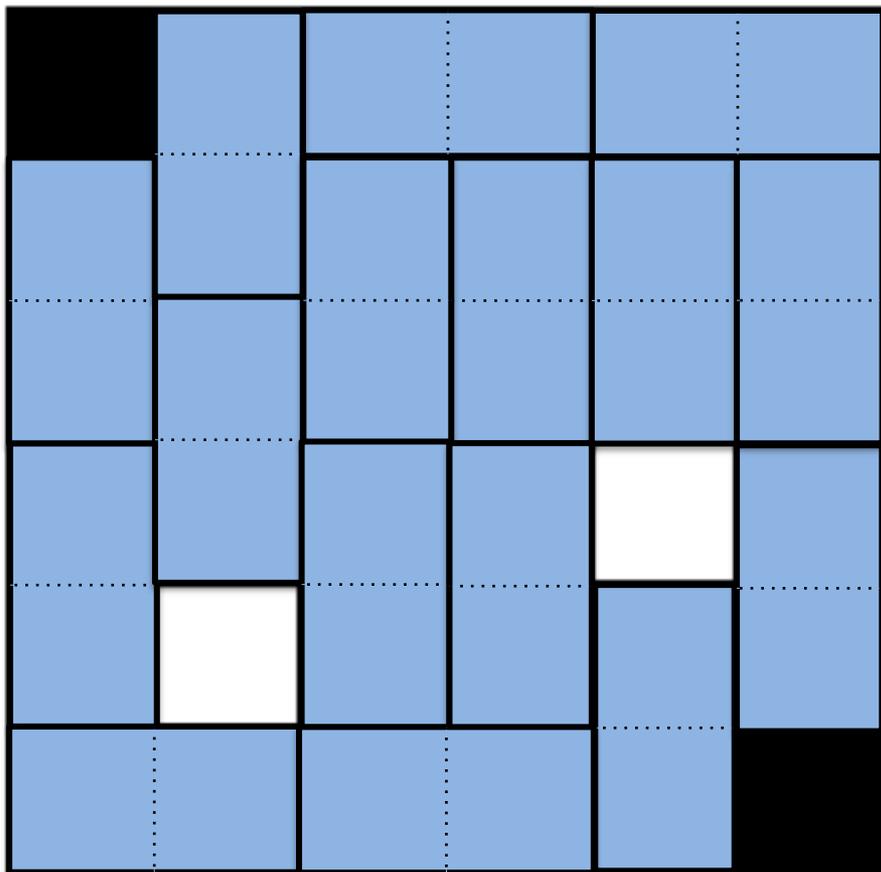
PAVAGE AVEC DES DOMINOS



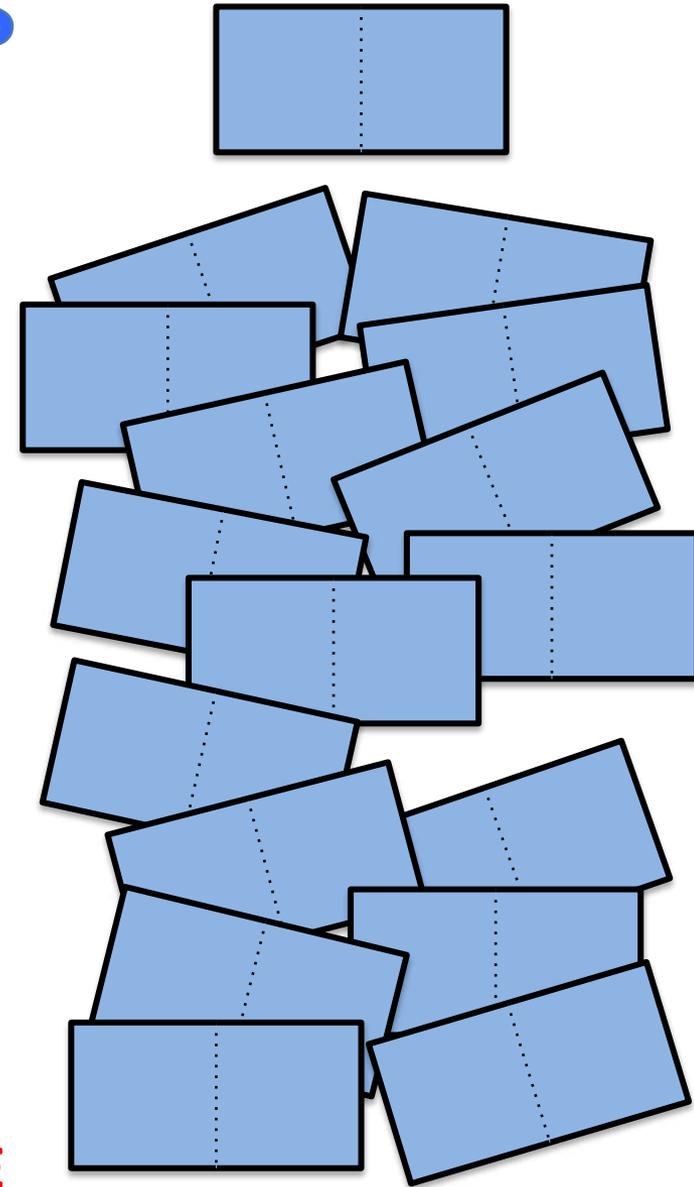
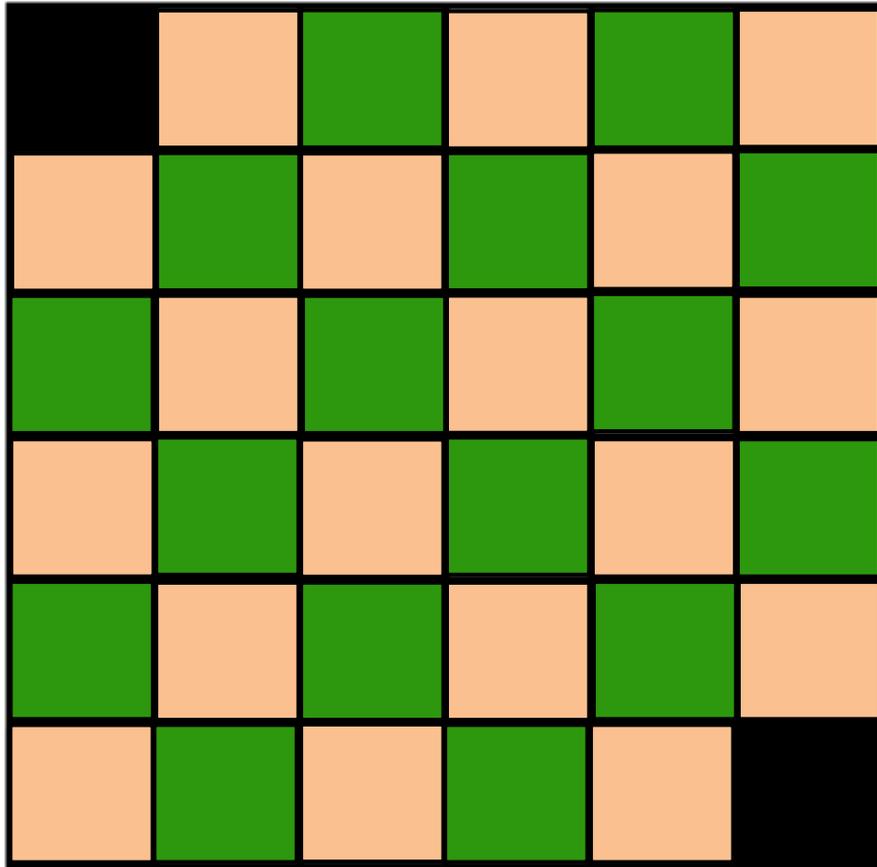
PAVAGE AVEC DES DOMINOS



PAVAGE AVEC DES DOMINOS



PAVAGE AVEC DES DOMINOS



18 cases oranges, 16 vertes : **IMPOSSIBLE**

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$
$$100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1$$

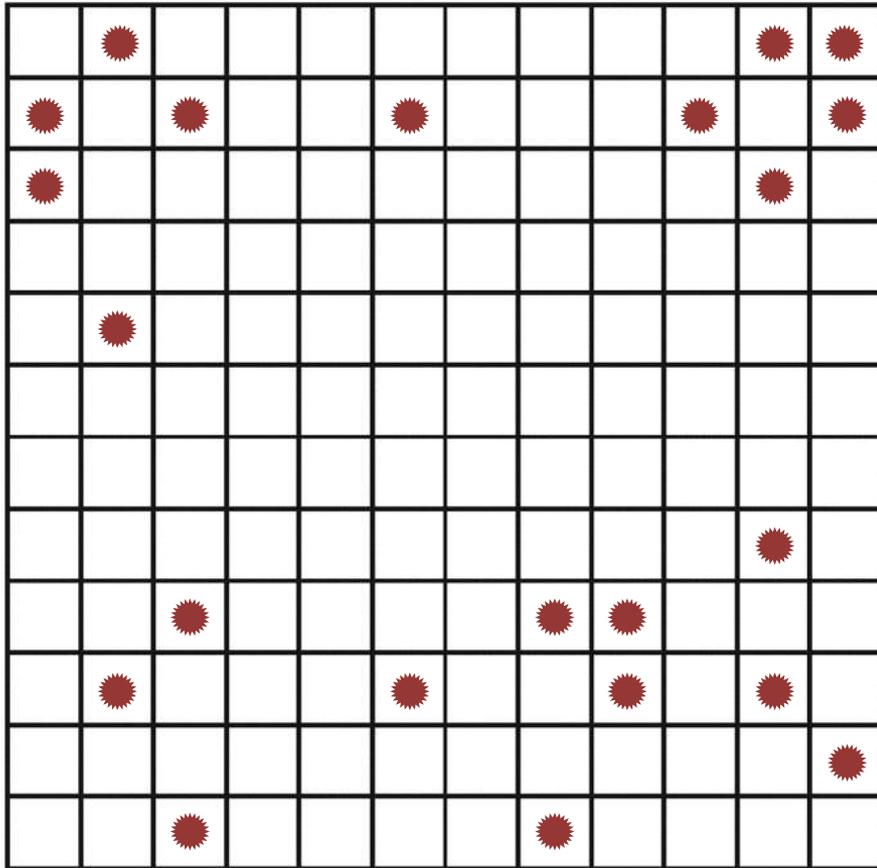
$$101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 + 101$$

$$101 \times 100 = 10100$$

$$10100 \div 2 = \mathbf{5050}$$



CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

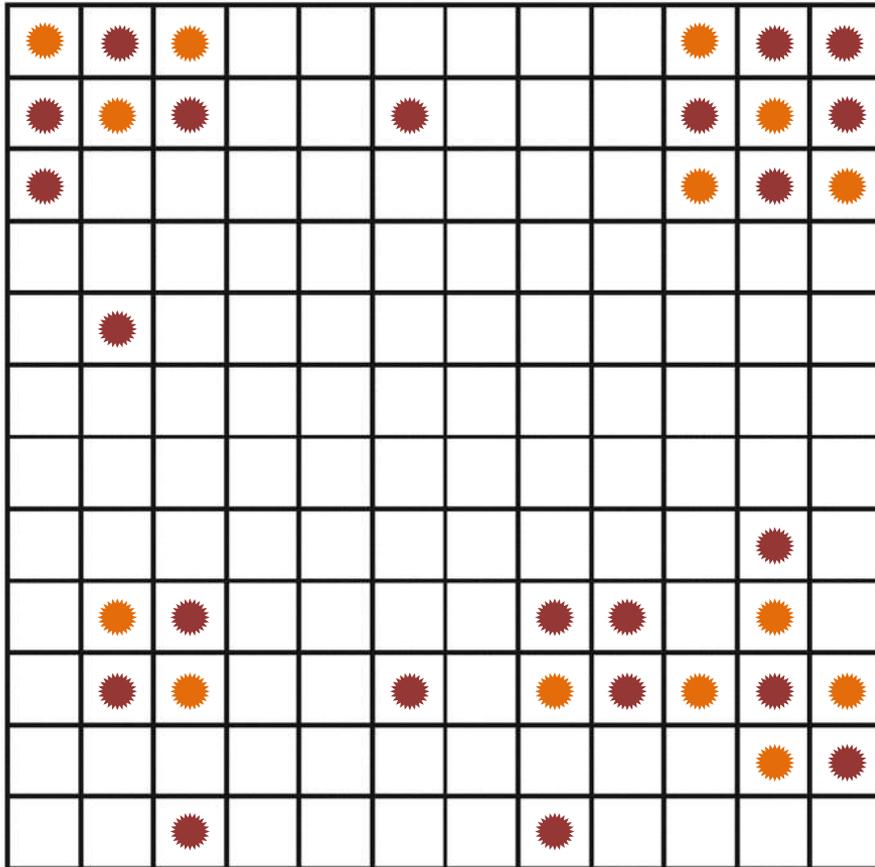


Grille 12 par 12.

 case infectée

Si une case touche deux cases infectées, elle est contaminée et devient infectée à son tour.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

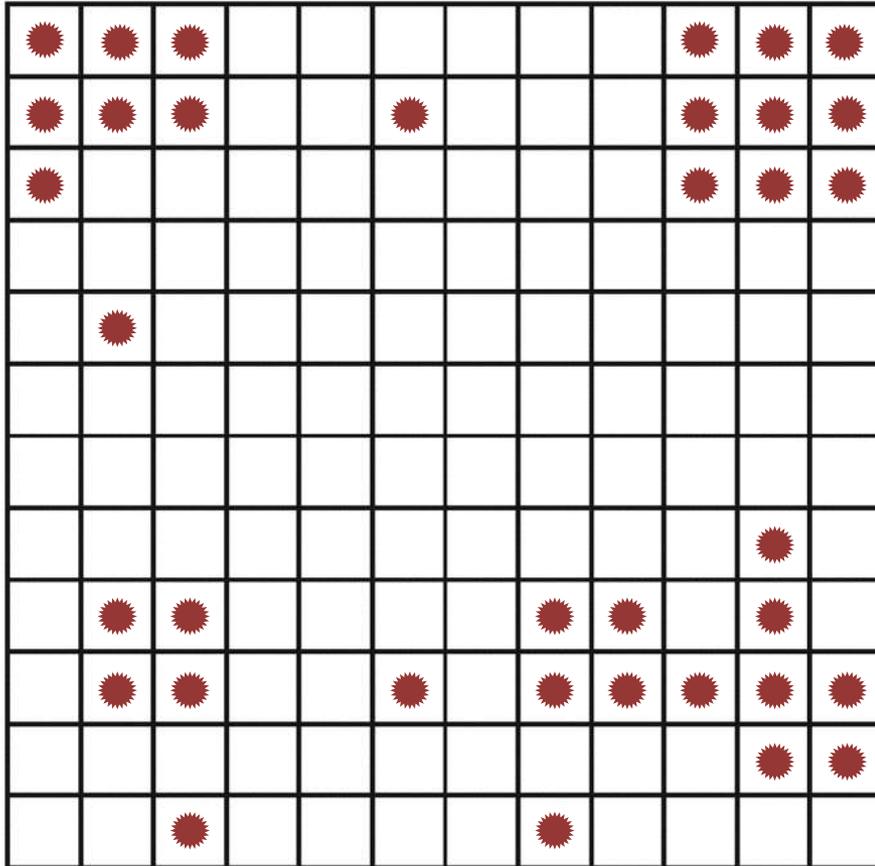


Grille 12 par 12.

 case infectée

Si une case touche deux cases infectées, elle est contaminée et devient infectée à son tour.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

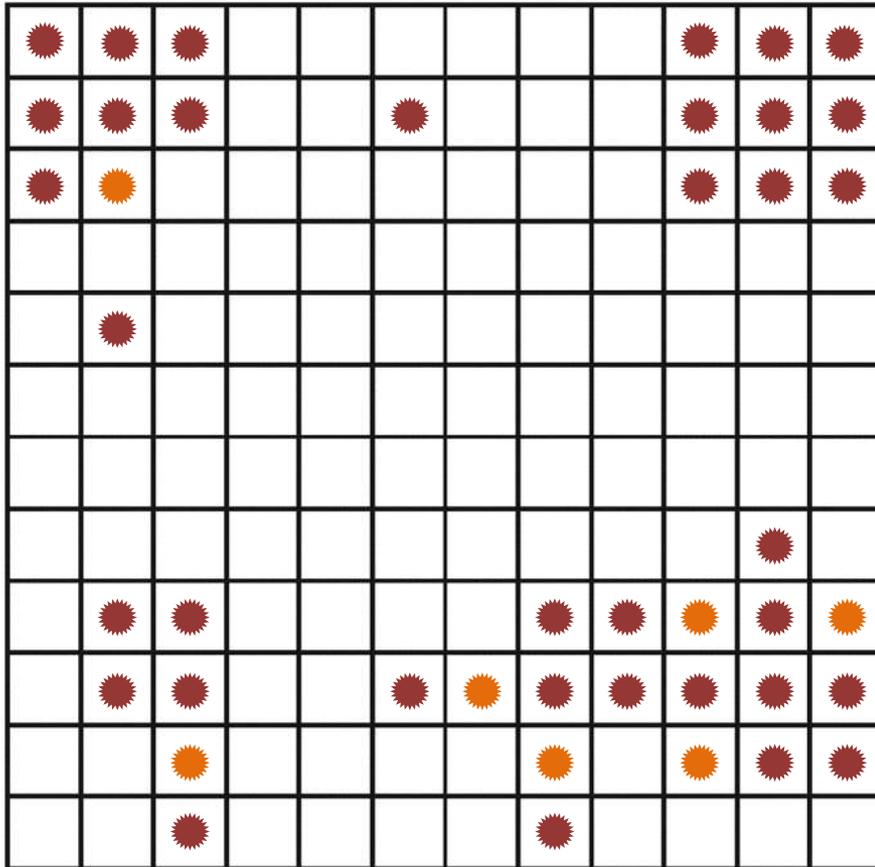


Grille 12 par 12.

 case infectée

Si une case touche deux cases infectées, elle est contaminée et devient infectée à son tour.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

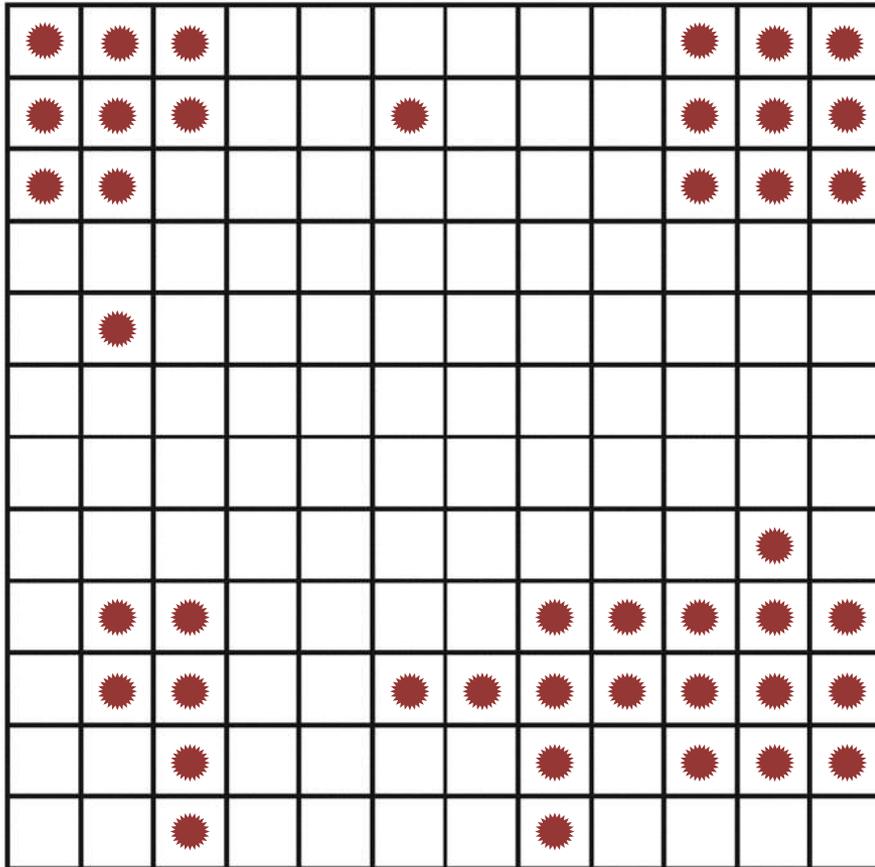


Grille 12 par 12.

 case infectée

Si une case touche deux cases infectées, elle est contaminée et devient infectée à son tour.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

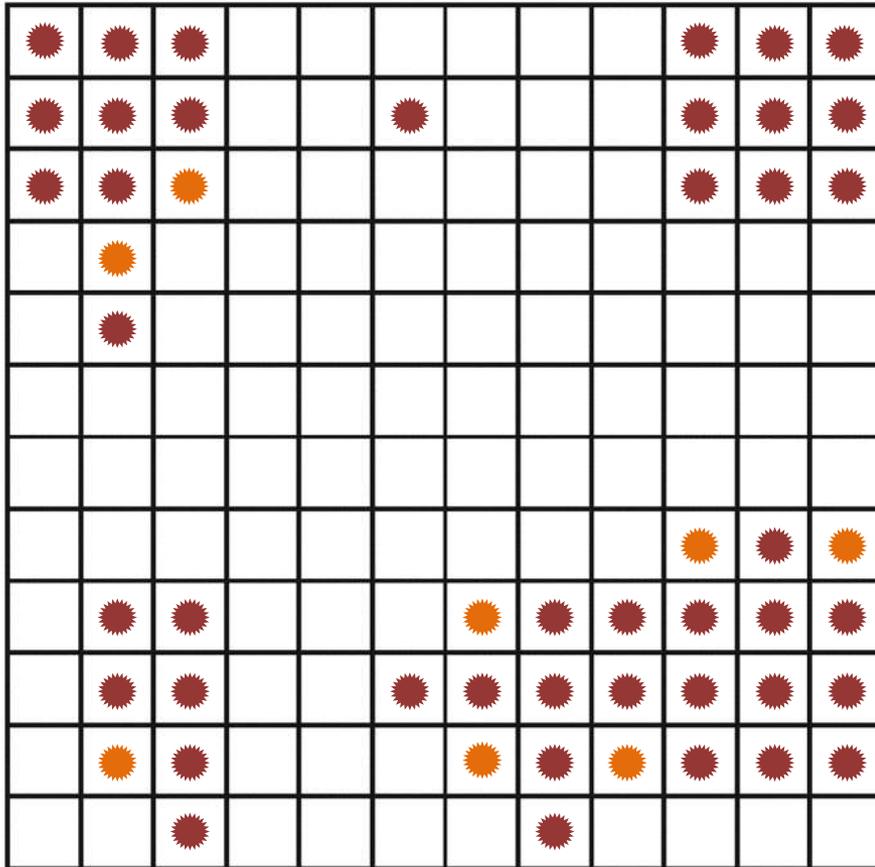


Grille 12 par 12.

 case infectée

Si une case touche deux cases infectées, elle est contaminée et devient infectée à son tour.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

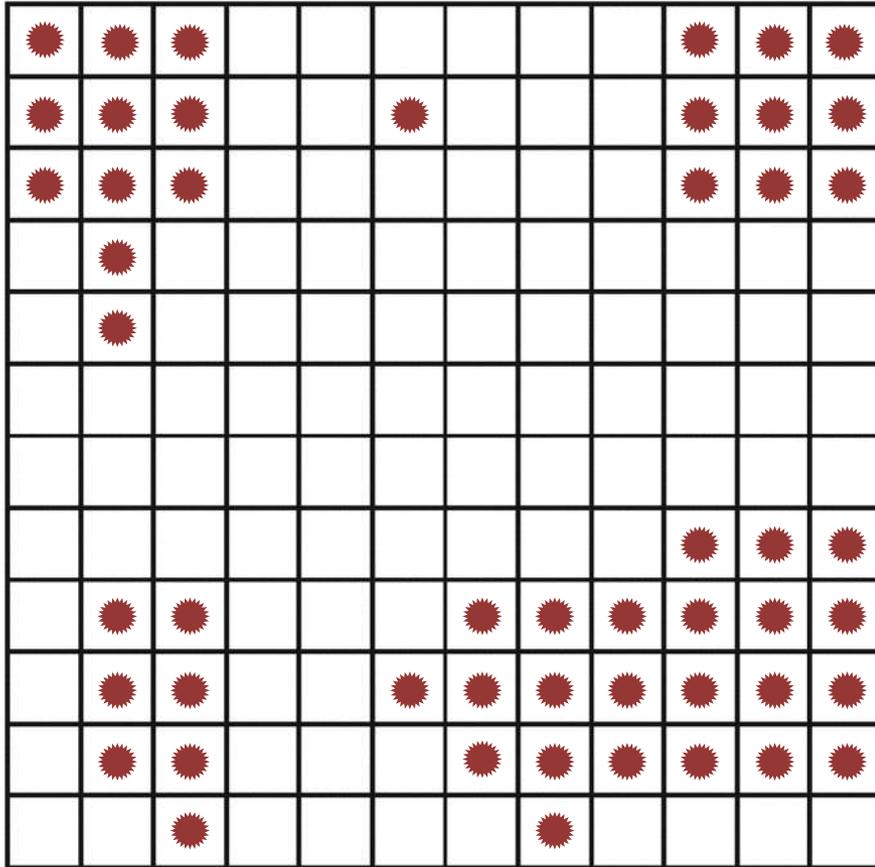


Grille 12 par 12.

 case infectée

Si une case touche deux cases infectées, elle est contaminée et devient infectée à son tour.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

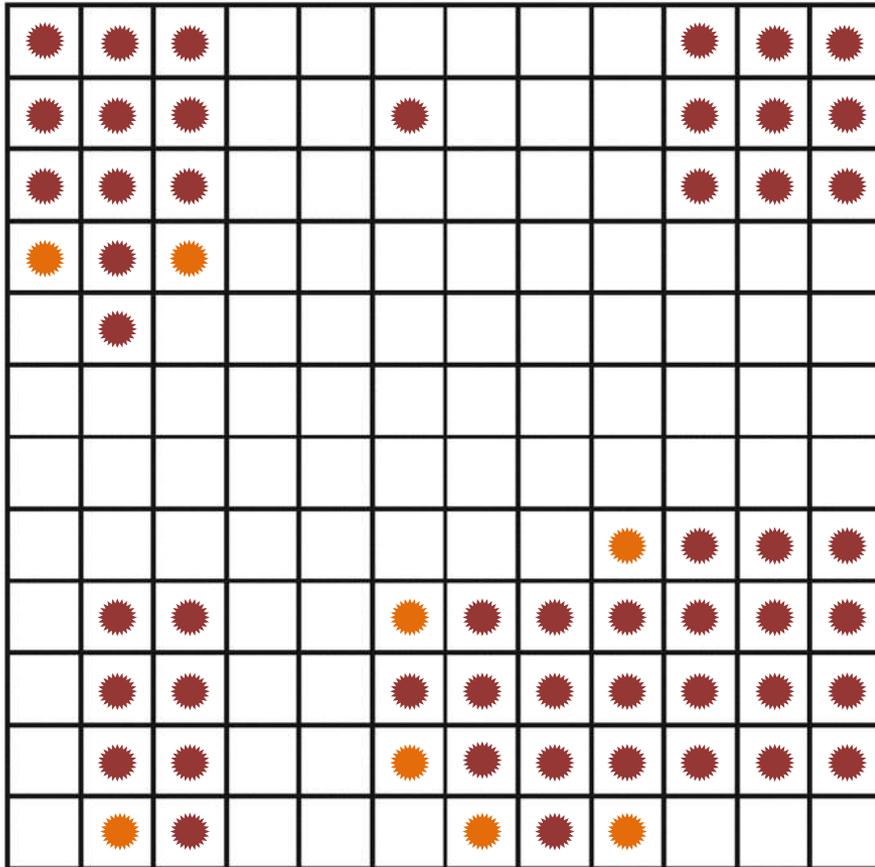


Grille 12 par 12.

 case infectée

Si une case touche deux cases infectées, elle est contaminée et devient infectée à son tour.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

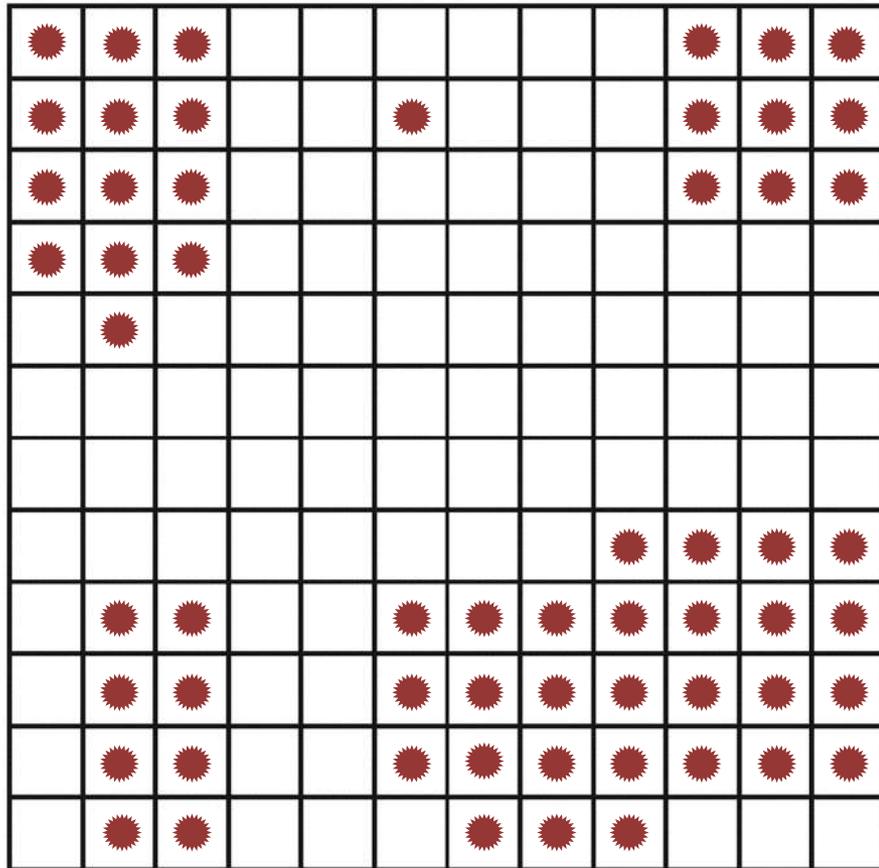


Grille 12 par 12.

 case infectée

Si une case touche deux cases infectées, elle est contaminée et devient infectée à son tour.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

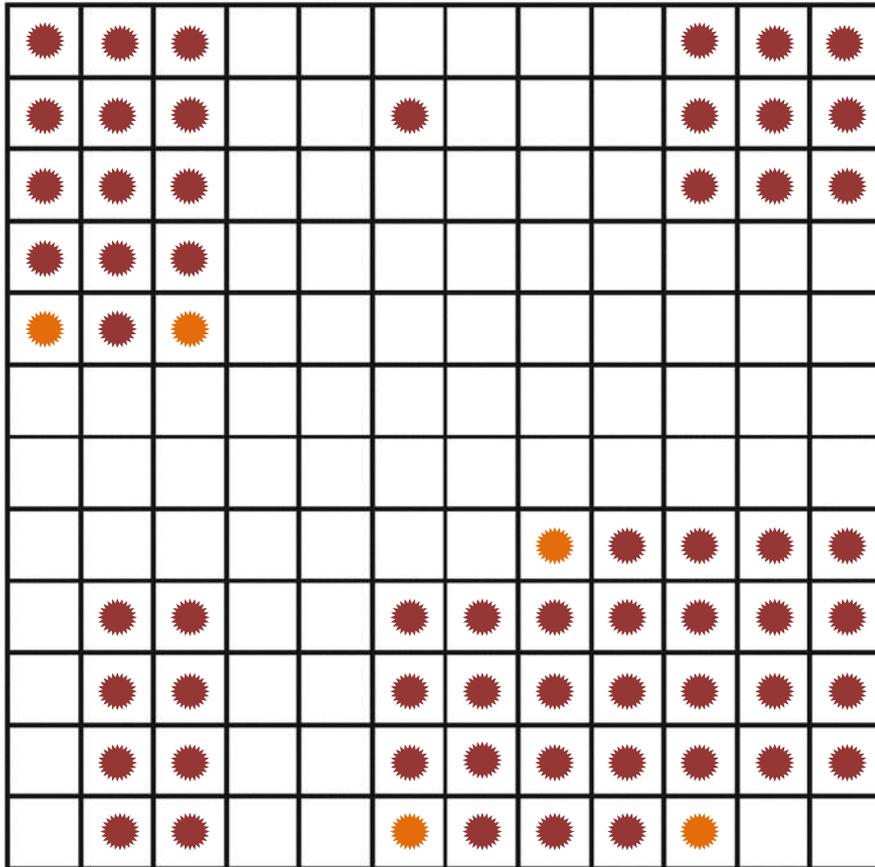


Grille 12 par 12.

 case infectée

Si une case touche deux cases infectées, elle est contaminée et devient infectée à son tour.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

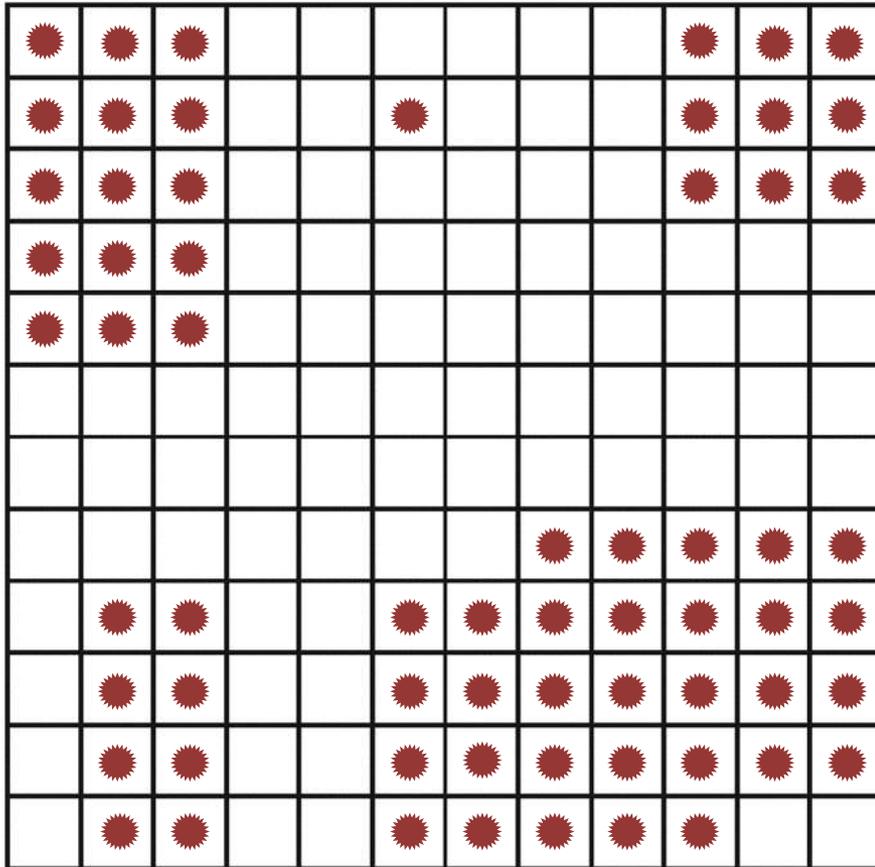


Grille 12 par 12.

 case infectée

Si une case touche deux cases infectées, elle est contaminée et devient infectée à son tour.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

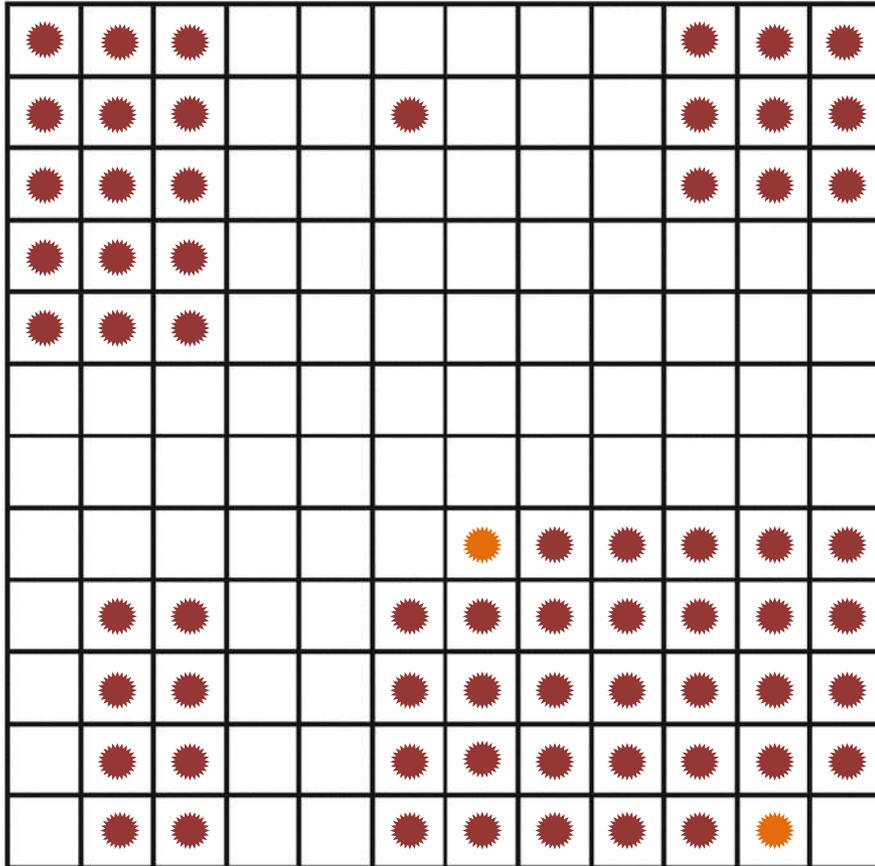


Grille 12 par 12.

 case infectée

Si une case touche deux cases infectées, elle est contaminée et devient infectée à son tour.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

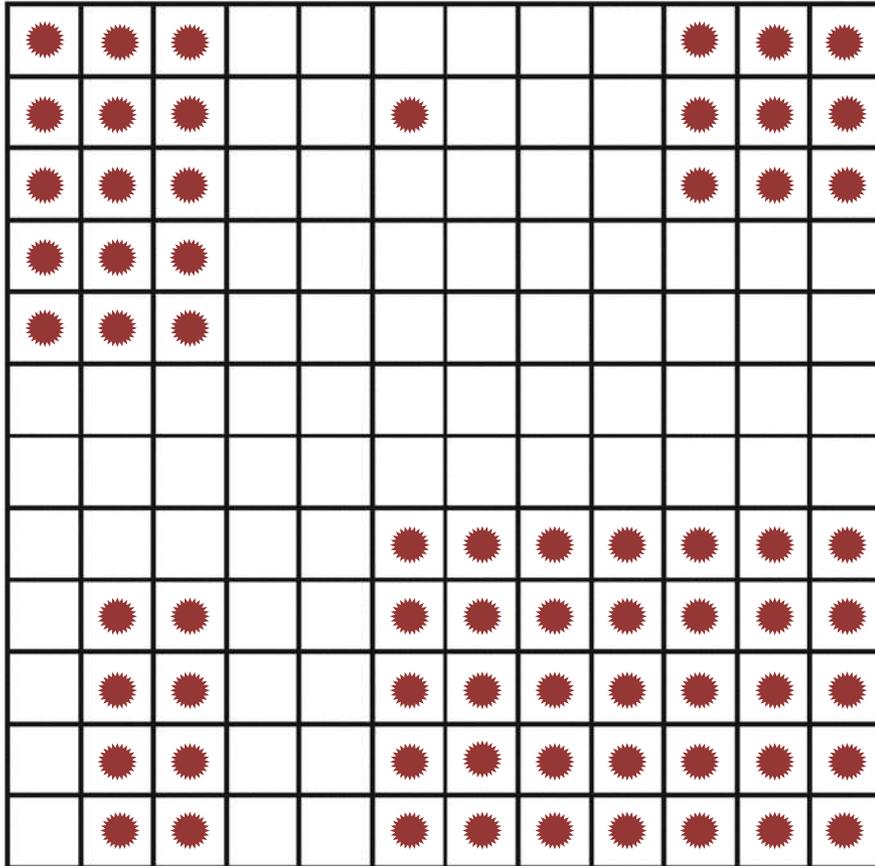


Grille 12 par 12.

 case infectée

Si une case touche deux cases infectées, elle est contaminée et devient infectée à son tour.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

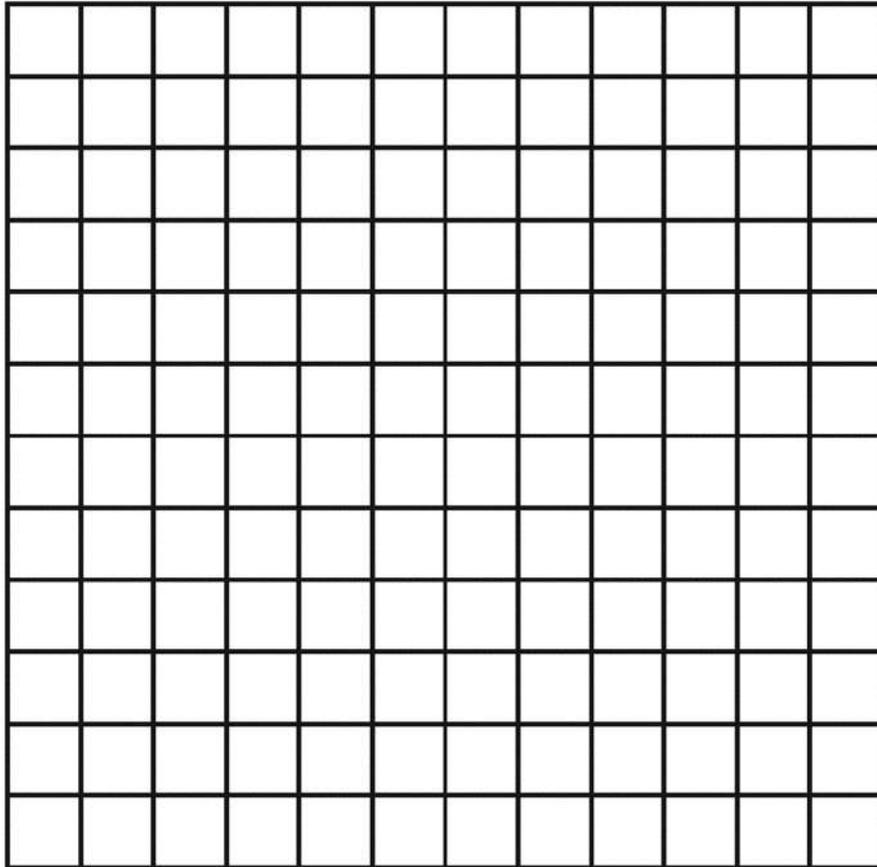


Grille 12 par 12.

 case infectée

Si une case touche deux cases infectées, elle est contaminée et devient infectée à son tour.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

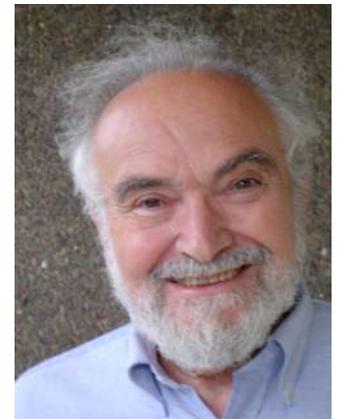


Aizenman et
Lebowitz 1988 :

Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

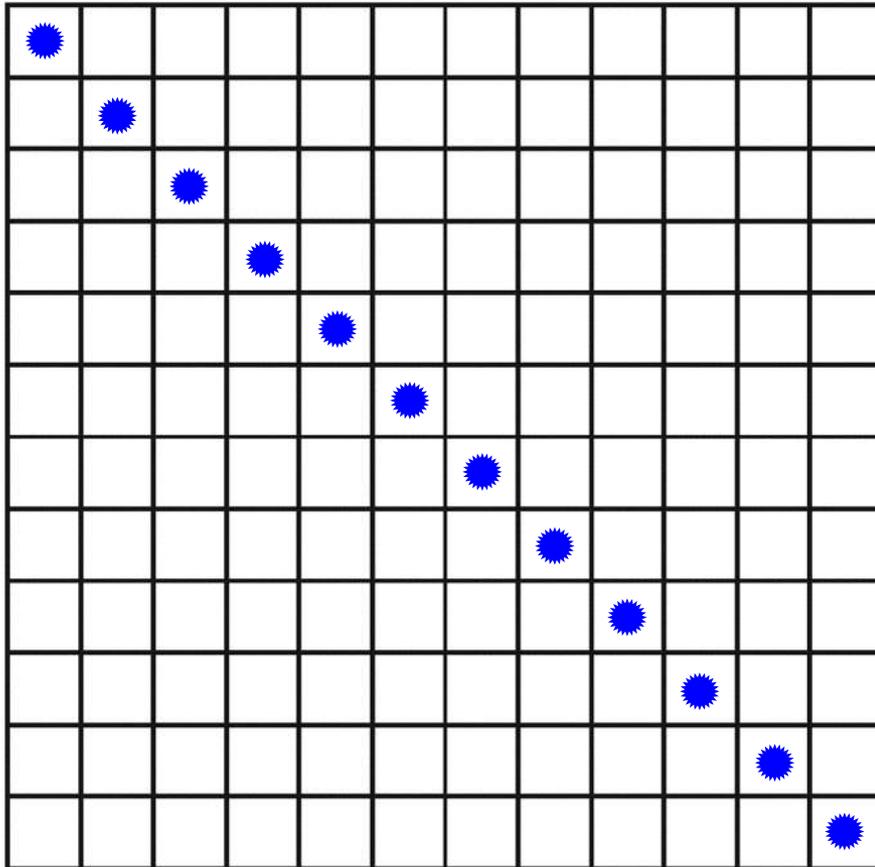


Michael Aizenmann
(1945 -)



Joel L. Lebowitz
(1930 -)

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

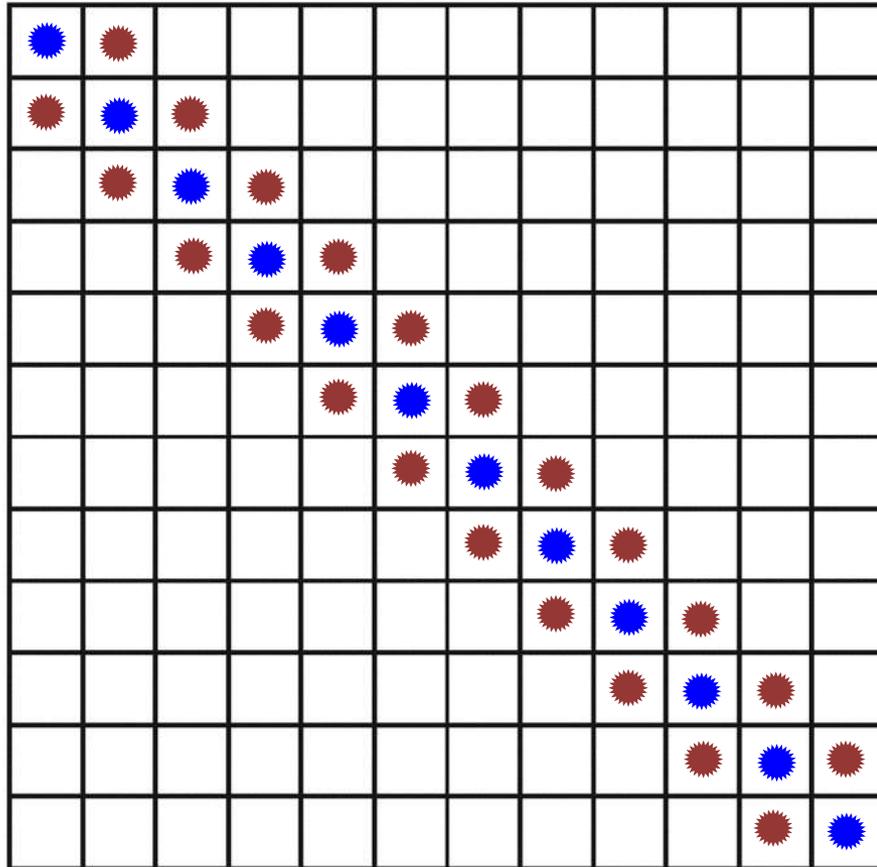


Aizenman et
Lebowitz 1988 :

Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

12
au plus

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE



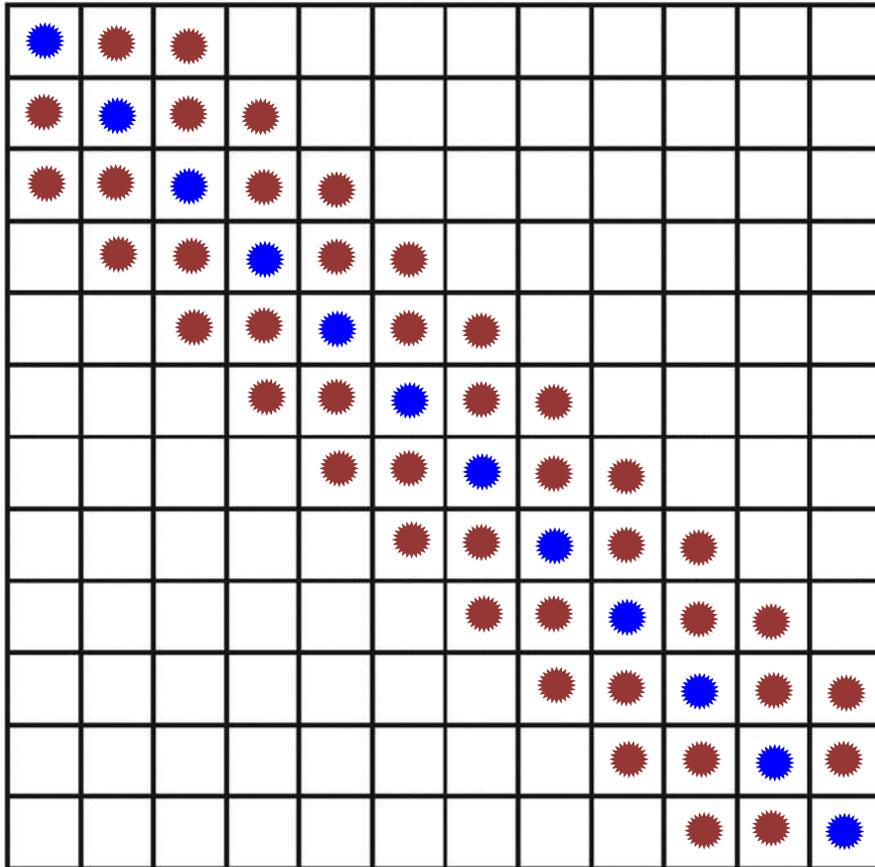
Aizenman et
Lebowitz 1988 :

Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

12
au plus

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

Aizenman et
Lebowitz 1988 :

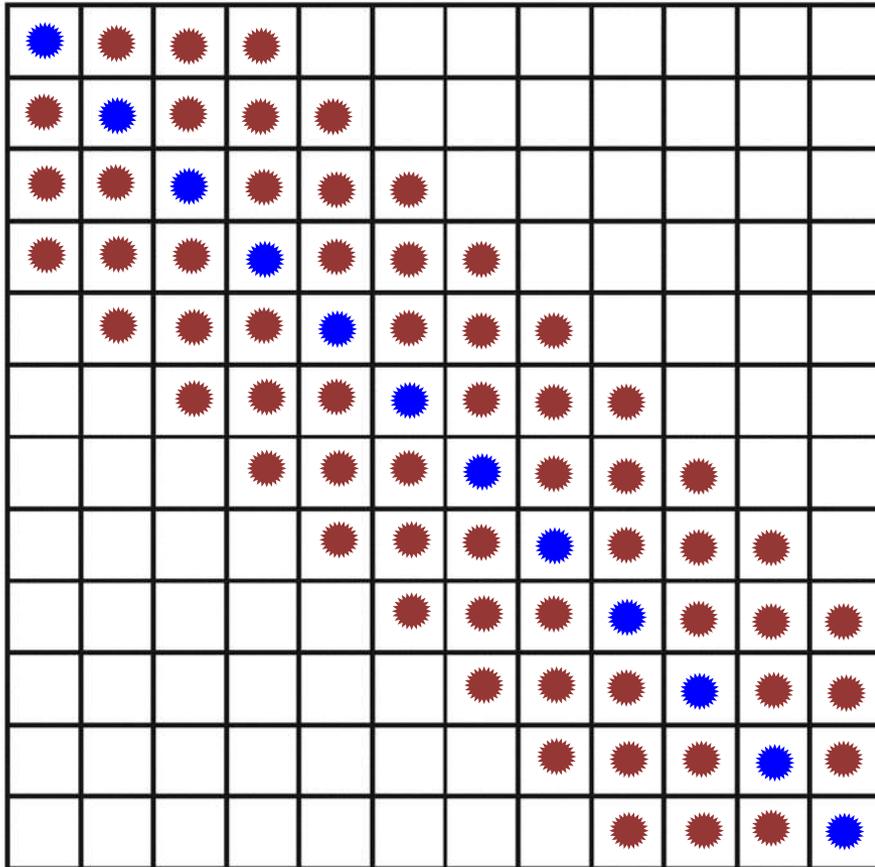


Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

12
au plus

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

Aizenman et
Lebowitz 1988 :

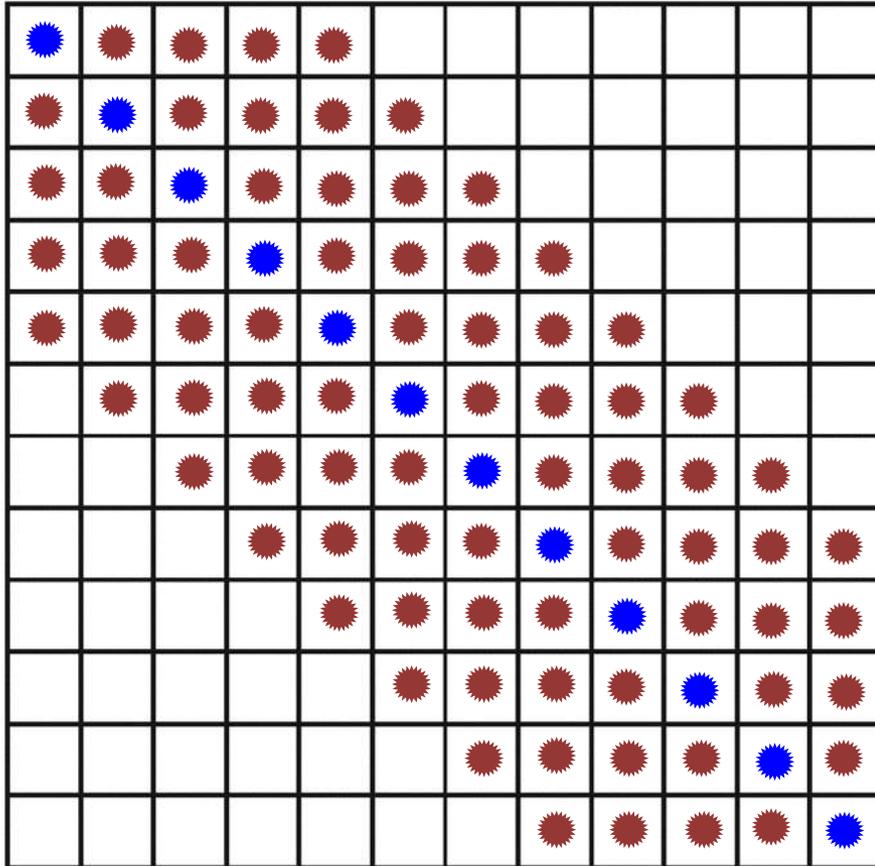


Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

12
au plus

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

Aizenman et
Lebowitz 1988 :

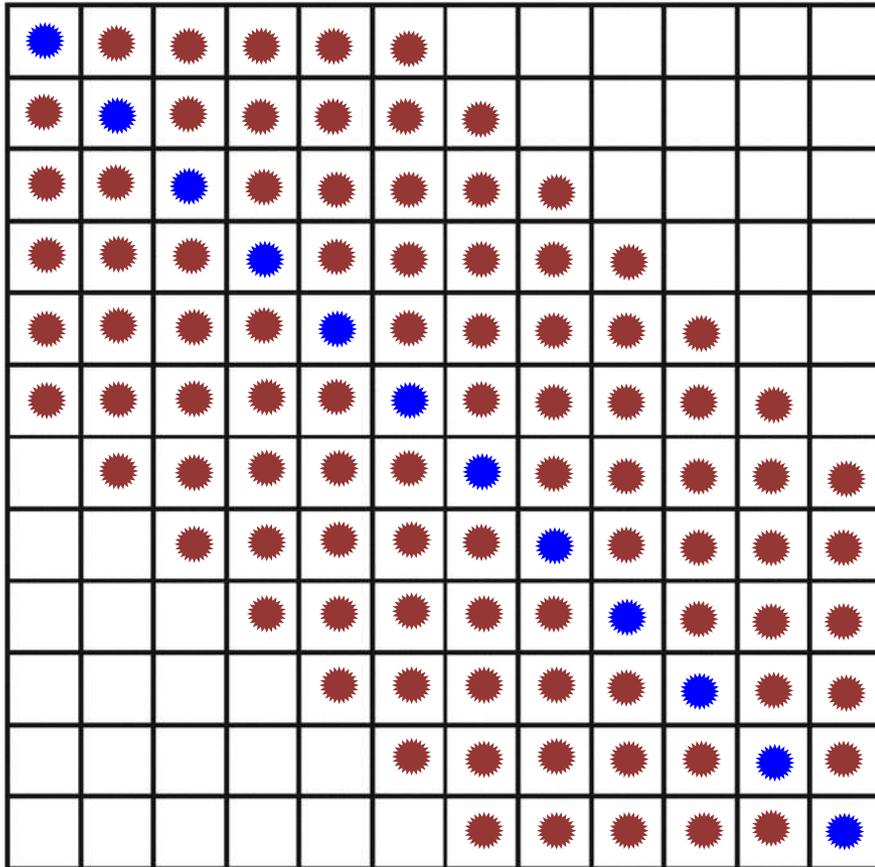


Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

12
au plus

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

Aizenman et
Lebowitz 1988 :

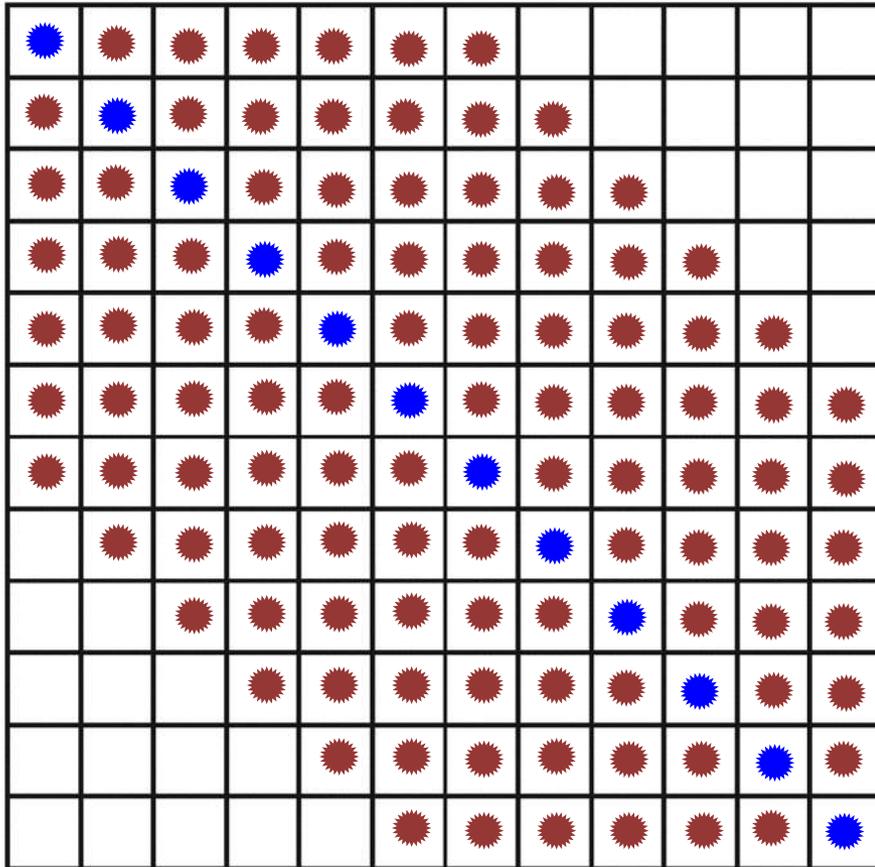


Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

12
au plus

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

Aizenman et
Lebowitz 1988 :

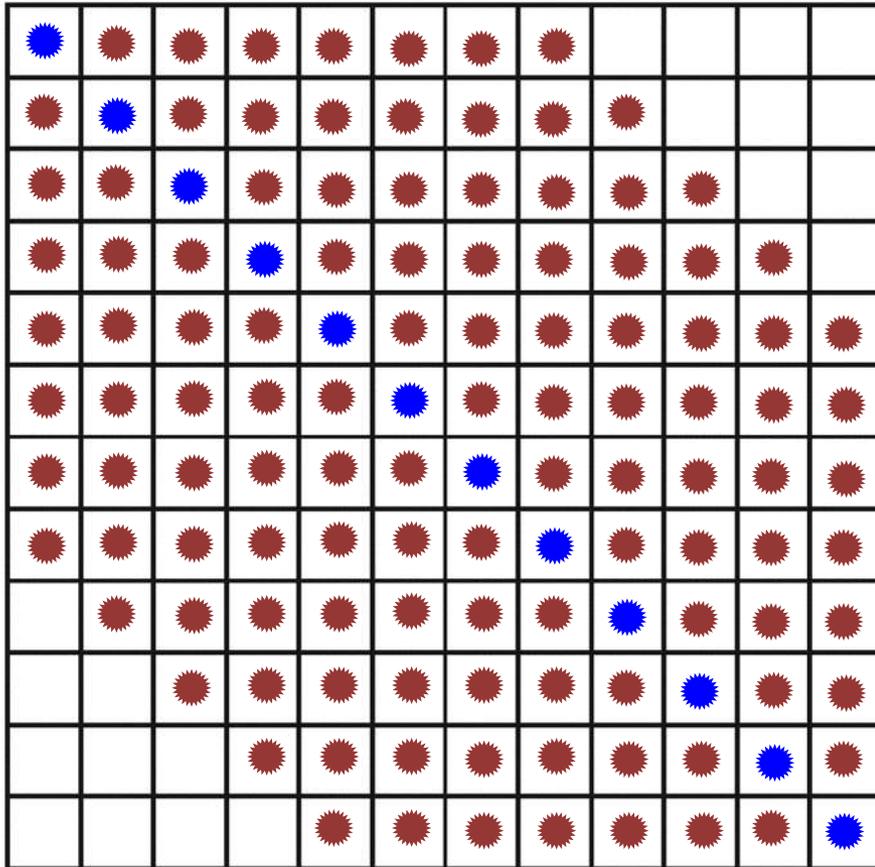


Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

12
au plus

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

Aizenman et
Lebowitz 1988 :

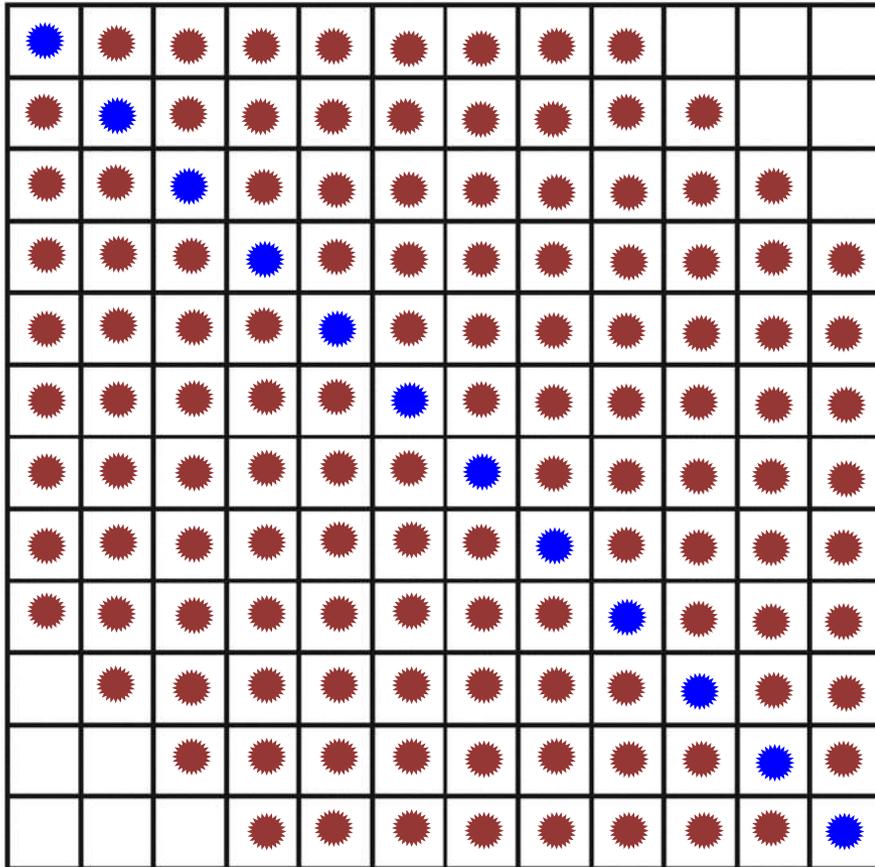


Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

12
au plus

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

Aizenman et
Lebowitz 1988 :

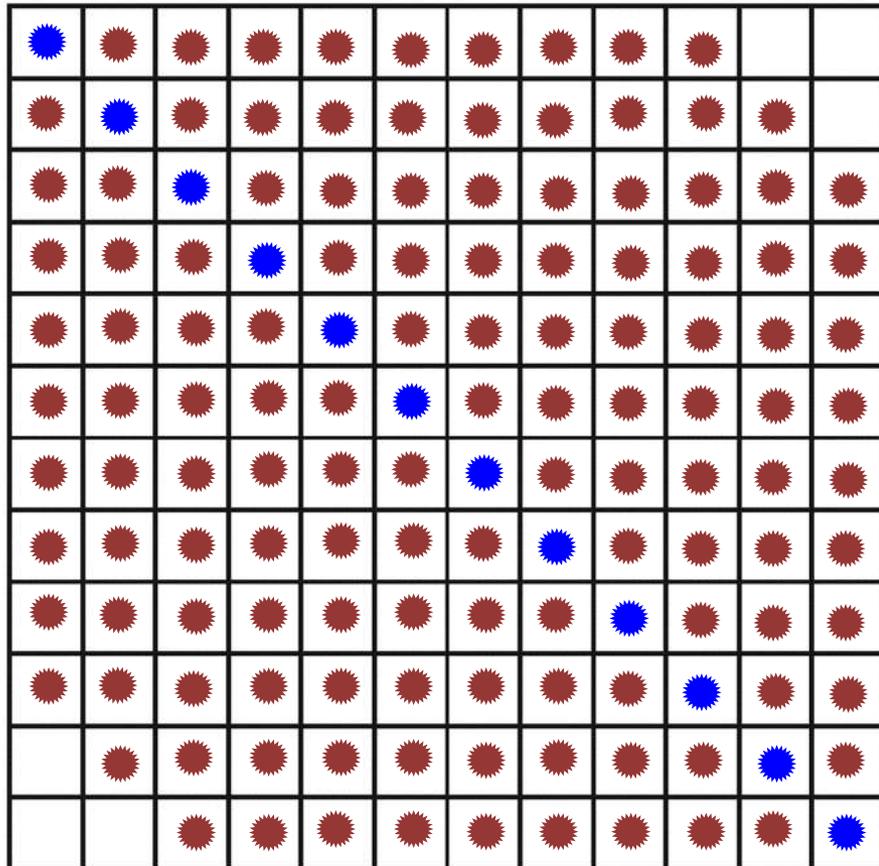


Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

12
au plus

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

Aizenman et
Lebowitz 1988 :

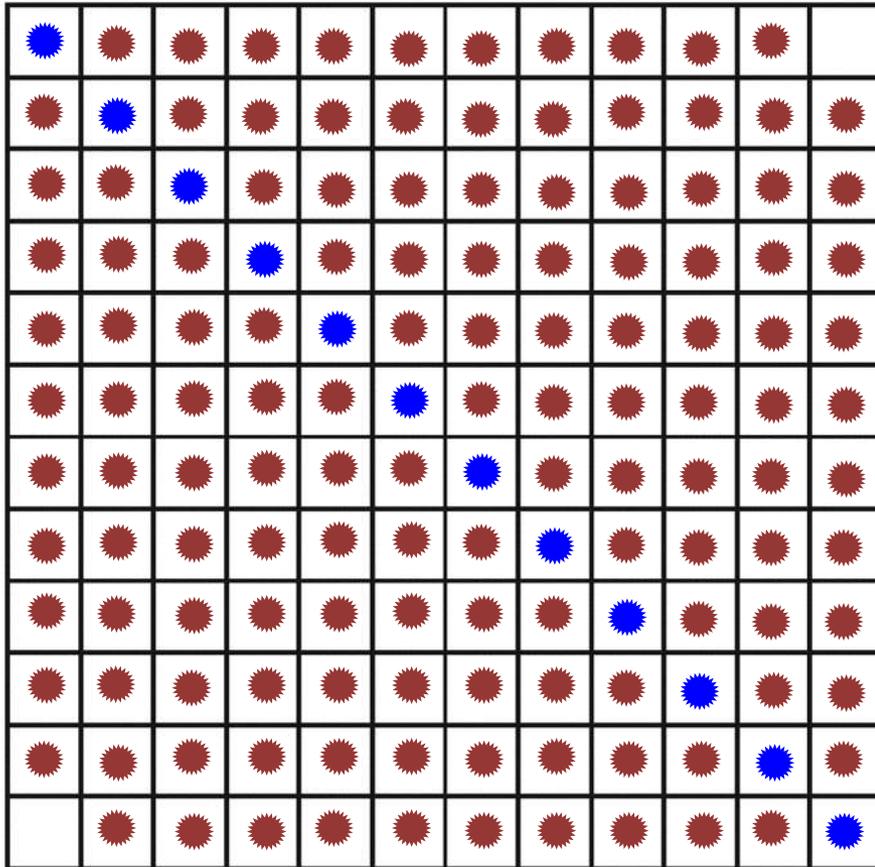


Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

12
au plus

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

Aizenman et
Lebowitz 1988 :

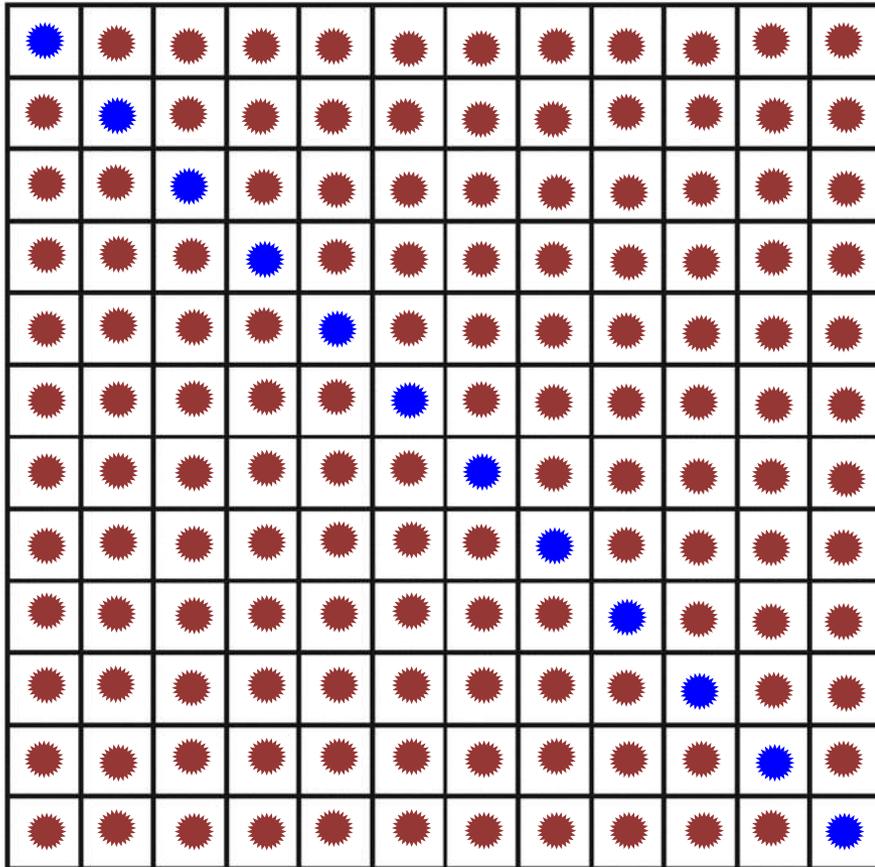


Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

12
au plus

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

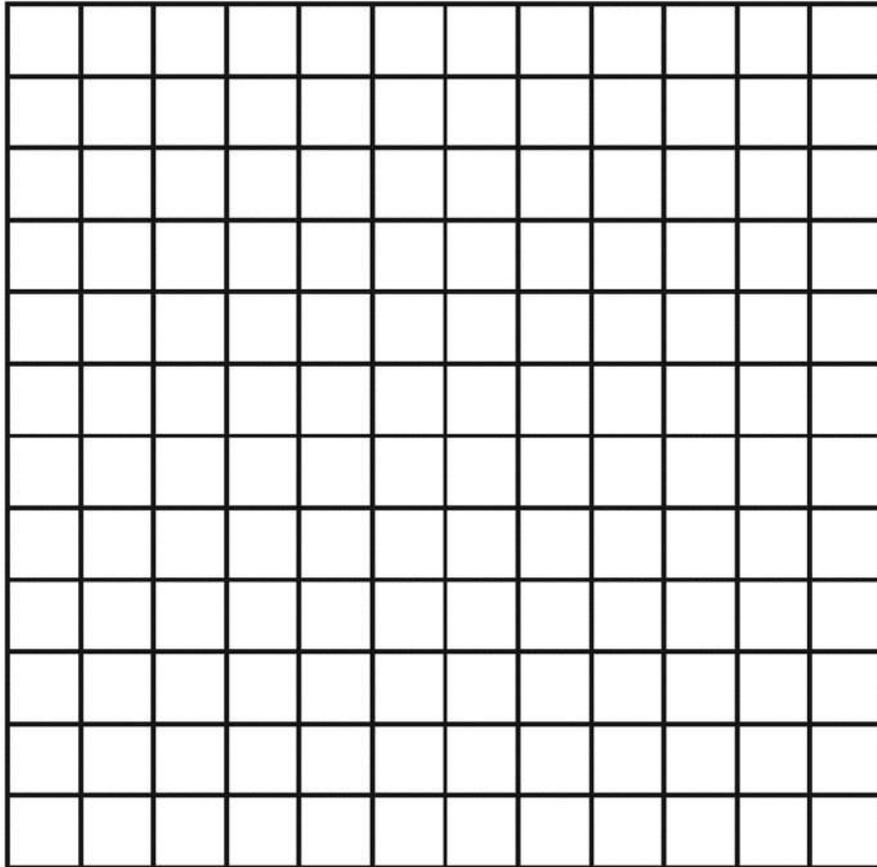
Aizenman et
Lebowitz 1988 :



Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

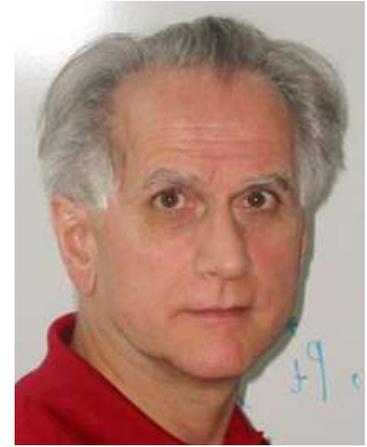
12
au plus

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE



Aizenman et
Lebowitz 1988 :

Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?



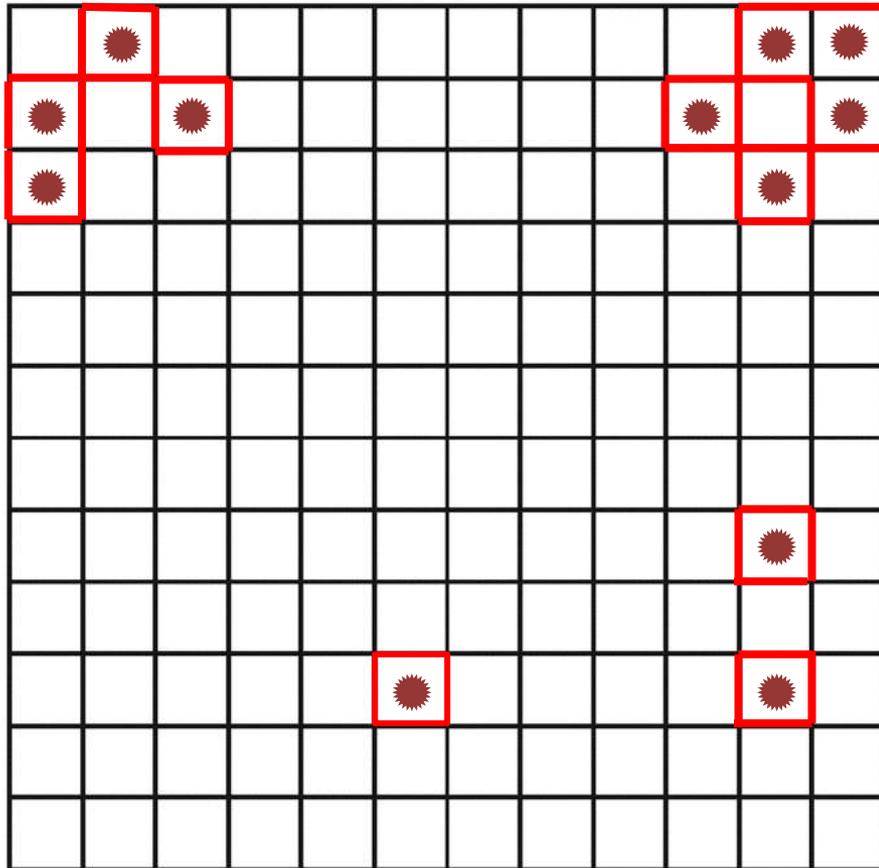
Béla Bollobás
(1943 -)

12

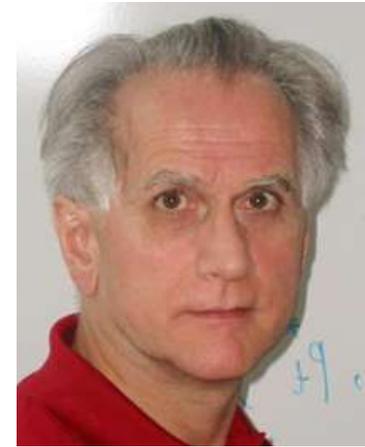
~~au plus~~

Le
périmètre
n'augmente
jamais.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE



Aizenman et
Lebowitz 1988 :



Béla Bollobás
(1943 -)

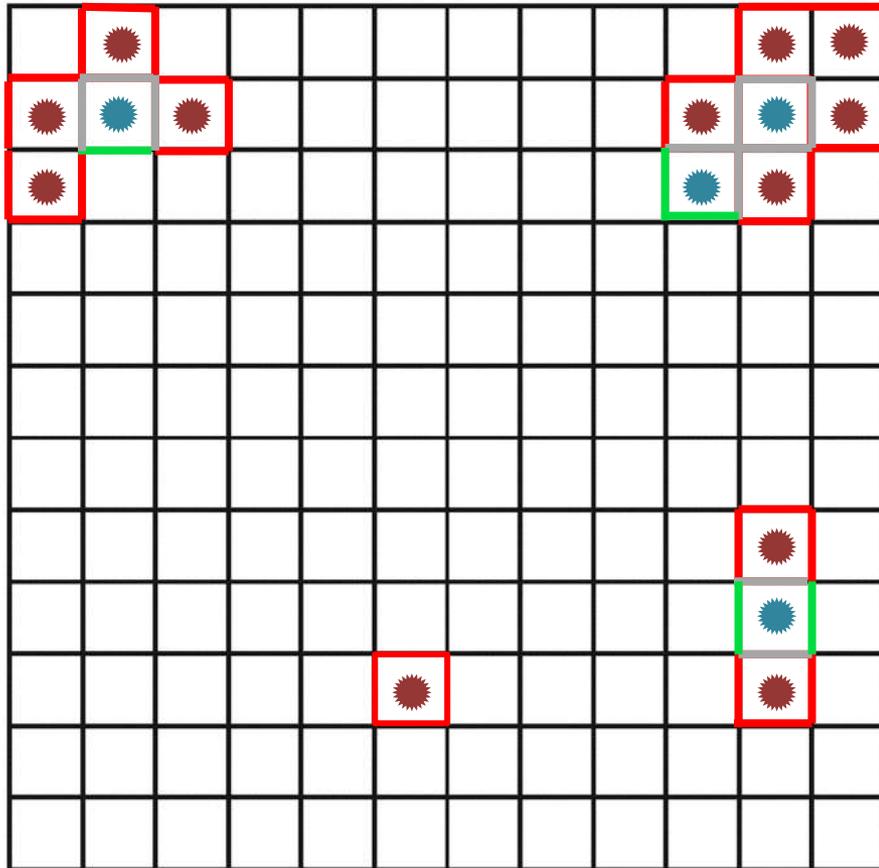
Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

12

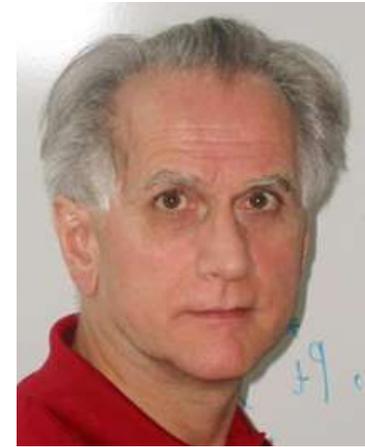
~~au plus~~

Le
périmètre
n'augmente
jamais.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE



Aizenman et
Lebowitz 1988 :



Béla Bollobás
(1943 -)

Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?

12

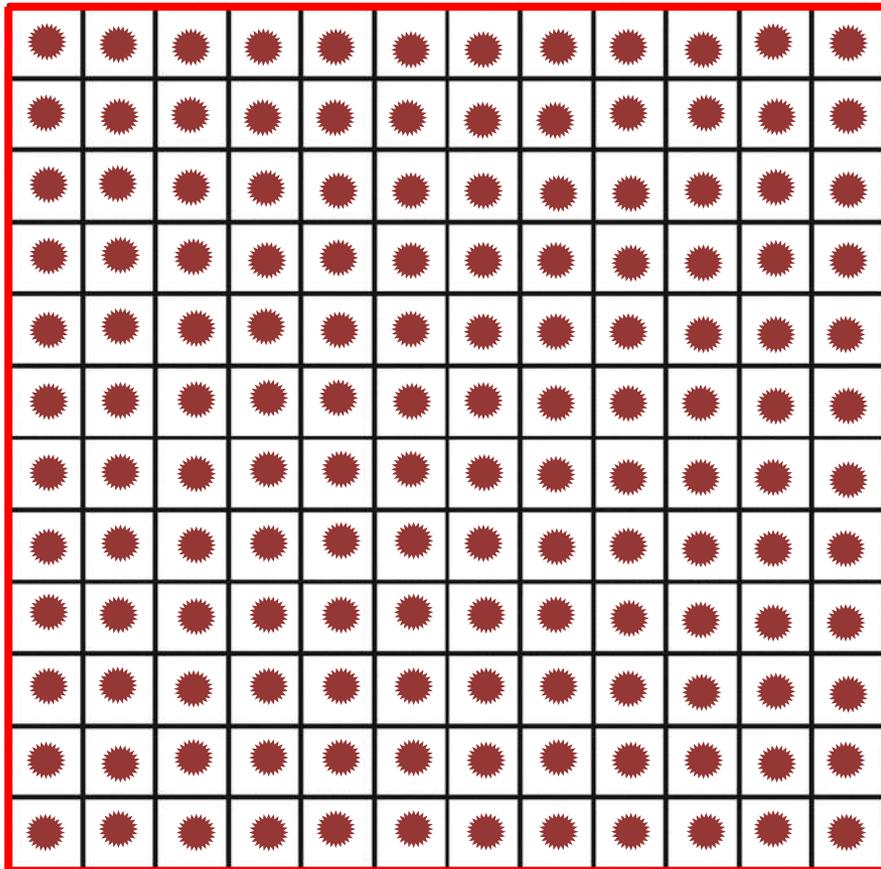
~~au plus~~

Le
périmètre
n'augmente
jamais.

CONTAMINATION DANS UNE GRILLE

A la fin, le périmètre vaut 48.

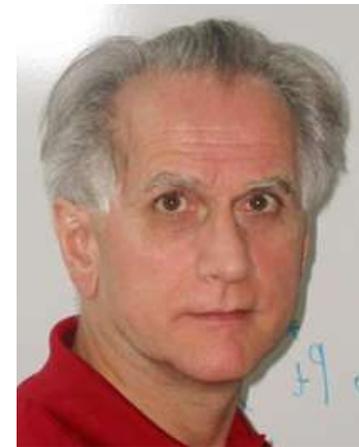
Au début, il doit valoir au moins 48.



Une case a 4 côtés. Il faut infecter au moins $48/4 = 12$ cases.

Aizenman et
Lebowitz 1988 :

Quel est le
nombre
minimum de
cases à
infecter pour
que toutes
les cases
finissent
contaminées
?



Béla Bollobás
(1943 -)

12
~~au plus~~

Le
périmètre
n'augmente
jamais.

COMMENT SURVEILLER UN MUSÉE

V. Klee pose la question suivante en 1973 :

Comment garder un musée avec le moins de gardiens possible ?

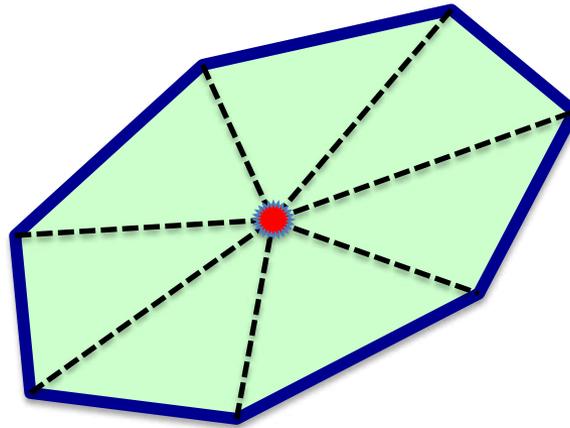
Chaque endroit du musée doit pouvoir être vu par un gardien.



Victor Klee (1925-2007)

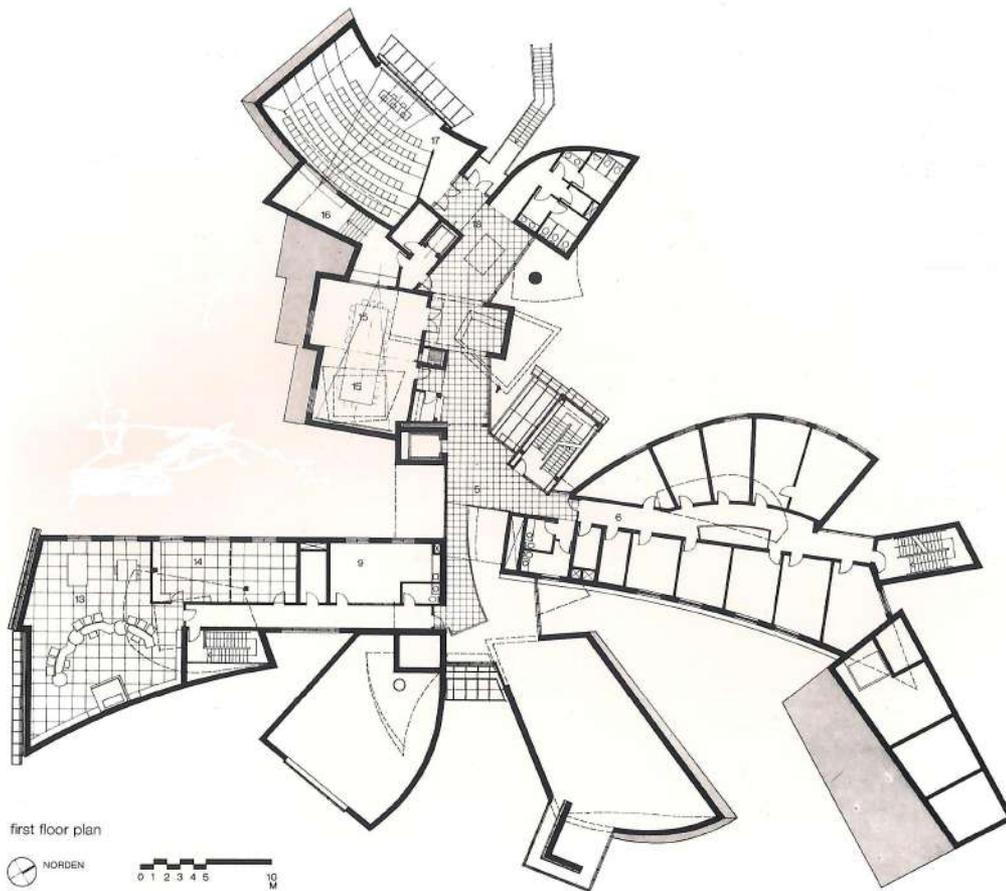
Comment garder un musée avec le moins de gardiens possible ?

Pour les formes de pièces habituelles, **polygones convexes**,
un seul gardien suffit.



Comment garder un musée avec le moins de gardiens possible ?

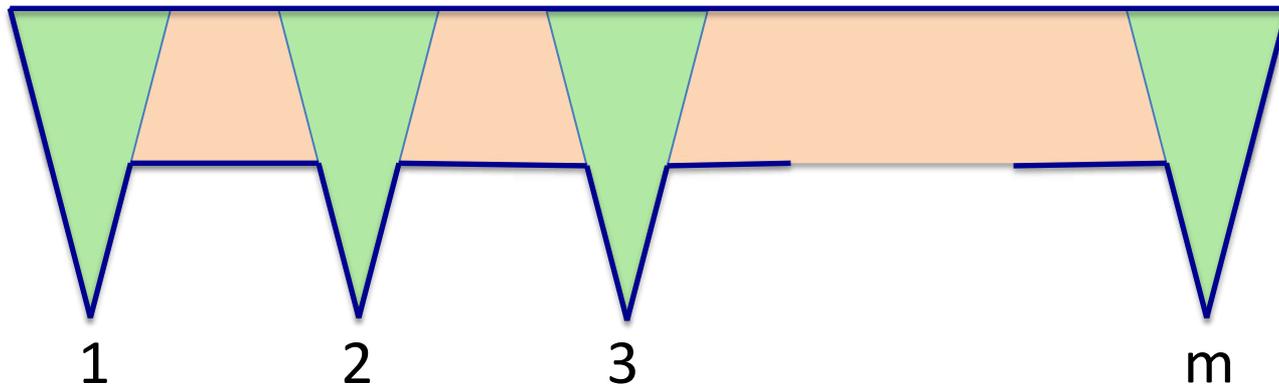
Mais les musées ont souvent des recoins : ils sont **non-convexes**.



1^{er} étage du Musée
Guggenheim de Bilbao

Comment garder un musée avec le moins de gardiens possible ?

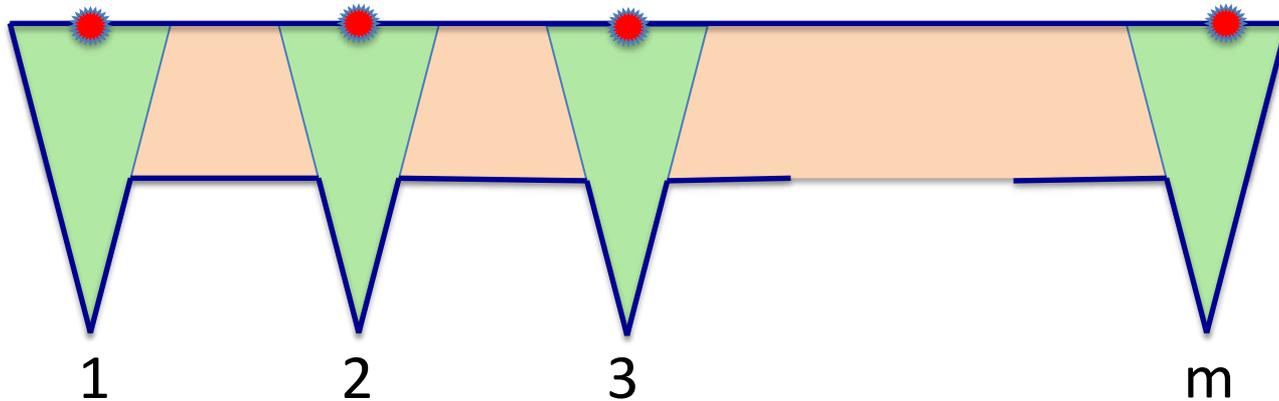
On modélise un musée par un **polygone pas forcément convexe**.



Il faut **au moins m gardes** pour surveiller ce musée à **$3m$ murs**.

Comment garder un musée avec le moins de gardiens possible ?

On modélise un musée par un **polygone pas forcément convexe**.



Il faut **au moins m gardes** pour surveiller ce musée à **$3m$ murs**.

Dans ce cas, **m gardes suffisent**.

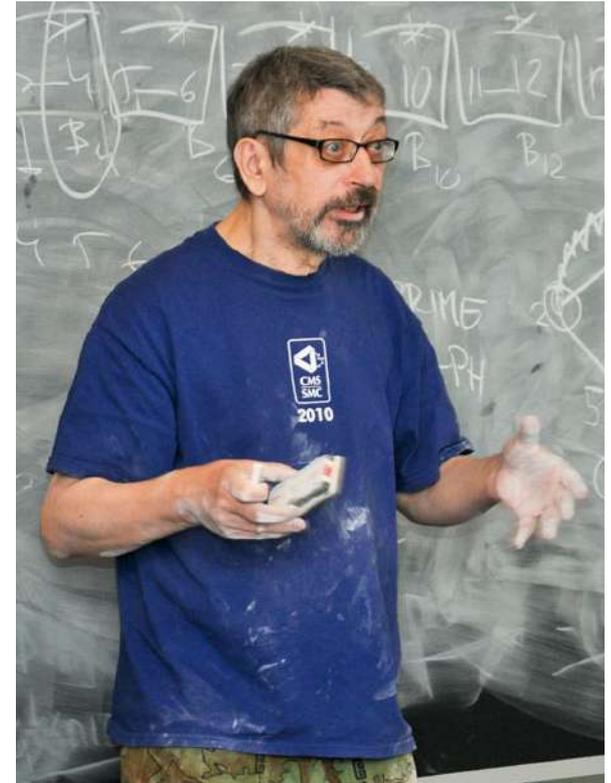
Un musée à n murs peut toujours être surveillé par
au plus $n/3$ gardiens.

Ceci a été prouvé par V. Chvátal en 1975.

Une preuve plus courte et élégante sera
ensuite donnée par S. Fisk en 1978.

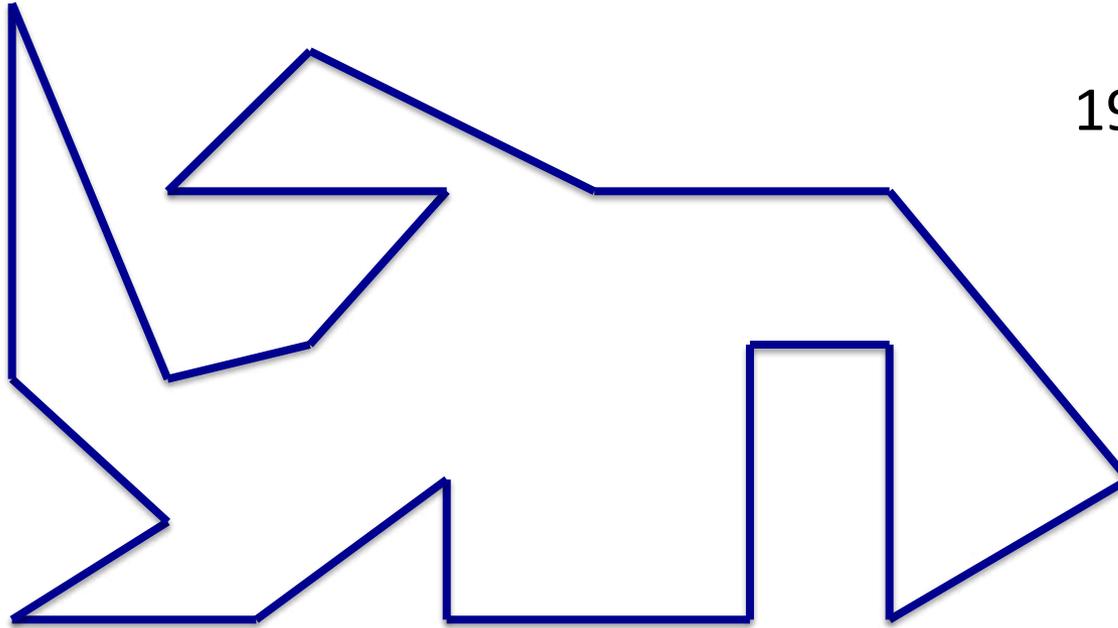


Steve Fisk (1946-2010)



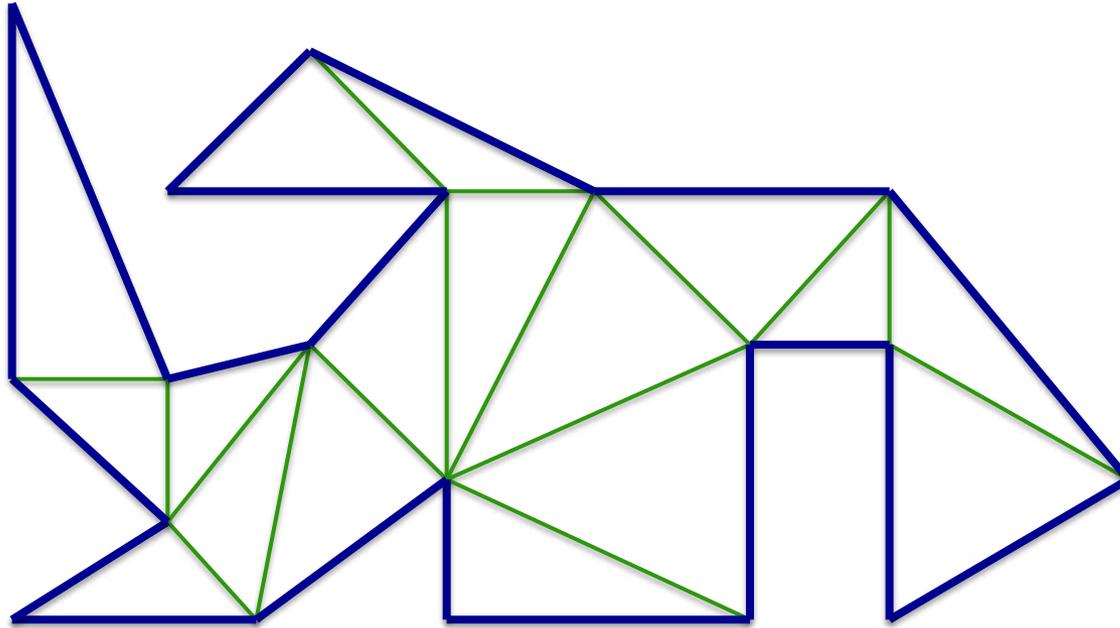
Vasek Chvátal (1946-...)

Un musée à **n murs** peut toujours être surveillé par
au plus $n/3$ gardiens.



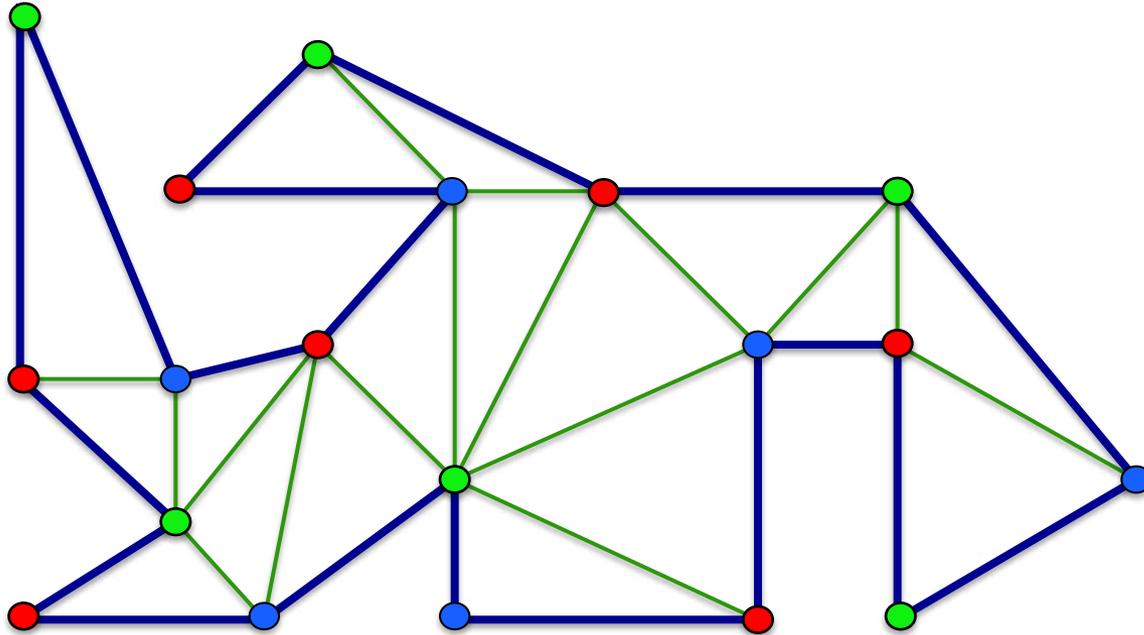
19 murs

Un musée à **n murs** peut toujours être surveillé par
au plus $n/3$ gardiens.



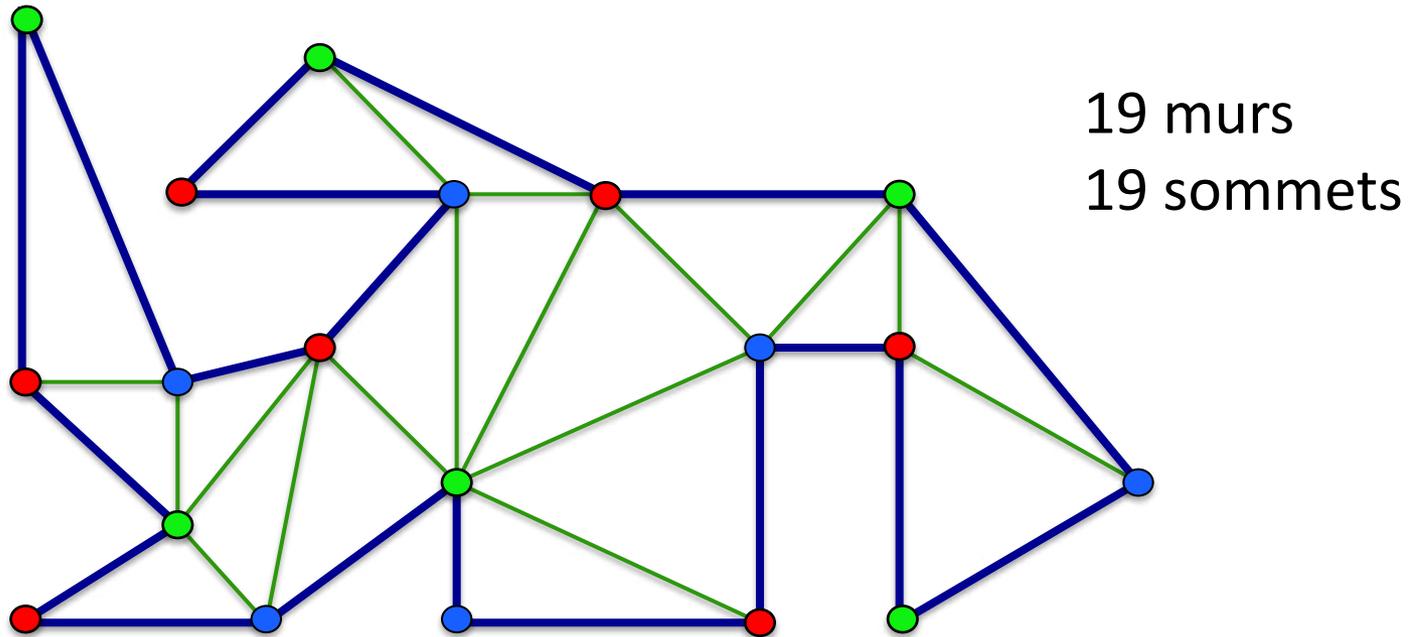
1) On découpe le polygone en triangles.

Un musée à **n murs** peut toujours être surveillé par
au plus $n/3$ gardiens.



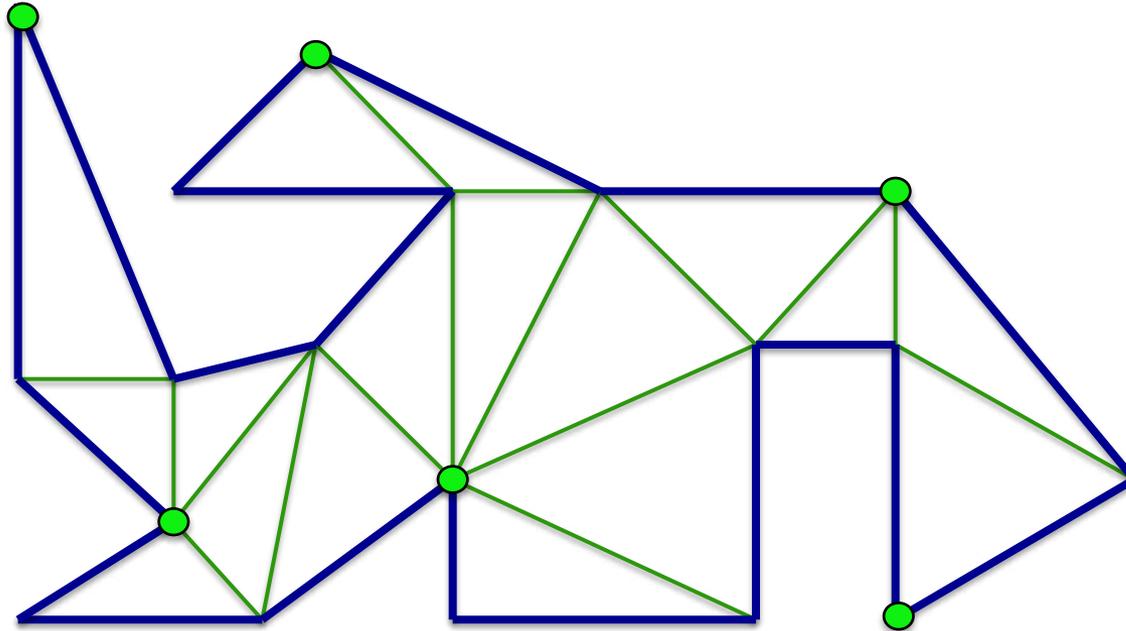
- 1) On découpe le polygone en triangles.
- 2) On colore les sommets du polygone avec 3 couleurs de telle sorte que les sommets de chaque triangle soient de couleurs différentes.

Un musée à **n murs** peut toujours être surveillé par
au plus $n/3$ gardiens.



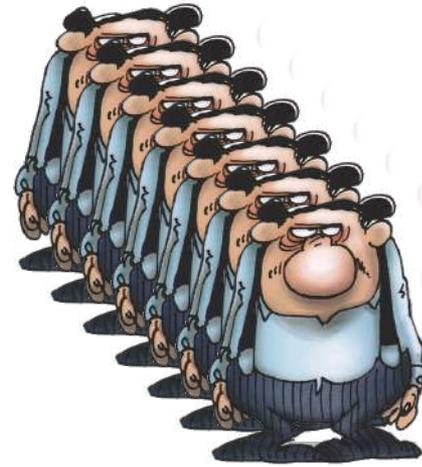
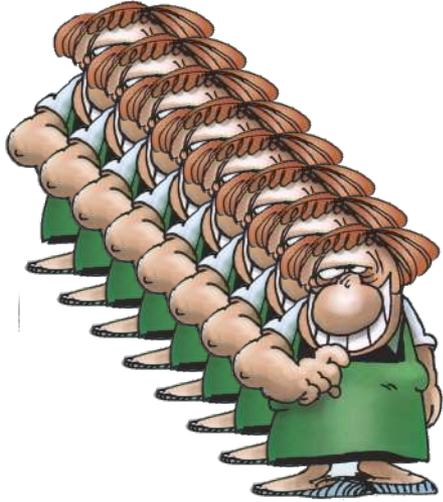
- 1) On découpe le polygone en triangles.
- 2) On colore les sommets du polygone avec 3 couleurs de telle sorte que les sommets de chaque triangle soient de couleurs différentes.
- 3) On prend les sommets de la couleur la moins nombreuse.

Un musée à **n murs** peut toujours être surveillé par
au plus $n/3$ gardiens.



- 1) On découpe le polygone en triangles.
- 2) On colore les sommets du polygone avec 3 couleurs de telle sorte que les sommets de chaque triangle soient de couleurs différentes.
- 3) On prend les sommets de la couleur la moins nombreuse.

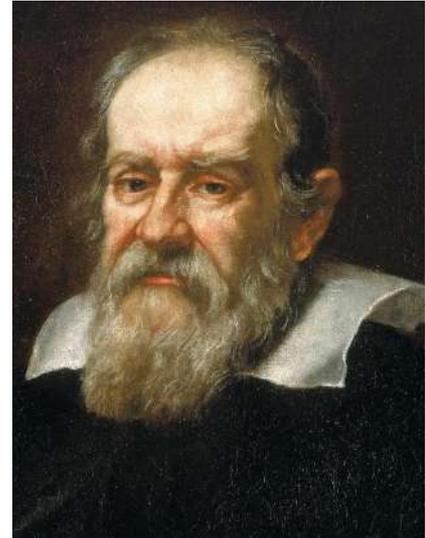
COMPARER DES ENSEMBLES



LE PARADOXE DE GALILÉE

Les nombres entiers sont **plus nombreux** que les nombres pairs.

Entiers		Pairs
1	←→	2
2	←→	4
3	←→	6
4	←→	8
5	←→	10
6	←→	12



Galilée 1564-1642

Les nombres entiers sont **aussi nombreux** que les nombres pairs.

Les attributs ``égal'', ``supérieur'', ``inférieur'' n'ont pas lieu d'être dans les infinis, mais uniquement dans les quantités finies .

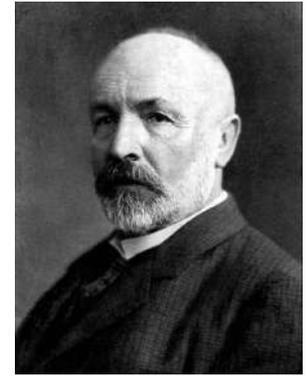
LE PARADOXE DE GALILÉE

« L'infini est un tout et s'il n'est pas plus grand qu'une de ses parties, il est quelque chose d'absurde. »



Gootfried Wilhelm von Leibniz
1646 – 1716

PROCÉDÉ DIAGONAL DE CANTOR



Georg Cantor
1845-1918

Il y a (beaucoup) plus de nombres réels que de nombres entiers naturels.

On ne peut pas numérotter tous les réels avec les entiers.

Par l'absurde. Supposons qu'on puisse numérotter tous les réels avec les entiers.

$$R_1 = 0, \textcircled{2} 3 4 5 6 1 \dots$$

$$R_2 = 0, 6 \textcircled{8} 5 5 1 0 \dots$$

$$R_3 = 0, 1 8 \textcircled{1} 5 7 2 \dots$$

$$R_4 = 0, 3 3 3 \textcircled{3} 3 3 \dots$$

$$R_5 = 0, 0 0 4 3 \textcircled{2} 1 \dots$$

$$R_6 = 0, 9 6 4 9 4 \textcircled{5} \dots$$

$$D = 0, \textcircled{3} \textcircled{9} \textcircled{2} \textcircled{4} \textcircled{3} \textcircled{6} \dots$$

Le nombre **D** diffère de chaque R_i à la i ème décimale.

D n'est pas numéroté.

Contradiction.



Les mathématiques sont la poésie des sciences.

Leopold Sedar Senghor