Fiche pédagogique

Activité : Le jeu de la chèvre et des choux.

Objectifs pédagogiques : Se familiariser avec les notions de stratégies gagnantes dans des jeux à deux joueurs, de graphes, de chemins dans les graphes et d'algorithmes. Expérimenter et concevoir des algorithmes.

Notions abordées : Jeu à deux joueurs, stratégie gagnante, graphes, chemins, algorithme.

Matériel nécessaire : Papiers et crayons (on pourra dessiner les graphes) ou (version grandeur nature) des cerceaux, des lattes ou des cordes (pour les arêtes) et idéalement une chèvre bien dressée et des choux :).

Niveau : À partir du cycle 3.

Durée : Une petite demi-heure pour une introduction, jusqu'à 1 heure si l'on veut laisser les élèves jouer sur plusieurs graphes.

Déroulement :

L'histoire : Vous possédez quelques parcelles de terrain reliées par de petits chemins (représentés par un graphe[1], voir un exemple sur la Figure 1) et sur lesquelles vous avez planté des choux. Il est maintenant temps de la récolte. Cependant, vous avez laissé ouverte la porte de l'enclos de votre chèvre et il vous faudra faire vite avant qu'elle ne mange votre récolte. Précisément, à chaque tour du jeu (en commençant par vous), vous pouvez récolter les choux de 2 parcelles (celles que vous voulez), puis la chèvre (initialement dans son enclos, représenté par un double cercle sur les figures) se déplace le long d'un chemin (d'une arête) dans le sens qu'elle désire. Si la chèvre arrive sur une parcelle non récoltée, elle mange un chou et gagne. Sinon, si vous parvenez à récolter tous les choux avant que la chèvre ne se sustente, vous êtes vainqueur. L'objectif est de décrire une stratégie pour récolter tous les choux avant que la chèvre ne gagne ou, si cela n'est pas possible, de décrire une stratégie pour que la chèvre soit sûre de manger un chou.

Déroulement, phase 1 : Commencez avec l'exemple représenté sur la Figure 1. Divisez la classe en binômes (si vous jouez sur papier) ou en deux groupes (si vous jouez grandeur nature). Chaque membre d'un binôme (ou chacun des deux groupes) va tenir le rôle d'un des deux joueurs (la chèvre et le paysan). Une fois le but et les règles expliqués, présentez l'exemple de la Figure 1 à la classe et laissez les élèves expérimenter, c'est-à-dire, faîtes les jouer et discuter et comparer les résultats (quel joueur a gagné ? comment ?). Dans le cas où un groupe d'élèves

1. Rappelons qu'un graphe est composé de sommets, figurés par des cercles et représentant ici les parcelles, et des arêtes figurées par des lignes reliant certaines paires de sommets et représentant ici les chemins.

joue un joueur, il est important qu'ils discutent entre eux pour se mettre d'accord sur le coup à jouer à chaque tour.

Conseil pratique : Que ce soit sur papier ou grandeur nature, il est utile de figurer les choux par des objets concrets (si vous n'avez pas de choux n'importe quels objets même différents feront l'affaire) à placer sur les sommets, de façon à ce que le joueur "paysan" récolte concrètement ses choux et qu'à chaque étape, il soit clair quelles parcelles ont déjà été récoltées ou non.

Une fois la première partie jouée, recommencez en inversant le rôle des élèves/groupes.

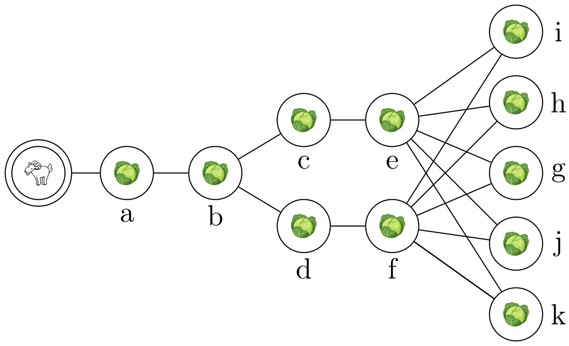


FIGURE 1 – Un premier exemple intéressant. Le sommet représenté par un double cercle représente l'enclos de la chèvre (son point de départ).

Un exemple de partie possible (probablement la plupart des parties jouées la première fois ressembleront à celle-ci) est représentée sur la Figure 2.

Dans un second temps, il est intéressant que les élèves/groupes comparent leurs solutions. Plusieurs remarques intéressantes devraient émerger :

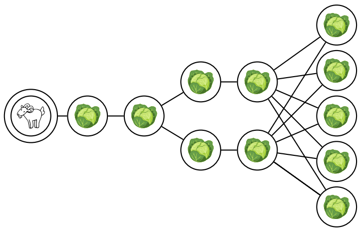
Pour le joueur "paysan" :

— Il est indispensable (sauf si le joueur "chèvre" se trompe) de récolter les choux directement adjacents à la position courante de la chèvre ;
— Il est parfois intéressant de récolter des choux "loin" de la chèvre ;
— Les sommets (parcelles de terrain) voisins/adjacents de nombreux autres sommets peuvent être "problématiques/dangereux".

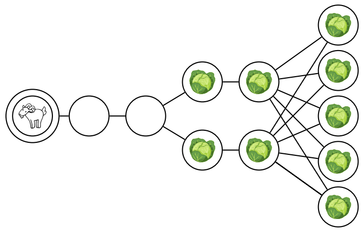
Pour le joueur "chèvre" :

— Il n'est jamais intéressant de revenir sur ses pas (traverser deux fois une même arête n'aide jamais) ;
— Se rendre "rapidement" vers un sommet avec un fort degré (avec beaucoup de voisins) semble être une bonne stratégie.

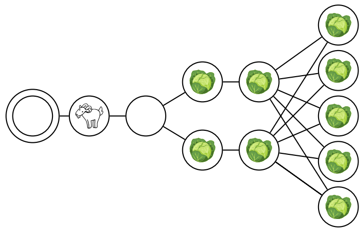
Vous pouvez ensuite recommencer jusqu'à ce que les joueurs "paysans" comprennent comment gagner (à tous les coups, quoi que fasse le joueur "chèvre"). Il est important que les élèves comprennent la différence entre gagner de temps en temps "par chance" et le fait de décrire précisément une stratégie (quelles actions doivent être faites à chaque tour, selon ce qui a déjà été joué) qui leur permette de gagner à coup sûr (une stratégie gagnante). Une



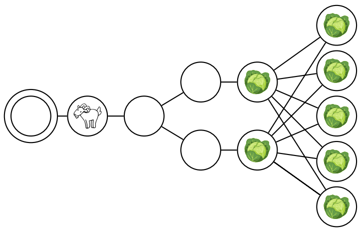
(a) Situation initiale



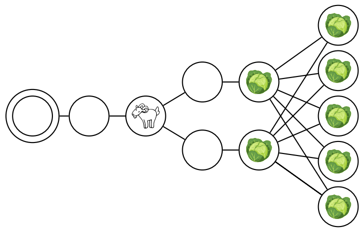
(b) Le paysan récolte deux choux



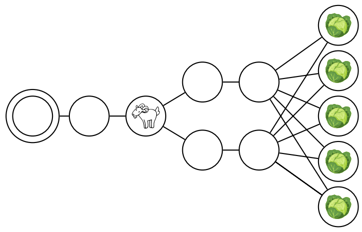
(c) La chèvre avance d'une arête



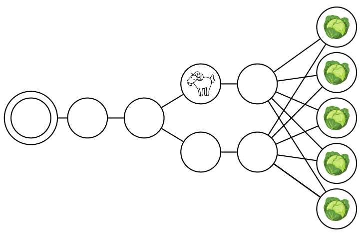
(d) Le paysan récolte encore deux choux



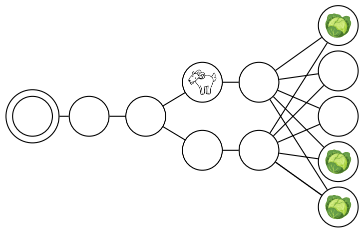
(e) Puis, la chèvre avance



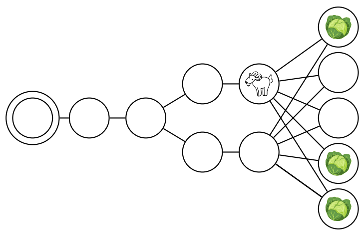
(f) Le paysan récolte encore deux choux



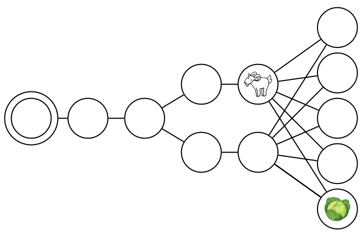
(g) Puis, la chèvre avance



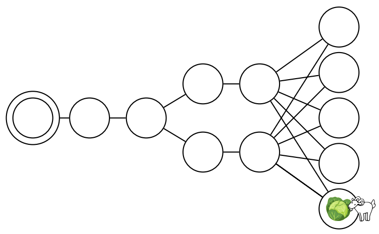
(h) Le paysan récolte encore deux choux



(i) Puis, la chèvre avance



(j) Le paysan récolte encore deux choux



(k) La chèvre avance et gagne

FIGURE 2 – Un exemple de partie possible sur l'exemple de la Figure 1.

stratégie gagnante pour le paysan est de récolter a et b au premier tour, c et d au second tour et i et h au troisième tour. Puis, si la chèvre se trouve sur c, le paysan récolte e et g (sinon, f et g), puis j et k et enfin, au sixième tour, le paysan récolte celui de e ou f qui reste.

Déroulement, phase 2 : On peut réitérer le problème précédent en modifiant les règles du jeu :

— Le paysan peut collecter les choux de x parcelles à chaque tour (jusqu'ici, on avait $x = 2$). Sur l'exemple de la Figure 1, la chèvre gagne facilement si $x = 1$ (une stratégie gagnante est : si la chèvre a un voisin avec un chou, elle y va, sinon, elle va sur un voisin non déjà visité). Sur l'exemple de la Figure 1, le paysan gagne facilement si $x = 3$ (à vous de décrire une stratégie gagnante).
En fait, étant donné un graphe et un sommet de départ, le problème peut être de trouver la valeur minimum de x telle que le paysan a une stratégie gagnante pour cette valeur x.

— Le paysan ne peut récolter une parcelle que si elle est voisine de l'enclos ou d'une parcelle qui a déjà été récoltée. Dans ce cas, sur l'exemple de la Figure 1 et avec $x = 2$, la chèvre gagne (comment ?).

— On peut aussi ajouter des orientations aux arêtes : la chèvre ne peut suivre un chemin que dans un sens.

On peut également considérer d'autres graphes. Notez qu'il faut un peu tâtonner pour construire des graphes (et le nombre x de choux qui peuvent être récoltés à chaque étape) qui soient intéressants (c'est-à-dire que la solution ne soit pas triviale).

De nouveaux exemples sont proposés sur la Figure 4.

Déroulement, phase 3 : Dans cette phase, nous considérons une famille de graphes particulière définie comme suit. On choisit un nombre $p \geq 1$ de "couches " et p nombres entiers $(\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p)$. Le graphe $G[\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p]$ est alors défini en commençant par un sommet (la couche 0 et l'enclos de la chêvre) et, pour chaque $1 \leq i \leq p$, en ajoutant ℓ_i sommets (la couche i) qui sont chacun adjacent à chaque sommet de la couche $i - 1$.

Par exemple, les graphes $G[3, 3, 3, 3]$ et $G[2, 4, 3, 5, 3]$ sont représentés sur la Figure 3.

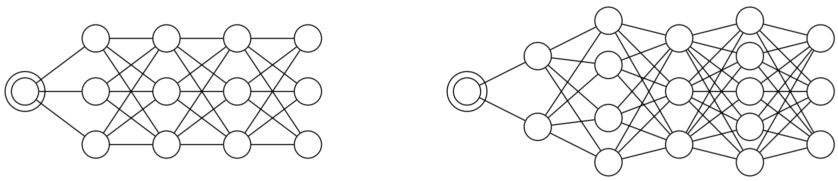


FIGURE 3 – Les graphes $G[3, 3, 3, 3]$ (gauche) et $G[2, 4, 3, 5, 3]$ (droite).

Dans le cas d'un graphe $G[\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_p]$, la question est de déterminer la valeur minimum de x telle que le paysan a une stratégie gagnante si il récolte au moins x choux à chaque étape.

Clairement $\ell_1 \leq x \leq \max_{1 \leq i \leq p} \ell_p$ puisqu'il faut récolter au moins les choux de la couche 1 au premier tour, et que la stratégie qui consiste à récolter tous les choux de la couche i au tour i est gagnante.

En fait, pour chaque tour $i \leq p$, il faut que le paysan ait récolté au moins tous les choux des couches 1 à i et donc $x \times i \geq \sum_{1 \leq j \leq i} \ell_j$. On en déduit que x est le plus petit entier tel que $x \geq \max_{1 \leq i \leq p} \frac{\sum_{1 \leq j \leq i} \ell_j}{i}$, i.e., $x = \max_{1 \leq i \leq p} \lceil \frac{\sum_{1 \leq j \leq i} \ell_j}{i} \rceil$ [2].

2. Étant donné un nombre (réel) x, $\lceil x \rceil$ est le plus petit nombre entier k tel que $x \leq k$. Par exemple, $\lceil \frac{3}{2} \rceil = 2$, $\lceil \frac{13}{12} \rceil = 2$, $\lceil 2 \rceil = 2$, $\lceil \frac{2}{3} \rceil = 1$, $\lceil 0.012 \rceil = 1$, $\lceil \frac{16}{3} \rceil = 4$... Dit autrement, $\lceil x \rceil$ est la partie entière supérieure de x.

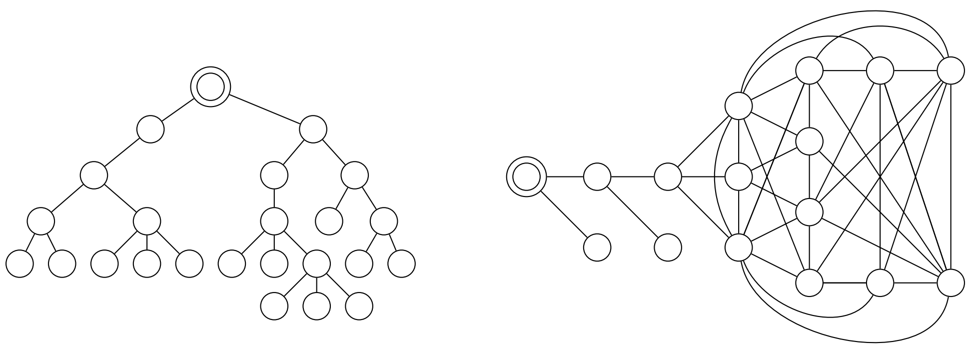
Aller plus loin / Applications : Ce problème (étant donné un graphe, un enclos et un nombre x de choux que le paysan peut récolter à chaque tour) est “mathématiquement compliqué" (NP-difficile). Aucune “description simple" d'une stratégie gagnante pour l'un ou l'autre des deux joueurs n'est connue. C'est pourquoi nous n'avons présenté que des intuitions sur ce que les joueurs pourraient faire.

Ce jeu a été défini pour étudier des problèmes de pré-traitement / de pré-téléchargement dont nous donnons informellement deux exemples très simplifiés. Supposons que vous “surfez" sur le Web (allez d'une page Web à une autre en suivant les hyper-liens) : vous espérez que votre moteur de recherche favori anticipe vos actions et que lorsque vous cliquez sur un lien, la page Web correspondante ait déjà été chargée dans la mémoire de votre ordinateur (sans quoi vous risquez d'attendre). Dans cet exemple, vous jouez la “chèvre" se déplaçant dans le graphe du Web et votre moteur de recherche joue le rôle du paysan. Dans notre second exemple, vous êtes un joueur de jeu vidéo qui se déplace librement dans un monde ouvert : vous espérez que lorsque vous arrivez dans un nouvel espace (par exemple, une ville, une forêt...) les éléments graphiques correspondants aient déjà été “préparés" de façon à éviter une certaine lenteur dans l'affichage du décor. Dans ces contextes, le paramètre x représente le temps de téléchargement (ou de pré-traitement) et c'est cela qui doit être minimisé.

Références :

- `file:///Users/nnisse/Downloads/RR-7740.pdf` (en anglais)
- `file:///Users/nnisse/Downloads/algotel-fugitif.pdf` (version courte en français)
- `http://www-sop.inria.fr/members/Nicolas.Nisse/slides/Sirocco13.pdf` (slides en anglais)

Contact : nicolas point nisse arobase inria point fr



Stratégie gagnante pour $x \geq 2$.

Stratégie gagnante pour $x \geq 3$.

FIGURE 4 – Autres exemples. Le sommet représenté par un double cercle représente l'enclos de la chèvre (son point de départ). Pour chaque exemple, ne donnez pas immédiatement la valeur de x mais laissez plutôt les élèves proposer leur solution.

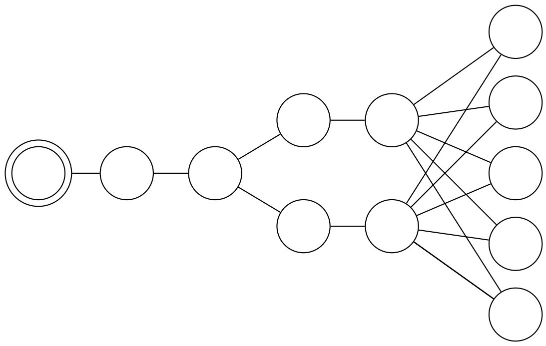


FIGURE 5 – Le premier exemple intéressant.